

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA

# Trecce bidimensionali

Tesi Sperimentale di Laurea in Geometria

Relatore

*Prof. R. Piergallini*

Laureando

*Daniele Zuddas*

---

Anno Accademico 1999 – 2000

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Nozioni di base</b>	<b>5</b>
1.1 Varietà topologiche . . . . .	5
1.2 Sottovarietà . . . . .	9
1.3 Complessi cellulari e simpliciali . . . . .	10
1.4 Decomposizioni a manici . . . . .	13
<b>2 Stabilità dei rivestimenti ramificati</b>	<b>16</b>
2.1 Rivestimenti ramificati . . . . .	16
2.2 Mappe stabili . . . . .	19
<b>3 Superfici in <math>\mathbf{R}^4</math></b>	<b>23</b>
3.1 Immersioni locali in $\mathbf{R}^m$ . . . . .	23
3.2 Superfici come rivestimenti ramificati . . . . .	24
3.3 Il caso non orientabile . . . . .	34
<b>Bibliografia</b>	<b>40</b>

## Introduzione

In questa tesi parlerò delle superfici in 4-varietà, in particolare verranno descritti alcuni modi per rappresentare le superfici immerse. L'attenzione verterà sul concetto di rivestimento ramificato, che è una mappa tra varietà della stessa dimensione in cui l'insieme singolare ha codimensione due.

L'importanza di queste mappe nello studio delle varietà di dimensione bassa è fondamentale. I rivestimenti ramificati sono stati studiati a lungo e sono tuttora argomento di ricerca. Già nel secolo scorso venivano utilizzati per studiare le superfici di Riemann (superfici con una struttura complessa). Prendendo spunto da quest'ordine di idee, la teoria dei rivestimenti tra superfici ha trovato uno sviluppo in una direzione più topologica, in particolare con le ricerche di Riemann e Hurwitz. Quest'ultimo ha trovato risultati di esistenza ed unicità arrivando a classificare tutti i rivestimenti tra superfici compatte. In effetti è stato proprio Hurwitz ad introdurre e studiare quelli che oggi chiamiamo complessi di spezzamento, per mezzo dei quali dimostrò i teoremi sopra menzionati.

Altre applicazioni dei rivestimenti ramificati riguardano lo studio delle 3-varietà. In quest'ambito si conoscono molti risultati ed applicazioni. Uno dei teoremi di base stabilisce la possibilità di rappresentare tutte le 3-varietà chiuse orientabili come rivestimento di  $\mathbf{S}^3$  ramificato sopra un

link. Si può richiedere anche che il rivestimento sia semplice e con tre fogli e che il link di ramificazione sia un nodo.

L'importanza di questo teorema consiste nel fatto che con esso possiamo rappresentare la varietà mediante un nodo in  $\mathbf{S}^3$  (e quindi in  $\mathbf{R}^3$ ) più alcune informazioni di natura algebrica che determinano la monodromia (di cui parlerò nel capitolo 2). In alcuni casi è anche possibile sollevare certe strutture topologiche e geometriche definite su  $\mathbf{S}^3$  ottenendo strutture dello stesso tipo sulla varietà, come p.e. le decomposizioni a libro aperto nel caso topologico oppure le strutture di contatto nel caso geometrico. Per una esposizione chiara dei principali risultati sui rivestimenti delle superfici e delle 3-varietà si rimanda a [32, 31, 2, 1, 12]. In questa tesi non ci occuperemo delle 3-varietà, ma solo delle superfici.

Uno dei risultati principali che intendo esporre è una generalizzazione del teorema di Alexander sulla rappresentazione dei nodi in  $\mathbf{R}^3$  come trecce chiuse. Se  $F \subset \mathbf{R}^4$  è una superficie chiusa, orientabile e liscia, allora è possibile trovare una superficie  $F'$  isotopa ad  $F$  la cui proiezione su  $\mathbf{S}^2$  è un rivestimento ramificato. Questo teorema è stato inizialmente proposto da Viro e poi rielaborato da Kamada in [20]. Di questo risultato darò una dimostrazione completa e dettagliata, illustrandone poi alcune applicazioni. Farò anche vedere che nel caso delle superfici non orientabili non è possibile ottenere un risultato analogo (intendendo questa volta che vorremmo rappresentare  $F$  come rivestimento ramificato di un  $\mathbf{P}^2$  standard in  $\mathbf{R}^4$ ). Questo risultato negativo dipende dalla struttura del fibrato normale di una superficie non orientabile. Infatti nel caso orientabile il fibrato normale di  $F \subset \mathbf{R}^4$  è sempre banale mentre non è mai banale per  $F$  non orientabile.

Un'altra questione che affronterò riguarda la stabilità dei rivestimenti ramificati. È noto che i rivestimenti ramificati non sono stabili nella classe

delle applicazioni  $C^\infty$ ; infatti, in dimensione due, possiamo perturbare il rivestimento in un intorno di un punto singolare in modo da ottenere una curva di ripiegamento con tre cuspidi (cfr. [41]).

Tuttavia se restringiamo la classe di applicazioni in cui possiamo perturbare il rivestimento, riusciremo ad ottenere alcuni risultati di stabilità. Come vedremo le applicazioni che dovremo considerare sono quelle a jacobiano  $\geq 0$  (oppure  $\leq 0$ ). Questa è una classe di applicazioni abbastanza vasta per poter affermare che il risultato non è banale.

# Capitolo 1

## Nozioni di base

In questo capitolo richiamerò i concetti e i teoremi fondamentali senza soffermarmi sulle dimostrazioni, che si potranno reperire in testi classici cui farò riferimento.

### 1.1. Varietà topologiche

**Definizione 1.1.1.** *Una  $m$ -varietà topologica  $M$  è uno spazio localmente euclideo, cioè ogni punto possiede un'intorno aperto in  $M$  omeomorfo ad un aperto di  $\mathbf{R}^m$ . Richiediamo anche che  $M$  sia di Hausdorff e a base numerabile. Il numero naturale  $m$  si chiama dimensione di  $M$ .*

Se ammettiamo che ogni punto di  $M$  abbia un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di  $\mathbf{R}_+^m \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}^{m-1} \times [0, +\infty)$ , allora parleremo di *varietà con bordo*. In questa situazione più generale l'insieme dei punti di  $M$  che hanno un intorno omeomorfo ad un aperto di  $\mathbf{R}^m$  costituiscono l'*interno* di  $M$ , indicato con  $\text{Int } M$ ; il complementare dell'interno è detto *bordo* ed è indicato col simbolo  $\text{Bd } M$ . Una varietà compatta connessa senza bordo si dice *chiusa*; se è connessa non compatta e senza bordo, la varietà è *aperta*. È facile vedere che  $\text{Int } M$  è una  $m$ -varietà e  $\text{Bd } M$ , se non è vuoto, è una  $(m - 1)$ -varietà ed entrambe non hanno bordo.

Se  $M$  è una varietà topologica (con bordo o senza), si chiama *carta locale* una coppia  $(U, \varphi)$ , dove  $U \subset M$  è un aperto e  $\varphi : U \rightarrow U'$  è

un omeomorfismo con un aperto di  $\mathbf{R}_+^m$ . Una famiglia  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  di carte locali tale che  $\bigcup U_\alpha = M$  si chiama *atlante*. Prese due carte  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$ , l'applicazione  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  è il *cambiamento di carta* o di *coordinate locali*.

Il concetto che sto per definire ci consentirà di introdurre strutture leggermente più fini sulle varietà (come le *strutture differenziabili* e le *strutture p.l.*).

**Definizione 1.1.2 (Pseudogruppi).** *Uno pseudogruppo di omeomorfismi su uno spazio topologico  $X$  è una funzione  $\Gamma$  che associa ad ogni coppia di aperti  $(U, V)$  un insieme (eventualmente vuoto)  $\Gamma(U, V)$  di omeomorfismi  $U \rightarrow V$  che soddisfa le seguenti condizioni:*

- (a)  $f \in \Gamma(U, V)$  e  $g \in \Gamma(V, W) \Rightarrow g \circ f \in \Gamma(U, W)$
- (b)  $f \in \Gamma(U, V) \Rightarrow f^{-1} \in \Gamma(V, U)$
- (c)  $\forall U \subset X$  aperto,  $\text{id}_U \in \Gamma(U, U)$
- (d)  $f \in \Gamma(V, W)$  e  $U \subset V$  è un aperto  $\Rightarrow f|_U \in \Gamma(U, f(U))$
- (e)  $\Gamma$  ha carattere locale, cioè se  $U = \bigcup U_\alpha$  e  $f : U \rightarrow V$  è un omeomorfismo tale che  $f|_{U_\alpha} \in \Gamma(U_\alpha, f(U_\alpha)) \forall \alpha$ , allora  $f \in \Gamma(U, V)$ .

È chiaro che uno pseudogruppo può essere visto anche come un insieme di omeomorfismi tra aperti di  $X$  soddisfacenti ad opportune condizioni (nel seguito descriverò gli pseudogruppi in quest'ottica).

**Esempio 1.1.3 (Omeomorfismi di  $X$ ).** *È chiaro che l'insieme  $\Gamma^0(X)$  costituito da tutti i possibili omeomorfismi tra aperti di  $X$  è uno pseudogruppo. In particolare considereremo  $\Gamma^0(\mathbf{R}^m)$  e  $\Gamma^0(\mathbf{R}_+^m)$ .*

**Esempio 1.1.4 (Diffeomorfismi di  $\mathbf{R}^m$ ).** *Sia  $\Gamma^k(\mathbf{R}^m)$  l'insieme dei diffeomorfismi di classe  $C^k$  tra aperti di  $\mathbf{R}^m$ . Qui  $k$  può assumere*

i valori  $1, 2, \dots, \infty, \omega$  (applicazione di classe  $C^\omega$  significa analitica reale). È chiaro che questi formano un pseudogruppo. Per noi il caso più interessante sarà quando  $k = \infty$ . Un discorso analogo si può fare per  $\mathbf{R}_+^m$ .

**Esempio 1.1.5 (Biomorfismi di  $\mathbf{C}^m$ ).**  $\Gamma^\mathcal{O}(\mathbf{C}^m)$  è lo pseudogruppo dei biomorfismi (cioè diffeomorfismi analitici complessi) tra aperti di  $\mathbf{C}^m$ .

**Esempio 1.1.6 (Omeomorfismi p.l. di  $\mathbf{R}^m$ ).**  $\Gamma^{\text{p.l.}}(\mathbf{R}^m)$  è lo pseudogruppo degli omeomorfismi p.l. (piecewise linear) tra aperti di  $\mathbf{R}^m$ . In generale un'applicazione  $f : U \rightarrow V$  tra aperti di spazi euclidei è p.l. se esistono triangolazioni affini per  $U$  e  $V$  tali che  $f$  manda simplessi in simplessi in modo lineare.

Nell'esempio precedente per *triangolazione affine* di  $U \subset \mathbf{R}^m$  aperto intendo una decomposizione localmente finita del tipo

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i$$

dove i  $\sigma_i$  sono  $m$ -simplessi affini in  $\mathbf{R}^m$  (vedi sezione 1.3) tali che  $\sigma_i \cap \sigma_j$  è vuoto oppure una faccia comune.

L'importanza degli pseudogruppi sta nel fatto che sono in corrispondenza con alcune delle *strutture di base* su uno spazio.

**Definizione 1.1.7 ( $\Gamma$ -strutture).** Se  $M$  è una  $m$ -varietà topologica con (o senza) bordo e  $\Gamma$  è un pseudogruppo di omeomorfismi su  $\mathbf{R}_+^m$ , una  $\Gamma$ -struttura su  $M$  è un atlante  $\mathcal{U}$  in cui tutti i cambiamenti di coordinate appartengono a  $\Gamma$  (queste carte si dicono  $\Gamma$ -compatibili). Richiediamo anche che  $\mathcal{U}$  sia massimale rispetto a questa proprietà.

La massimalità che ho richiesto è una condizione tecnica. In realtà per assegnare una  $\Gamma$ -struttura basta dare un atlante  $\Gamma$ -compatibile. È facile vedere che un tale atlante è contenuto in uno (ed uno solo) massimale.



**Esempio 1.1.8 (Varietà differenziabili).** *Lo pseudogruppo dei diffeomorfismi di classe  $C^k$  di  $\mathbf{R}_+^m$  dà luogo alle strutture differenziabili di classe  $C^k$ . Una varietà differenziabile (con bordo) è una varietà topologica su cui sia fissata una struttura differenziabile. Naturalmente una varietà di classe  $C^k$  può essere considerata anche di classe più bassa.*

Nel seguito verranno prese in considerazione solo le varietà di classe  $C^\infty$ . Questa non è una reale restrizione, infatti vale il

**Teorema 1.1.9 (Whitney).** *Se  $M$  è una varietà differenziabile di classe  $C^1$ , allora esiste un'unica struttura differenziabile di classe  $C^\omega$  (analitica) compatibile con la struttura data.*

Tuttavia esistono varietà topologiche che non ammettono nessuna struttura differenziabile. Questo tipo di patologia non si verifica però in dimensione minore di 4.

**Esempio 1.1.10 (Varietà complesse).** *Lo pseudogruppo  $\Gamma^{\mathcal{O}}(\mathbf{C}^m)$  induce le strutture complesse (olomorfe) sulle varietà. Si intende che nelle carte locali  $\mathbf{R}^{2m}$  va identificato con  $\mathbf{C}^m$  in modo canonico.*

**Esempio 1.1.11 (Varietà p.l.).** *Lo pseudogruppo  $\Gamma^{\text{p.l.}}(\mathbf{R}^m)$  induce le strutture p.l.; una varietà p.l. è una varietà munita di una tale struttura.*

**Esempio 1.1.12 (Varietà orientate).** *Indichiamo con  $\Gamma_+^k(\mathbf{R}_+^m)$  lo pseudogruppo dei diffeomorfismi (omeomorfismi per  $k = 0$ ) tra aperti di  $\mathbf{R}_+^m$  che preservano l'orientazione. La corrispondente struttura è quella di varietà orientata e assegnare un'orientazione su una varietà significa fissare un atlante orientato (cioè compatibile con  $\Gamma_+^k(\mathbf{R}_+^m)$ ). Poiché i biolomorfismi su  $\mathbf{C}^m$  preservano l'orientazione, si ha subito che le varietà complesse hanno un'orientazione naturale. Esistono anche varietà non orientabili (p.e. il piano proiettivo reale).*

Sull'ultimo esempio c'è da dire che l'orientabilità è in realtà una proprietà topologica; quindi se una varietà differenziabile è orientabile in senso  $C^0$ , lo è anche in senso differenziabile. In effetti si può esprimere l'orientabilità in termini di generatori per le omologie locali. L'idea è la seguente: data  $M^m$  connessa senza bordo si definisce la nozione di orientazione locale in un punto  $p \in M$  come un generatore  $\mu_p \in H_m(M, M - \{p\}) \cong \mathbb{Z}$ . Allora  $M$  è orientabile se è possibile scegliere le orientazioni locali in tutti i punti in modo coerente. Questo vuol dire che  $\forall p, q \in M \exists h_t : M \rightarrow M$  isotopia d'ambiente con  $h_1(p) = q$  tale che  $h_{1*} : H_m(M, M - \{p\}) \rightarrow H_m(M, M - \{q\})$  manda  $\mu_p$  in  $\mu_q$ . Nel caso con bordo  $M$  è orientabile se lo è l'interno. Nel caso non connesso si applica la definizione alle componenti.

Se  $M$  è compatta e connessa, il fatto che sia orientabile implica che  $H_m(M, \text{Bd } M) \cong \mathbb{Z}$  e un'orientazione corrisponde ad un generatore  $\mu$  per questo guppo; chiameremo  $\mu$  *classe fondamentale* di  $M$ . Se  $M$  è compatta connessa e non orientabile avremo invece  $H_m(M, \text{Bd } M) \cong 0$ . Per i dettagli si rimanda a testi classici sull'omologia (p.e. [39, 29]).

## 1.2. Sottovarietà

**Definizione 1.2.1 (Sottovarietà topologiche).** *Data  $M$  varietà topologica, una sottovarietà topologica è un sottospazio  $N \subset M$  che sia lui stesso una varietà con  $\text{Bd } N \subset \text{Bd } M$ .  $N$  è localmente piatta se  $\forall p \in N \exists W$  intorno di  $p$  in  $M$  tale che la coppia  $(W, W \cap N)$  sia omeomorfa alla coppia  $(\mathbf{B}^m, \mathbf{B}^n)$ , dove  $m = \dim M$  e  $n = \dim N$ .*

Nel caso differenziabile si dà una definizione analoga e si richiede sempre che  $N$  sia localmente piatta in senso differenziabile (l'omeomorfismo di coppie sarà ora un diffeomorfismo); in questo modo una struttura differenziabile naturale viene indotta su  $N$ . Analogo discorso nel caso

analitico. Nel caso p.l., invece, richiediamo che  $N$  sia una varietà p.l. e anche un sottopoliedro di  $M$ . Questo tuttavia non implica localmente piatto.

### 1.3. Complessi cellulari e simpliciali

In questa sezione richiamerò velocemente le definizioni ed i risultati principali relativi ai complessi. Per una presentazione completa della teoria si rimanda a testi classici (p.e. [14] e [40]).

**Definizione 1.3.1.** *Se  $X$  è uno spazio topologico,  $f : \text{Bd } \mathbf{B}^i \rightarrow X$  un'applicazione continua e  $X' = \mathbf{B}^i \sqcup X / y \sim f(y) \quad \forall y \in \text{Bd } \mathbf{B}^i$  diremo che  $X'$  è ottenuto da  $X$  aggiungendo una  $i$ -cella. Si hanno immersioni canoniche di  $\text{Int } \mathbf{B}^i$  e di  $X$  in  $X'$  (restringendo la proiezione dell'unione topologica sul quoziente).*

**Definizione 1.3.2 (Complessi cellulari).** *Un complesso cellulare (finito)  $X$  di dimensione  $n$  è uno spazio topologico che si rappresenta come unione di sottospazi  $X = \bigcup_{i=0, \dots, n} X_i$ , dove  $X_i$  si ottiene incollando delle  $i$ -celle (tra loro disgiunte ed in numero finito, eventualmente anche zero se  $i < n$ ) ad  $X_{i-1}$ .  $X_0$  è un insieme finito (e non vuoto) di punti.*

Nella definizione precedente il sottospazio  $X_i$  è detto  $i$ -scheletro di  $X$ .

Un complesso di dimensione uno si chiama anche *grafo*. Dato un grafo finito (cioè formato da un numero finito di celle), un *albero* è un sottografo contraibile. Per *albero massimale* intenderemo un albero che sia massimale rispetto all'inclusione.

**Definizione 1.3.3 (Applicazioni cellulari).** *Un'applicazione continua  $f : X \rightarrow Y$  tra complessi cellulari è detta cellulare se  $f(X_i) \subset Y_i, \forall i$ .*

Il teorema seguente è uno strumento basilare per lo studio della topologia dei complessi.

**Teorema 1.3.4 (Approssimazione cellulare).** *Ogni applicazione continua tra complessi cellulari è omotopa ad un'applicazione cellulare.*

**Definizione 1.3.5 (Complessi simpliciali).** *Un complesso simpliciale è un complesso cellulare in cui le applicazioni d'incollamento  $\varphi : \text{Bd } \Delta^i \rightarrow X_{i-1}$  sono cellulari, mandano celle in celle e sono lineari sulle facce.*

In questa definizione,  $\Delta^n$  è l'*n*-simpleso standard in  $\mathbf{R}^n$  (cioè l'involuppo convesso di  $n + 1$  punti in posizione generale). È sottinteso l'omeomorfismo  $\Delta^n \cong \mathbf{B}^n$ ; è sottintesa anche una decomposizione cellulare standard di  $\Delta^n$ , in cui le celle sono le facce affini incollate in modo ovvio.

**Definizione 1.3.6 (Applicazioni simpliciali).** *Un'applicazione continua tra complessi simpliciali è detta simpliciale se è cellulare e manda simplessi in simplessi in modo lineare (affine).*

Esiste anche una versione simpliciale del teorema 1.3.4.

**Teorema 1.3.7 (Approssimazione simpliciale).** *Ogni applicazione continua tra complessi simpliciali è omotopa ad un'applicazione simpliciale, a meno di suddividere il dominio.*

**Definizione 1.3.8 (Sottocomplessi).** *Se  $X$  è un complesso cellulare, un sottocomplesso è un sottospazio  $Y$  che sia unione di celle di  $X$ . In modo analogo si definiscono i sottocomplessi nel caso simpliciale.*

Naturalmente un sottocomplesso di un complesso cellulare (simpliciale) è a sua volta un complesso cellulare (risp. simpliciale).

Una coppia cellulare è una coppia di spazi  $(X, Y)$ , dove  $X$  è un complesso cellulare (o simpliciale) e  $Y$  è un sottocomplesso. Esiste anche una versione relativa dei teoremi 1.3.4 e 1.3.7, in base alla quale se l'applicazione è già cellulare sul sottocomplesso, l'omotopia può essere scelta relativa al sottocomplesso; analogo discorso vale nel caso simpliciale.

In un complesso simpliciale, ogni semplice possiede una sua struttura affine. Quindi dentro ciascun semplice possiamo fare tutte le operazioni che ha senso effettuare in un semplice standard contenuto in uno spazio affine. In particolare possiamo parlare di segmenti o di sottoinsiemi convessi o prendere la chiusura convessa di un sottoinsieme del semplice.

**Definizione 1.3.9 (Star di un insieme).** *Sia  $X$  un complesso simpliciale ed  $L \subset X$  un sottoinsieme. Lo star di  $L$ , indicato con  $\text{st}(L)$ , è l'unione di tutte le celle che incontrano  $L$ . Questo è un sottocomplesso.*

*Si definisce anche lo star di  $L$  rispetto ad un punto  $a \in X$  tale che  $L \subset \text{st}(a)$  come*

$$\text{st}(L, a) = \bigcup_{x \in L} \overline{ax}$$

*dove  $\overline{ax}$  è il segmento che congiunge  $a$  con  $x$  (in un opportuno semplice).*

Data una varietà p.l.  $M^n$  chiameremo *poligonazione combinatorica* una poligonazione  $X$  compatibile con la struttura p.l. tale che  $\text{st}(\sigma) \cong \mathbf{B}^n$  per ogni cella  $\sigma$  di  $X$ ; s'intende che l'omeomorfismo dev'essere p.l.

Ad una poligonazione combinatorica  $X$  possiamo associare la poligonazione duale  $X^*$  in cui ogni  $k$ -cella è in corrispondenza con una  $(n-k)$ -cella di  $X$ . Per definirla procediamo nel modo seguente: le 0-celle di  $X^*$  sono i baricentri delle  $n$ -celle di  $X$ ; le  $i$ -celle per  $i > 0$  si costruiscono induttivamente prendendo per ogni  $(n-i)$ -cella  $\sigma$  di  $X$ , l'insieme  $\text{st}(L, a)$ , dove  $a$  è il baricentro di  $\sigma$  e  $L$  è l'unione delle  $(i-1)$ -celle di  $X^*$  (che ho già costruito) contenute in  $\text{st}(a)$ . Per induzione si vede che

$\text{st}(L, a)$  è una  $i$ -cella detta *duale* di  $\sigma$  e la indicheremo con  $\sigma^*$ . Poniamo quindi  $X_i^* = \cup \sigma^*$  al variare di  $\sigma$  tra le  $(n - i)$ -celle di  $X$ .

Dalla costruzione segue che  $X^*$  è una poligonazione combinatorica di  $M$  e che per ogni  $\sigma$   $i$ -cella di  $X$ ,  $\sigma^*$  incontra trasversalmente  $\sigma$  in un solo punto che è il baricentro comune. Per concludere questo discorso, di cui ci serviremo più avanti, accenno solo al fatto che considerando le poligonazioni duali è possibile stabilire delle relazioni tra l'omologia e la coomologia singolare di una varietà chiusa. Il risultato è noto come *dualità di Poincaré* ed è di grandissima importanza per lo studio delle varietà.

**Teorema 1.3.10 (Dualità di Poincaré).** *Se  $M$  è una  $n$ -varietà p.l. chiusa orientata, esiste un isomorfismo naturale  $H_i(M) \rightarrow H^{n-i}(M)$ .*

Per un quadro completo su questi argomenti si veda p.e. [34, 39].

## 1.4. Decomposizioni a manici

In questa sezione vedremo una tecnica molto utilizzata per rappresentare le varietà. Per i dettagli si veda [26, 16].

Per  $k$ -manico di dimensione  $n$ ,  $0 \leq k \leq n$ , intenderemo uno spazio  $H^k$  omeomorfo a  $\mathbf{B}^k \times \mathbf{B}^{n-k}$ . Considereremo anche  $\mathbf{B}^k \times \mathbf{B}^{n-k}$  con la sua struttura p.l. naturale o anche con la struttura differenziabile ottenuta allisciando gli spigoli (in modo che diventi diffeomorfo a  $\mathbf{B}^n$ ).

Data una varietà con bordo  $W^n$  potremo costruire un'altra varietà  $T$  della stessa dimensione incollando un  $k$ -manico. Quest'operazione si realizza nel modo seguente: si prende un'immersione  $s : \text{Bd } \mathbf{B}^k \times \mathbf{B}^{n-k} \rightarrow \text{Bd } W$  e si pone  $T = W \cup_s \mathbf{B}^k \times \mathbf{B}^{n-k}$  (in generale incollare due spazi  $X$  e  $Y$  lungo un sottospazio  $Z \subset X$  mediante  $s : Z \rightarrow Y$  significa prendere lo spazio  $X \cup_s Y \stackrel{\text{def}}{=} X \sqcup Y / z \sim s(z) \quad \forall z \in Z$ ). Nel caso p.l.,  $T$  avrà una struttura p.l. indotta da  $W$  se  $s$  è un'immersione p.l.

Nel caso differenziabile, non basta assumere  $s$  immersione differenziabile regolare per avere una struttura liscia su  $T$ , ma bisogna *allisciare* gli spigoli. Comunque quest'operazione può essere realizzata in modo unico a meno di diffeomorfismi (vedi [26]).

**Definizione 1.4.1 (Funzioni di Morse).** *Data  $M$  varietà differenziabile, diremo che una funzione  $C^\infty f : M \rightarrow \mathbf{R}$  è di Morse se (1)  $f$  è regolare in un intorno del bordo e (2)  $df$ , come sezione del fibrato cotangente a  $M$ , è trasversale alla sezione nulla.*

È chiaro dalla definizione che una funzione di Morse avrà solo punti critici isolati. In coordinate locali, una funzione  $f$  è di Morse se e solo se la matrice hessiana  $Hf$  ha rango massimo in ogni punto critico. Il numero degli autovalori negativi di  $Hf$  in un punto critico, è detto *indice* del punto critico stesso. Il teorema seguente garantisce l'esistenza di funzioni di Morse.

**Teorema 1.4.2 ([26]).** *Su ogni varietà differenziabile compatta  $M$  esiste una funzione di Morse  $f$  tale che  $f(\text{Bd } M) = -1$  e  $f(p_i) = i$  per ogni  $p_i$  punto critico di indice  $i$ . Inoltre l'insieme delle funzioni di Morse è un aperto denso in  $C^\infty(M)$ .*

Questo teorema è esattamente lo strumento che serve per dimostrare il teorema 1.4.3 seguente che è uno dei risultati più importanti di topologia differenziale.

**Teorema 1.4.3 (Decomposizione a manici).** *Ogni varietà differenziabile compatta connessa  $M^n$  ammette una presentazione del tipo  $M = W^0 \cup W^1 \cup W^2 \cup \dots \cup W^n$ , dove  $W^i$  è ottenuto da  $W^{i-1}$  incollando un numero finito di  $i$ -manici per  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $W^0$  è unione disgiunta di bocce.*

Da questo teorema segue in particolare che ogni varietà differenziabile compatta ha il tipo d'omotopia di un complesso cellulare finito. Si ottiene l'equivalenza omotopica deformando ciascun  $i$ -manico nel proprio centro, ottenendo in corrispondenza una  $i$ -cella (per *centro* di un  $i$ -manico s'intende il disco  $\mathbf{B}^i \times \{0\} \subset \mathbf{B}^i \times \mathbf{B}^{n-i}$ ).



## Capitolo 2

### Stabilità dei rivestimenti ramificati

In questo capitolo descriverò in dettaglio le proprietà fondamentali dei rivestimenti ramificati, presentando teoremi di stabilità (in un senso che verrà precisato) sui rivestimenti semplici. Per maggiori dettagli sulla teoria della stabilità di mappe differenziabili si rimanda a [28, 41, 13].

#### 2.1. Rivestimenti ramificati

**Definizione 2.1.1.** *Un'applicazione  $f : M \rightarrow N$  tra varietà con bordo è detta propria se  $f(\text{Bd } M) \subset \text{Bd } N$  e  $f(\text{Int } M) \subset \text{Int } N$ .*

**Osservazione 2.1.2.** *In topologia generale un'applicazione  $f : X \rightarrow Y$  è propria se  $f^{-1}(K)$  è compatto per ogni sottospazio compatto  $K \subset Y$ . Le applicazioni continue che noi consideriamo sono proprie in questo senso poiché limiteremo la nostra attenzione alle varietà compatte.*

**Definizione 2.1.3.** *Un rivestimento ramificato  $p : M \rightarrow N$  è un'applicazione p.l. e propria tra due varietà compatte della stessa dimensione tale che la sua restrizione al complementare di un sottocomplesso di  $M$  di codimensione 2 è un rivestimento ordinario finito. L'insieme  $L$  costituito dai punti di  $M$  in cui  $p$  non è un omeomorfismo locale, è l'insieme singolare di  $p$ ; l'insieme  $B = p(L) \subset N$  è l'insieme di ramificazione e  $\tilde{L} = p^{-1}(B) - L$  è l'insieme pseudosingolare.*

Nella definizione precedente accadrà pertanto che

$$p| : M - p^{-1}(B) \longrightarrow N - B$$

è un rivestimento ordinario.

Si può provare che nei punti in cui  $B$  è localmente piatto in  $N$ , il rivestimento ammette un modello locale del tipo

$$\begin{aligned} p : \mathbf{B}^{m-2} \times \mathbf{B}^2 &\longrightarrow \mathbf{B}^{m-2} \times \mathbf{B}^2 \\ (w, z) &\longmapsto (w, z^k). \end{aligned}$$

In questo caso il numero  $k$  si chiama *grado locale* di  $p$  ed è un invariante topologico del rivestimento. Il fattore  $\mathbf{B}^{m-2}$  parametrizza localmente  $B$  e il  $\mathbf{B}^2$  è la fibra del fibrato normale; il suo bordo  $\mathbf{S}^1$  corrisponde ad un cappio (*meridiano*) che gira intorno a  $B$ ; pertanto il numero naturale  $k$  conta i giri che il rivestimento fa localmente intorno a  $B$  ed è costante sulle componenti connesse della parte localmente piatta di  $B$  stesso.

Ad un rivestimento ramificato si può far corrispondere la *monodromia* del rivestimento ordinario associato. Questa sarà un omomorfismo

$$\rho : \pi_1(N - B, *) \longrightarrow \Sigma_d$$

che a  $[\omega] \in \pi_1(N - B, *)$  fa corrispondere la permutazione della fibra sopra  $*$  ottenuta sollevando  $\omega$ . Quindi la permutazione assocerà ad un punto  $x \in p^{-1}(*)$  il punto  $\tilde{\omega}(1)$ , dove  $\tilde{\omega} : [0, 1] \rightarrow M - \tilde{L}$  è l'unico sollevamento di  $\omega$  tale che  $\tilde{\omega}(0) = x$ . Nel seguito sottintenderò la scelta del punto base. Assumiamo anche di aver numerato (in un modo qualunque) la fibra sopra il punto base stesso, così da poter utilizzare il gruppo delle permutazioni dell'insieme  $\{1, \dots, d\}$ . Il numero  $d$  è il *grado del rivestimento*. Diremo che il rivestimento è *semplice* se  $\#p^{-1}(y) \geq d - 1 \quad \forall y \in N$ . Per i rivestimenti semplici, la monodromia di un meridiano qualunque è una trasposizione.

Dati  $N$ ,  $B$  e  $\rho$  è possibile ricostruire il rivestimento. Per provare questo diamo prima la definizione seguente.

**Definizione 2.1.4 (Complessi di spezzamento).** *Un complesso di spezzamento per  $B$  è un sottocomplesso  $K \subset N$  tale che  $B \subset K$ ,  $N - K$  è connesso per archi e la monodromia è banale su  $N - K$ .*

Esistono sempre complessi di spezzamento relativi a qualunque insieme di ramificazione e a qualunque monodromia  $\rho$ . Per vederlo consideriamo una triangolazione  $X$  di  $N$  (per cui  $B$  sia sottocomplesso). La decomposizione duale  $X^*$  avrà come 1-scheletro un grafo finito trasversale a  $X_{n-1}$  ed un albero massimale  $A \subset X_1^*$  ci dà un modo per connettere le  $n$ -celle di  $X$ . Il nostro  $K$  sarà formato dalle  $(n-1)$ -celle di  $X$  che non incontrano  $A$ . Così avremo  $B \subset X_{n-2} \subset K$  e  $N - K$  contraibile.

Vediamo ora come si ricostruisce  $p$  a partire da  $N$ ,  $B$  e  $\rho$ . Intanto si prende un complesso di spezzamento  $K$  per  $B$  e si taglia  $N$  lungo  $K$ , cioè si prende  $N' = \text{Cl}(N - W)$  dove  $W$  è un intorno regolare di  $K$  mod.  $B$  (cioè  $B$  sta sulla frontiera di  $W$ ).

Il  $\pi_1(N - B)$  sarà generato da certi meridiani (orientati)  $\mu_1, \dots, \mu_s$  trasversali a  $K$ , che fanno un giro intorno a  $B$  e che incontrano geometricamente le  $(n-1)$ -celle di  $K$  al più una volta sola, con i quali potremo dare un segno alle  $(n-1)$ -celle di  $N' \cap W$  (una cella  $\sigma$  sarà negativa se  $N' \cap \mu_j$ , che è un arco orientato, ha l'origine in  $\sigma$ , per un opportuno  $j$ ; sarà positiva in caso contrario). Naturalmente per ogni cella positiva ce ne sarà una negativa (le celle corrispondenti erano identificate prima di tagliare).

Si considerino ora  $d$  copie disgiunte di  $N'$ ,  $N'_1, \dots, N'_d$  numerate da 1 a  $d$  (ognuna di esse avrà celle negative e positive come precisato sopra); mediante la monodromia incolliamo una faccia positiva  $\sigma$  di  $N'_i$  con quella

negativa corrispondente di  $N'_{\rho(\mu_l)(i)}$  se  $\mu_l$  è il meridiano che dà il segno a  $\sigma$ .

Dopo aver fatto tutte le identificazioni si ottiene un complesso  $M$  ed una proiezione  $p : M \rightarrow N$  che soddisfa le condizioni richieste all'inizio. Tuttavia in generale non è detto che  $M$  sia una varietà ma sarà solo un complesso simpliciale. Se però poniamo qualche condizione restrittiva sui dati iniziali (p.e.  $B$  localmente piatto),  $M$  sarà automaticamente una varietà p.l. (cfr. [32, 31]).

## 2.2. Mappe stabili

**Definizione 2.2.1 ( $K$ -omotopie).** *Siano  $f_t : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  un'omotopia di classe  $C^k$  con  $U \subset \mathbf{R}^n$  aperto,  $K \subset U$  un compatto e  $\delta > 0$ . Diciamo che  $f_t$  è una  $K$ -omotopia di ampiezza  $\delta$  se  $f_t(x) = f_0(x)$  fuori da  $K$  e  $\|f_t(x) - f_0(x)\| < \delta \forall x \in K$  e  $\forall t$ .*

**Definizione 2.2.2 (Applicazioni  $\varepsilon$ -equivalenti).** *Due applicazioni  $f, g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  sono  $\varepsilon$ -equivalenti se esistono diffeomorfismi a supporto compatto  $\varphi : U \rightarrow U$  e  $\psi : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$  tali che  $\psi \circ f = g \circ \varphi$ ,  $\|\varphi - \text{id}_U\| < \varepsilon$  e  $\|\psi - \text{id}_{\mathbf{R}^m}\| < \varepsilon$ .*

La norma che compare in quest'ultima definizione è la norma della convergenza uniforme.

**Definizione 2.2.3 (Stabilità relativa).** *Sia  $\mathcal{F} \subset C^k(U, \mathbf{R}^m)$  un insieme di applicazioni, con  $k \geq 1$  e  $U \subset \mathbf{R}^n$  aperto. Diremo che  $f \in \mathcal{F}$  è stabile in  $\mathcal{F}$  se  $\forall \varepsilon > 0$  e  $\forall K \subset U$  compatto  $\exists \delta > 0$  tale che  $\forall f_t \in \mathcal{F}$  ( $t \in [-1, 1]$ )  $K$ -omotopia di ampiezza  $\delta$  si ha che  $f_t$  è  $\varepsilon$ -equivalente ad  $f$ .*

Nel seguito  $C_+^k(M, N)$  indicherà l'insieme delle applicazioni  $f$  di classe  $C^k$  tra due varietà orientate della stessa dimensione con la proprietà che  $f$  preserva l'orientazione nei punti in cui è regolare.

La definizione 2.2.3 si generalizza al caso di applicazioni differenziabili tra varietà usando le coordinate locali.

**Lemma 2.2.4.** *La funzione complessa  $f(z) = z^2$  è stabile in  $C_+^k$ ,  $k \geq 2$ .*

Da questo lemma segue subito il corollario seguente.

**Corollario 2.2.5 (Stabilità dei rivestimenti).** *I rivestimenti ramificati semplici orientati tra superfici orientate sono stabili nella classe  $C_+^k$ ,  $k \geq 2$ .*

Quest'ultimo fatto non è ovvio in quanto i rivestimenti ramificati non sono stabili nella classe di tutte le applicazioni differenziabili (le singolarità stabili in dimensione due sono state classificate da Whitney e sono le curve di ripiegamento e le cuspidi, vedi [41]).

*Dimostrazione di 2.2.4.* La  $f$  in notazione reale si scrive nella forma  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ . La matrice jacobiana sarà

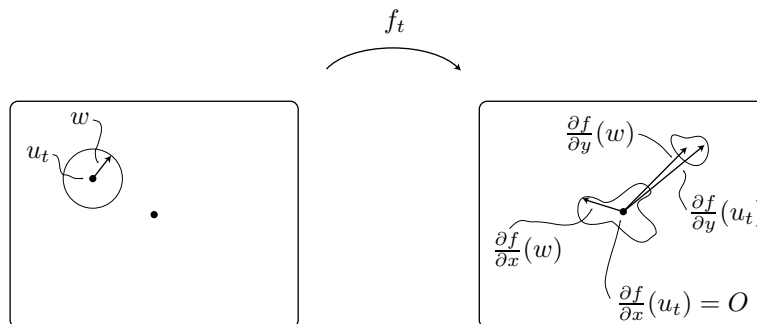
$$Df = 2 \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Prendiamo una perturbazione  $f_t$  che coincida con  $f$  fuori da un intorno di 0 e tale che  $f_0 = f$ ; dovremo dimostrare che  $f_t$  è  $\varepsilon$ -equivalente ad  $f$  per  $t$  abbastanza piccolo. Per fare questo osserviamo che  $\frac{\partial f_t}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f_t}{\partial y}$  come applicazioni  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  sono diffeomorfismi per  $t = 0$  e quindi lo saranno anche per  $|t| < \delta$  ( $\delta$  opportuno); ne consegue che  $\exists!$   $u_t, v_t \in \mathbf{R}^2$  tali che

$$\frac{\partial f_t}{\partial x}(u_t) = \frac{\partial f_t}{\partial y}(v_t) = 0.$$

Proviamo ora che  $u_t = v_t$ ; infatti se così non fosse, ragionando per assurdo, avremo  $\frac{\partial f}{\partial y}(u_t) \neq 0$  (perchè  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ha un'unico zero che è  $v_t$ ). Prendiamo un punto  $w$  vicino a  $u_t$ ; facendolo girare intorno a  $u_t$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(w)$  farà

un giro completo intorno a 0 mentre  $\frac{\partial f}{\partial y}(w)$  potrà ruotare solo di un angolo arbitrariamente piccolo (vedi figura 2.1). Ne consegue che è possibile



**Figura 2.1.** Quando  $w$  ruota attorno a  $u_t$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(w)$  gira attorno ad  $O$  di  $360^\circ$  mentre  $\frac{\partial f}{\partial y}(w)$  può ruotare solo di un angolo piccolo.

scegliere  $w$  in modo che  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(w), \frac{\partial f}{\partial y}(w) \right\}$  sia una base negativa per  $\mathbf{R}^2$ ; quindi lo jacobiano di  $f_t$  in  $w$  è negativo, ma questa è una contraddizione.

In conclusione  $f_t$  ha un'unico punto singolare per  $|t| < \delta$  e il rango è zero; poiché il grado si deve preservare,  $f_t^{-1}(f_t(u_t)) = \{u_t\}$ . Da ciò segue che  $f_t$  è un rivestimento ramificato semplice (cfr. [1]) e per  $\delta$  abbastanza piccolo sarà anche  $\varepsilon$ -equivalente ad  $f$ .  $\square$

A questo punto ci si può chiedere se del corollario 2.2.5 sia vero anche l'inverso, perché se così fosse avremo una caratterizzazione dei rivestimenti semplici.

**Problema 2.2.6 (Caratterizzazione dei rivestimenti).** È vero che un'applicazione differenziabile  $p : M^2 \rightarrow N^2$  di classe  $C^{k \geq 2}$  tra superfici orientate è un rivestimento ramificato semplice orientato se e solo se è stabile in  $C_+^k$ ?

Il "solo se" è precisamente il corollario 2.2.5. Il problema è quindi capire se la stabilità implica il fatto di essere un rivestimento. Un risultato parziale verso una possibile dimostrazione è però il seguente.

**Lemma 2.2.7.** *Se  $f \in C_+^{k \geq 2}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$  è stabile in questa classe, allora tutti i suoi punti singolari hanno rango 0.*

Naturalmente questo non basta per dare risposta al problema 2.2.6 perché sappiamo poco sulla topologia dell'insieme singolare. *La risposta dovrebbe essere affermativa se e solo se questo insieme è finito.*

*Dimostrazione di 2.2.7.* Ragioniamo per assurdo e supponiamo che ci sia un punto critico di rango 1. Per il lemma 2.2 del capitolo 5 di [28], possiamo scegliere coordinate locali rispetto a cui  $f$  si scrive nella forma  $f(x, y) = (x, g(x, y))$ , dove  $g$  è una funzione opportuna che soddisfa

$$\frac{\partial g}{\partial y} \geq 0.$$

La perturbazione  $f_t(x, y) = (x, g(x, y) + t^2 y)$  ha matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} + t^2 \end{pmatrix}$$

ed il determinante è maggiore di 0 per  $t \neq 0$ ; pertanto appena perturbo la  $f$ , il punto singolare di rango 1 sparisce e nessuna  $f_t$  potrà essere  $\varepsilon$ -equivalente ad  $f$  per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo. Si ha quindi una contraddizione.  $\square$

Un'ultima osservazione è la seguente: in dimensione maggiore si possono estendere facilmente le cose che ho detto assumendo che l'insieme di ramificazione  $B$  sia localmente piatto ed utilizzando il modello locale che ho richiamato all'inizio del capitolo. Nelle dimostrazioni ci si servirà della trasversalità delle fibre nel fibrato normale a  $B$ , che è a sua volta una proprietà stabile.

# Capitolo 3

## Superfici in $\mathbf{R}^4$

In questo capitolo verranno prese in considerazione le superfici chiuse lisce oppure p.l. e localmente piatte immerse in  $\mathbf{S}^4$ . Quando sarà utile potremo pensare anche alla superficie immersa in  $\mathbf{R}^4$ , essendo  $\mathbf{S}^4 \cong \mathbf{R}^4 \cup \{\infty\}$ . Questo non cambia le classi di isotopia delle superfici, poiché le isotopie avvengono in dimensione tre ( $= \dim(F \times I)$ ), dentro una varietà di dimensione quattro, permettendoci di evitare il punto all'infinito.

### 3.1. Immersioni locali in $\mathbf{R}^m$

Le classi di *omotopia regolare* di immersioni locali  $M^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  di una  $n$ -varietà chiusa sono state studiate da Smale e da Hirsch (vedi [15, 27, 37, 38]). Per  $n$  pari e  $m = 2n$  il teorema si può enunciare nella seguente forma.

**Teorema 3.1.1 (Classificazione delle immersioni, [15]).** *Le classi di omotopia regolare di immersioni locali  $M^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{4n}$  sono classificate dal fibrato normale. Più precisamente c'è una corrispondenza biunivoca con le classi di equivalenza dei  $2n$ -fibrati vettoriali  $\nu$  su  $M$  tali che  $\nu \oplus \tau_M \cong \varepsilon^{4n}$ , essendo  $\tau_M$  il fibrato tangente di  $M$  ed  $\varepsilon^{4n}$  il fibrato banale. Questa corrispondenza si ottiene associando ad una classe di omotopia regolare  $[f]$  la classe di equivalenza del fibrato normale a  $f(M)$ .*



Poiché le superfici chiuse orientabili immerse in  $\mathbf{R}^4$  hanno fibrato normale banale (vedi p.e. [25], teorema 2 pag. 49), dal teorema 3.1.1 segue il

**Corollario 3.1.2.** *Ogni immersione liscia di una superficie chiusa orientabile in  $\mathbf{R}^4$  è equivalente a quella banale a meno di omotopia regolare.*

### 3.2. Superfici come rivestimenti ramificati

In questa sezione descriverò una tecnica per rappresentare le superfici chiuse orientabili in  $\mathbf{R}^4$ . Il risultato principale sarà il teorema 3.2.5, analogo bidimensionale di un risultato classico (teorema 3.2.3).

**Definizione 3.2.1.** *Un link in una 3-varietà  $M$  è una curva compatta p.l. (o liscia) immersa in  $\text{Int } M$ . Un link connesso è detto nodo.*

**Definizione 3.2.2 (Trecce chiuse).** *Una treccia chiusa è un link orientato in  $\mathbf{R}^3 - \text{asse } z$  tale che la proiezione su  $\mathbf{S}^1$  sia un rivestimento orientato.*

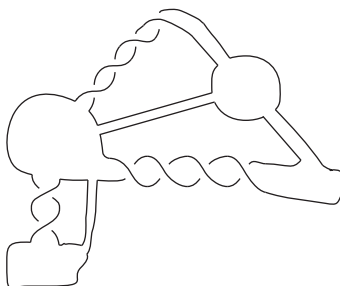
**Teorema 3.2.3 (Alexander).** *Ogni link in  $\mathbf{R}^3$  è equivalente ad una treccia chiusa.*

La dimostrazione originale di questo teorema (che si può trovare in [3]) consiste nel prendere un rappresentante poligonale del link in posizione generale rispetto all'asse  $z$  (che sarà l'asse della treccia) e nel dare un segno (+/−) ai lati a seconda che vengano proiettati su  $\mathbf{S}^1$  preservando od invertendo l'orientazione. A questo punto si eliminano uno per uno i lati negativi. Alla fine si ottiene la treccia chiusa.

Anzichè descrivere i dettagli di questa dimostrazione, ne presenterò un'altra che ci sarà utile anche nel caso bidimensionale. Quella che esporrò è dovuta in sostanza a Rudolph [35].

*Dimostrazione di 3.2.3.* Sia  $L \subset \mathbf{R}^3$  il nostro link ed  $F$  una superficie di Seifert (vedi [33]). Poiché  $F$  è una superficie orientata con bordo, può essere rappresentata mediante un certo numero di dischi sovrapposti che si proiettano su  $\mathbf{R}^2$  preservando l'orientazione con delle bande (1-manici) incollate in modo orientabile (per fare questo basta deformare a meno di isotopia gli 0- e gli 1-manici di  $F$ , a partire dal bordo verso i loro centri, ottenendo dei discolini con tante striscioline; quindi si mettono uno sopra l'altro i dischi in modo che vengano proiettati su uno stesso disco in  $\mathbf{R}^2$  preservando l'orientazione).

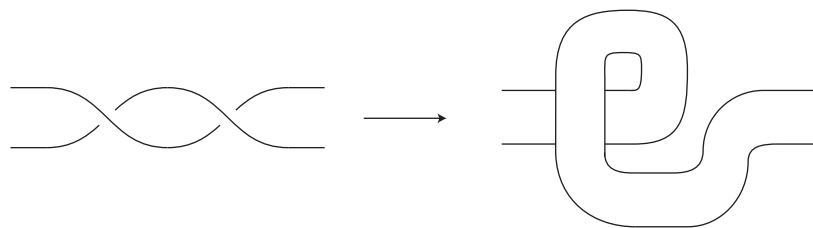
Le bande potranno fare degli avvitamenti (figura 3.1) che saranno in numero pari per l'orientabilità.



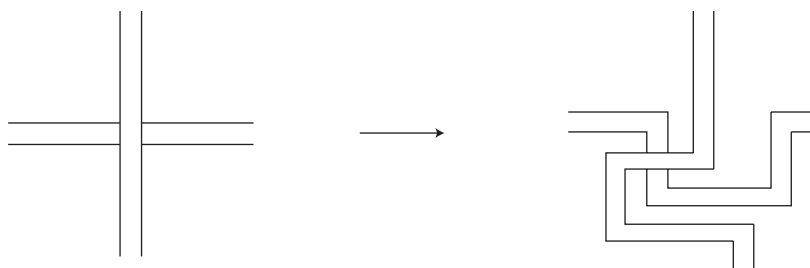
**Figura 3.1.** Dischi e bande.

Gli avvitamenti si possono trasformare a due a due in giri (tipo tor-nanti) in modo che la proiezione su  $\mathbf{R}^2$  sia regolare come in figura 3.2.

Adesso i dischi e le bande possono essere sostituiti con rettangoli e bande poligonali, con i lati paralleli agli assi  $x$  e  $y$  in  $\mathbf{R}^3$ . Possiamo anche assumere che in ogni incrocio siano sempre le bande verticali a passare sotto (figura 3.3) e che le bande siano attaccate ai rettangoli sempre dalla stessa parte come in figura 3.4. Supponiamo inoltre che ad ogni banda verticale siano attaccate solo due bande orizzontali agli estremi.



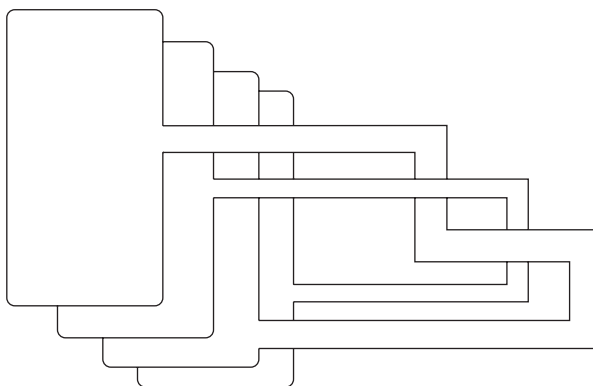
**Figura 3.2.** Gli avvitamenti si possono modificare con un movimento locale (il resto della superficie rimane fermo durante l'isotopia). Con una simmetria rispetto ad un piano si ottengono gli avvitamenti nell'altro verso.



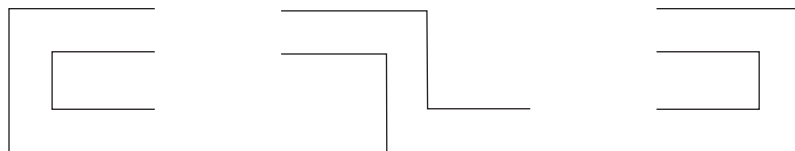
**Figura 3.3.** Le bande verticali passano sotto. Nasceranno nuove bande orizzontali e verticali.

Cercheremo di eliminare i tratti verticali. Per fare questo, prima disponiamo le bande verticali a distanze diverse dai lati di incollamento, in modo che si proiettino su bande disgiunte (figura 3.4); a questo punto le bande verticali si possono distinguere in tre tipi a seconda di come sono attaccate quelle orizzontali (vedi figura 3.5).

Adesso siamo pronti ad eliminare le bande verticali. Le elimineremo una per una a partire da quella più vicina ai rettangoli. Se la prima banda che incontriamo è un minimo possiamo facilmente portarlo sotto tutti i rettangoli, espanderlo e trasformare lui stesso in un rettangolo. Se si tratta di un flesso lo portiamo sotto come prima e lo espandiamo. Uno dei due tratti orizzontali a cui è attaccato diventerà ora una banda che connette due diversi rettangoli e che può essere facilmente trasformata in un mezzo avvitamento. Se invece è un massimo distinguiamo due casi:



**Figura 3.4.** Disposizione generica delle bande



**Figura 3.5.** Le bande verticali di questi tre tipi corrispondono ai minimi, punti di flesso e massimi per la proiezione delle curve centrali.

(1) il manico parte da un rettangolo e finisce in un rettangolo diverso. In tal caso lo si “stira” in modo che diventi un mezzo avvitamento che connette i due rettangoli. (2) Viceversa il manico parte e termina nello stesso rettangolo. In questo caso basta portare il tratto verticale sotto tutti i rettangoli (con un’isotopia che non rovesci l’orientazione della proiezione). I due tratti orizzontali diventeranno due bande che connettono due rettangoli; con uno “stiramento” diventeranno, come prima, due mezzi avvitamenti. In questo modo si va avanti e si eliminano anche gli altri tratti verticali. Il risultato finale sarà una superficie formata da tanti rettangoli sovrapposti connessi da bande ognuna delle quali farà un mezzo avvitamento. Il bordo è una treccia chiusa.  $\square$

Il concetto di treccia chiusa ed il teorema di Alexander che ho appena dimostrato hanno trovato numerose applicazioni nello studio dei nodi

e dei link in  $\mathbf{R}^3$ , nonché nello studio delle 3-varietà come rivestimenti ramificati di  $\mathbf{S}^3$ . La generalizzazione cui ho accennato nell'introduzione si può formulare nel modo seguente. Assumeremo sempre che le sottovarietà siano localmente piatte.

**Definizione 3.2.4 (2-trecce chiuse).** *Sia  $W \subset \mathbf{R}^4$  un intorno tubolare di  $\mathbf{S}^2$  e  $p : W \rightarrow \mathbf{S}^2$  la proiezione. Una 2-treccia chiusa è una superficie chiusa  $F \subset W$  (anche con più di una componente) tale  $p|_F : F \rightarrow \mathbf{S}^2$  sia un rivestimento ramificato.  $F$  è semplice se lo è  $p$  come rivestimento.*

**Teorema 3.2.5 (Viro, Kamada).** *Ogni superficie  $F \subset \mathbf{R}^4$  chiusa orientabile (non necessariamente connessa) è isotopa ad una 2-treccia chiusa semplice.*

Ovviamente quanto detto vale anche nel caso delle superfici in  $\mathbf{S}^4$ .

Va segnalato che delle trecce bidimensionali (applicate allo studio delle trecce classiche), se n'è occupato anche Rudolph in [36]. Di quest'articolo esiste anche una versione aggiornata pubblicata nel 2000. Si veda inoltre [35].

Kamada ha sviluppato anche una tecnica per rappresentare le trecce bidimensionali mediante grafi finiti in  $\mathbf{R}^2$  che chiama *carte*. Questi grafi si ottengono semplicemente considerando una proiezione generica delle superficie in  $\mathbf{R}^3$  e prendendo la chiusura del luogo dei punti doppi. Si ottiene un grafo in  $\mathbf{R}^3$  che proiettato in modo generico in  $\mathbf{R}^2$  ci dà la carta. Sono noti anche i movimenti che legano due carte che rappresentano trecce equivalenti. Per ulteriori dettagli si veda [19, 18, 21, 22, 24, 23, 4]. Per un quadro generale sulle superfici in  $\mathbf{R}^4$  si veda anche [11, 5, 8, 9, 7, 6, 10].

Diamo ora la definizione seguente.

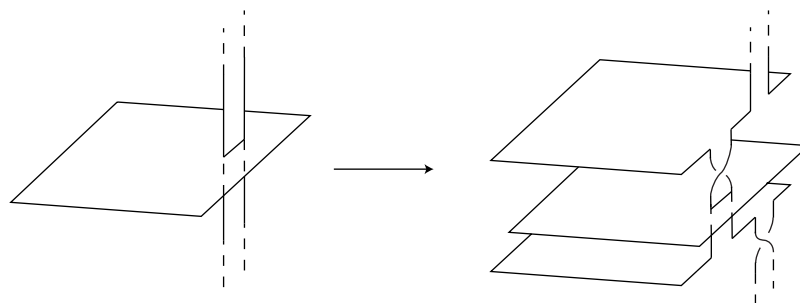
**Definizione 3.2.6.** *Dato un link  $\ell \subset \mathbf{R}^3$  e delle bande  $b_1, \dots, b_n$  attaccate ad  $\ell$  come 1-manici, chiameremo  $\ell' = \text{Cl}(\ell \Delta \text{Bd } b)$  il link generato da  $\ell$  e da  $b_1, \dots, b_n$ , dove  $b = b_1 \cup \dots \cup b_n$  e  $\Delta$  indica la differenza simmetrica.*

*Dimostrazione di 3.2.5.* A meno di una piccola isotopia possiamo supporre che  $x^4|_F$  sia una funzione di Morse, dove  $x^4$  è la quarta coordinata di  $\mathbf{R}^4$ . Possiamo anche assumere che i punti critici di indice  $i$  si trovino a quota  $i$  per  $i = 0, 1, 2$ . Gli iperpiani di livello intersecheranno  $F$  in un link, eventualmente degenerare. Naturalmente possiamo appiattare la superficie (rispetto alla quarta coordinata) in un intorno delle intersezioni singolari: si avranno dei dischi in  $\mathbf{R}^3 \times \{i\}$ ,  $i = 1, 2$ , che corrispondono agli 0-manici e ai 2-manici, mentre per  $i = 1$  si avranno delle bande (1-manici) attaccate ad un link in  $\mathbf{R}^3 \times \{1\}$ . Per il resto possiamo assumere che la superficie si sviluppi verticalmente. In questo modo la superficie inizia con dei dischi in  $\mathbf{R}^3 \times \{0\}$ , si sviluppa verticalmente fino a quota 1 dove ci sono le bande, si sviluppa ancora verticalmente fino a quota 2 e si chiude con dei dischi.

Nello stadio iniziale possiamo pensare i dischi come veri dischi euclidei, disposti uno sopra l'altro in  $\mathbf{R}^3$  (si prende un'isotopia di  $\mathbf{R}^3$  che realizza questa situazione e la si moltiplica per  $\mathbf{R}$ , ottenendo un'isotopia di  $\mathbf{R}^4$ ). A quota 1 le bande sono attaccate ad una treccia chiusa banale e generano un link banale.

Consideriamo a quota 1 le bande ed una copia dei dischi che avevamo a quota 0. A meno di risistemare le bande in posizione generale, si avrà una superficie localmente immersa in  $\mathbf{R}^3 \times \{1\}$  con autointersezioni ribbon (le bande possono attraversare l'interno dei dischi e non ci sono punti tripli). Seguendo la dimostrazione del teorema 3.2.3, possiamo sistemare la superficie in modo che ci siano i rettangoli e le bande poligonali. L'unica

differenza sono le autointersezioni che prima non c'erano. In prossimità di queste possiamo disporre le bande parallelamente all'asse  $x^3$  con una torsione per avere la situazione rappresentata in figura 3.6; per il resto non ci sono cambiamenti.



**Figura 3.6.** Movimento locale in prossimità delle autointersezioni ribbon. Il twist che sta in basso, viene successivamente fatto scorrere seguendo la banda, fino ad arrivare ad un altro rettangolo. Si noti che il rettangolo iniziale non viene alterato.

A parte i tratti dove ci sono le autointersezioni, si applica il ragionamento fatto sopra per avere i rettangoli connessi da bande semplici con una torsione; il bordo sarà una treccia chiusa. Durante l'isotopia, che preserva le fibre orizzontali di  $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ , i dischi a quota 0 sono diventati rettangoli; a quota 1 ci saranno ora nuovi rettangoli, che non provenivano dai dischi a quota 0, ma si sono formati durante l'isotopia. Questi nuovi rettangoli si potranno facilmente deformare, lasciando fermo il bordo, fino a portarli a quota 0. Rispetto agli altri rettangoli avranno la stessa disposizione che avevano a quota 1.

I 2-manici saranno dei dischi immersi in  $\mathbf{R}^3 \times \{2\}$  e sappiamo che il bordo è una treccia che rappresenta il link banale. Per il teorema di Markov ([3]) possiamo rendere banale questa treccia mediante una sequenza di isotopie di trecce e di stabilizzazioni. Ogni isotopia del bordo (comprese le stabilizzazioni) contribuirà ad uno sviluppo in senso verti-

cale della superficie nel verso della quarta coordinata nel modo seguente: data un'isotopia di un link  $H : \mathbf{S}_k^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ , possiamo considerare la superficie  $F_H$  immagine dell'applicazione

$$\begin{aligned} \tilde{H} : \mathbf{S}_k^1 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^4 \\ (p, t) &\longmapsto (H(p, t), t) \end{aligned}$$

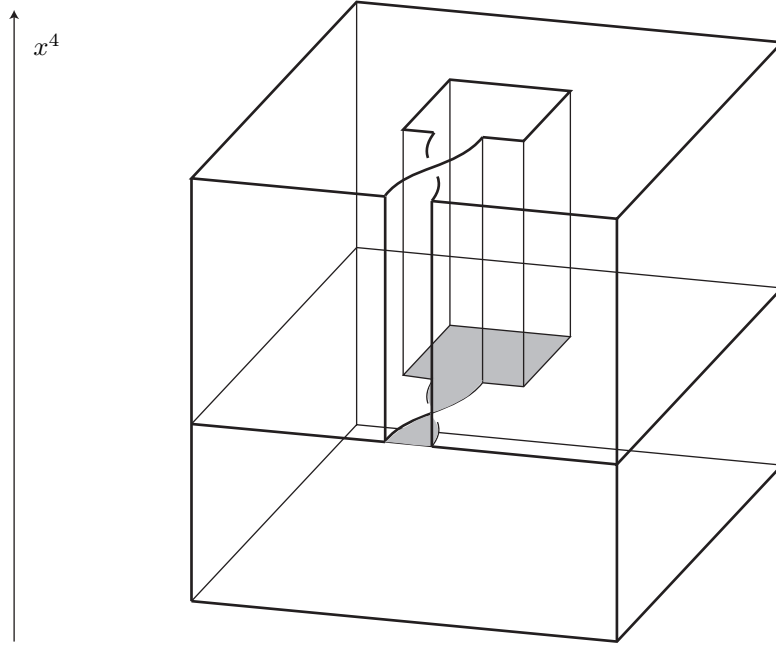
dove  $\mathbf{S}_k^1 = \mathbf{S}^1 \underbrace{\sqcup \dots \sqcup}_{k \text{ volte}} \mathbf{S}^1$ ; questa  $F_H$  incollata in modo naturale ad  $F - 2$ -manici ci darà una superficie il cui bordo è contenuto in un iperpiano. Chiudendo con dei dischi in quest'iperpiano avremo una superficie isotopa ad  $F$ . Che il risultato non dipenda dai dischi scelti è stabilito nel lemma 3.2.7.

Le stabilizzazioni che aumentano il grado le realizziamo aggiungendo un disco connesso alla treccia mediante una banda che fa un mezzo avvitamento; più precisamente se abbiamo una stabilizzazione  $s_t : \ell \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $t \in [0, 1]$ , con cui costruiamo la parte di superficie definita da  $\{s_t(\ell) \times \{t + a\}\}_{t \in [0, 1]}$  ( $a$  opportuno), possiamo sostituire questa parte con  $(s_0(\ell) \times [0, 1/2]) \cup B \cup D \cup (s_1(\ell) \times [1/2, 1])$ , dove  $\ell$  è la treccia,  $B$  la banda e  $D$  il disco (questo perché l'isotopia del link può avvenire attraverso la banda e il disco), figura 3.7. A questo punto, l'interno del disco lo portiamo a quota 0, e diventerà un'altro 0-manico. La banda, invece, la solleviamo un pò nella quarta dimensione, tenendo fermi i due archi d'incollamento.

Viceversa le stabilizzazioni che diminuiscono il grado le realizziamo col passaggio inverso (questa volta il disco verrà portato sopra, assieme ai 2-manici che avremo alla fine, mentre la banda verrà spostata un pò in basso).

Quando avremo terminato il processo potremo chiudere la superficie con dei dischi immersi in modo banale in un opportuno iperpiano, sempre





**Figura 3.7.** Realizzazione di una stabilizzazione. La banda ed il disco vengono aggiunti in un iperpiano di livello (la direzione verticale rappresenta la quarta dimensione).

per il lemma 3.2.7. Alla fine con un'omotetia riportiamo la superficie in  $\mathbf{R}^3 \times [0, 1]$ . Ciò che si ottiene è una 2-treccia chiusa semplice su una sfera immersa banalmente come  $\mathbf{S}^2 \cong \mathbf{B}^2 \times \{0\} \cup \mathbf{S}^1 \times [0, 1] \cup \mathbf{B}^2 \times \{1\}$ , dove  $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{B}^2 \subset \mathbf{R}^3$  sono standard. I punti di ramificazione nascono in corrispondenza delle bande.  $\square$

**Lemma 3.2.7.** *Siano  $F \subset \mathbf{R}_+^4$  una superficie compatta propriamente immersa il cui bordo è un link banale e  $D \subset \text{Bd } \mathbf{R}_+^4 \cong \mathbf{R}^3$  un'unione disgiunta di dischi con  $\text{Bd } D = \text{Bd } F$ . Posto  $\widehat{F} = F \cup D$ , si ha che la classe d'isotopia di  $\widehat{F}$  in  $\mathbf{R}^4$  dipende solo dalla classe d'isotopia relativa di  $F$  in  $\mathbf{R}_+^4$  e non dipende da  $D$ . Diremo che  $\widehat{F}$  è la chiusura di  $F$  in  $\mathbf{R}^4$ .*

Prima di dimostrare questo lemma premettiamone un'altro.

**Lemma 3.2.8.** *Siano  $D$  e  $D'$  dischi bidimensionali in  $\mathbf{R}^3$  con  $\text{Bd } D = \text{Bd } D'$ . Allora esiste un'isotopia che manda  $D'$  in  $D$  lasciando fermo il bordo.*

*Dimostrazione di 3.2.8.* Possiamo assumere che  $D$  sia un disco standard. Consideriamo una curva chiusa  $\gamma \subset \text{Int } D'$ . Questa dividerà  $D'$  in un disco  $D''$  e in un anello  $A$  e sappiamo che è linkata 0 volte con  $\mathbf{S}^1 = \text{Bd } D$ . Quindi a meno di un'isotopia che lascia fermo  $\mathbf{S}^1$  possiamo assumere  $A \cap D = \mathbf{S}^1$ . Per il resto possiamo fare in modo che  $D$  e  $D'$  si incontrino trasversalmente lungo delle curve chiuse. Ma queste curve d'intersezione possono essere eliminate una per una a partire da quella più interna a  $D'$  (che sarà bordo di un disco  $\subset D'$  che non incontra  $D$  altrove). Eliminate le autointersezioni avremo che  $D \cup D' \cong \mathbf{S}^2$ . Ma a questo punto è facile deformare il nuovo  $D'$  in  $D$ .  $\square$

*Dimostrazione di 3.2.7.* Possiamo assumere che  $\text{Bd } F$  sia un link banale standard chiuso con dischi standard  $D = D_1 \cup \dots \cup D_s$ . Prendiamo altri dischi immersi in modo arbitrario  $D' = D'_1 \cup \dots \cup D'_s$  per chiudere  $F$ . Dobbiamo far vedere che  $\widehat{F} = F \cup D$  è isotopa in  $\mathbf{R}^4$  a  $\widehat{F}' = F \cup D'$ .

Supponiamo di aver numerato i dischi in modo tale che  $\text{Bd } D_i = \text{Bd } D'_i$ . Per il lemma 3.2.8 possiamo deformare  $D'_i$  in  $D_i$  lasciando fermo il bordo. Per fare in modo che quest'isotopia non interferisca con gli altri dischi, possiamo prima portare  $D'_i$  a quota negativa  $-\varepsilon$  con un'isotopia verticale e poi applichiamo l'isotopia del lemma precedente nell'iperpiano di livello a quota  $-\varepsilon$ ; quindi rimettiamo a posto il nuovo  $D'_i$ , che andrà a coincidere con  $D_i$ . Questo non modifica la classe d'isotopia relativa di  $F$  in  $\mathbf{R}_+^4$  perché in sostanza modifichiamo solo  $D'_i$  ma non il suo bordo. Ripetendo il ragionamento per  $i = 1, \dots, s$  avremo concluso la dimostrazione.  $\square$

### 3.3. Il caso non orientabile

In questa sezione vedremo se sia in qualche modo possibile estendere il teorema 3.2.5 al caso delle superfici non orientabili in  $\mathbf{S}^4$ . Più precisamente, ci possiamo porre il seguente

**Problema 3.3.1.** *È possibile che ogni superficie chiusa non orientabile in  $\mathbf{S}^4$  sia equivalente ad una superficie (che potremo chiamare treccia non orientabile) contenuta in un intorno tubolare di un  $\mathbf{P}^2$  standard tale che la proiezione sia un rivestimento ramificato?*

Come vedremo la risposta è no. Questo dipende essenzialmente dalla struttura del fibrato normale di una superficie non orientabile in  $\mathbf{S}^4$ ; infatti, come vedremo, in questo caso sarà possibile introdurre un invariante associato al fibrato normale. La definizione precisa di quest'invariante è la seguente.

**Definizione 3.3.2 (Numeri di Eulero).** *Dato un 2-fibrato vettoriale  $\xi : W \rightarrow F$  sopra una superficie chiusa, dove  $W$  è una 4-varietà orientata, il numero di Eulero  $e(\xi)$  è definito come l'autointersezione algebrica in  $W$  di  $F$  rispetto a sé stessa.*

L'autointersezione si realizza nel modo seguente: si prendono due sezioni tra loro trasversali  $F'$  e  $F''$  che consideriamo come due superfici immerse in  $W$  e per ogni punto d'intersezione  $p$ , si prende un'orientazione locale in ciascuna di esse. Richiediamo che le due orientazioni siano coerenti (cioè si proiettano sulla stessa orientazione locale in  $F$  intorno a  $\xi(p)$ ); quindi diamo un segno  $\sigma(p) = \pm 1$  a seconda che la somma delle due orientazioni coincida o meno con l'orientazione di  $W$ . Si avrà allora che

$$e(p) = \sum_{p \in F' \cap F''} \sigma(p).$$

Si prova con un ragionamento standard che la definizione è ben data (non dipende dalla scelta di  $F'$  ed  $F''$  né dall'ordine con cui le loro orientazioni vengono sommate). Si osservi che non abbiamo richiesto l'orientabilità di  $F$  e che nel caso in cui ciò accada si può evitare di ricorrere alle orientazioni locali.

Data una superficie chiusa  $F \subset M^4$ , dove  $M$  è una 4-varietà orientata (differenziabile o p.l.), possiamo considerare il fibrato normale  $\nu(F)$  e a questo associare il numero di Eulero  $e(\nu(F))$ ; in questo contesto lo indicheremo con  $e(F)$  e lo chiameremo *numero di Eulero di  $F$  in  $M$* . Chiaramente si tratta di un'invariante per omotopia regolare.

È noto, come già detto all'inizio del capitolo, che per  $F \subset \mathbf{S}^4$  orientabile, il fibrato normale è banale e pertanto  $e(F) = 0$ . È anche chiaro che se  $F$  non è orientabile una situazione simile non si può verificare (se  $\nu(F)$  fosse banale, lo spazio totale non sarebbe orientabile; d'altra parte dovrebbe essere omeomorfo ad un aperto di  $\mathbf{S}^4$ ).

Nel caso delle superfici chiuse non orientabili in  $\mathbf{S}^4$  esiste una limitazione ai possibili valori del numero di Eulero. Il risultato, di notevole interesse, è il seguente.

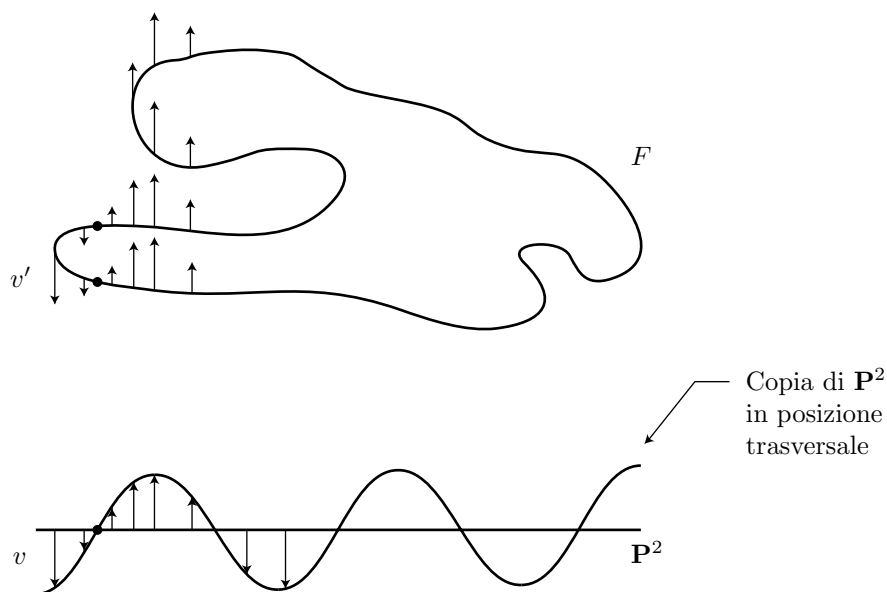
**Teorema 3.3.3 (Congettura di Whitney, [17]).** *Sia  $F \subset \mathbf{S}^4$  una superficie chiusa non orientabile di genere  $g$  (cioè  $F \cong \#_g \mathbf{P}^2$ ). Allora  $e(F) = -2g, -2g + 4, -2g + 8, \dots, 2g - 4, 2g$ .*

Questo teorema, che fu inizialmente congetturato da Whitney, è stato dimostrato da Massey con tecniche piuttosto avanzate; successivamente Kamada ne ha dato una dimostrazione elementare in [17] utilizzando le forme normali per rappresentare le immersioni.

Utilizzando la congettura di Whitney è facile capire perché la risposta al problema 3.3.1 sia negativa. Supponiamo infatti che una superficie non orientabile  $F \subset \mathbf{S}^4$  sia un rivestimento di un  $\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{S}^4$ ; possiamo supporre

che il tutto stia in  $\mathbf{R}^4$ .  $F$  sarà contenuta in un intorno tubolare  $W$  di  $\mathbf{P}^2$  e la proiezione  $p : W \rightarrow \mathbf{P}^2$  è un fibrato vettoriale. Consideriamo prima il caso semplice. Sia  $q = p|_F : F \rightarrow \mathbf{P}^2$  il rivestimento; nei punti regolari la fibra di  $p$  incontrerà trasversalmente  $F$ , mentre nei punti critici sarà tangente (questi ultimi hanno rango zero).

Osserviamo che mettere  $\mathbf{P}^2$  in posizione trasversale rispetto a sé stesso nel suo fibrato normale, equivale a dare un campo vettoriale  $v$  ortogonale lungo  $\mathbf{P}^2$ , con singolarità non degeneri. Mediante  $q$  possiamo sollevare  $v$ , ottenendo un campo  $v'$  lungo  $F$  ( $v'_x$  è  $v_{q(x)}$  traslato,  $\forall x \in F$ , vedi figura 3.8); si ottiene un campo  $w$  ortogonale a  $F$  ponendo  $w = v'_\perp$  (componente ortogonale di  $v'$ ). A  $w$  corrisponde una superficie trasversale a  $F$  in  $\nu(F)$ . Dal fatto che  $q$  è semplice segue che  $w$  ha solo zeri



**Figura 3.8.** Sollevamento di un campo lungo  $\mathbf{P}^2$ .

non degeneri (gli zeri di  $w$  si hanno in corrispondenza degli zeri di  $v$  e dei punti di ramificazione di  $q$ ).

### Il segno dei punti di ramificazione

Per quanto riguarda i punti di ramificazione, c'è da dire che ne avremo di due tipi: positivi e negativi. Per determinare il segno si prende un discolino intorno al punto critico e vi si fissa un'orientazione; rimane indotta un'orientazione nel piano normale  $N_x F$  (in modo che la somma dia l'orientazione di  $\mathbf{R}^4$ ) e in un discolino di sotto intorno a  $q(x)$  (in modo che  $q$  preservi l'orientazione). Allora  $x$  è positivo se  $p|_{N_x F}$  preserva l'orientazione in  $x$  ( $p$  manda un intorno di  $x$  in  $T_x F$  in un intorno di  $p(x)$  in modo regolare); sarà negativo in caso contrario.

### Le relazioni di compatibilità

Siamo ora in grado di scrivere delle relazioni tra il grado  $d$  di  $q$ , il numero di punti critici positivi  $b_+$  e quelli negativi  $b_-$ . Per la congettura di Whitney,  $e(\mathbf{P}^2) = \pm 2$ ; assumiamo che ci sia p.e. il più. Avremo intanto

$$\chi(F) + b_+ + b_- = d \quad (3.1)$$

che è la *formula di Riemann-Hurwitz*; avremo anche

$$e(F) = b_+ - b_- + 2d \quad (3.2)$$

dove il  $2d$  viene dalle singularità di  $v$  che portate sopra contribuiscono  $d$  volte con il loro segno e dal fatto che stiamo assumendo  $e(\mathbf{P}^2) = 2$ , mentre il termine  $b_+ - b_-$  viene dal fatto che in ogni punto singolare per la proiezione si ha uno zero per  $w$  con lo stesso segno, vedi figura 3.8. Da queste due equazioni abbiamo

$$\begin{aligned} b_+ &= \frac{e - \chi - d}{2} \geq 0 \\ b_- &= \frac{3d - \chi - e}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

da cui segue

$$\frac{e + \chi}{3} \leq d \leq e - \chi$$

e anche  $e \geq 2\chi$ . In particolare se  $F \cong \mathbf{P}^2$  avremo  $\chi(F) = 1$  e  $e(F) = \pm 2$ . Se c'è il più segue  $d = 1$ , cioè l'immersione è quella standard. Col meno viene  $d$  negativo che è una contraddizione.

Nel *caso non semplice*, la formula 3.1 di Riemann-Hurwitz continuerà a valere nella forma in cui l'ho scritta sopra, pur di contare ogni punto singolare per il rivestimento con la molteplicità appropriata, pari al grado locale diminuito di uno (si osservi che la possibilità di attribuire un segno ai punti singolari non è legata al fatto che questi ultimi siano semplici o meno).

La differenza rispetto al caso semplice sta nel fatto che quando sollevo il campo  $v$ , otterrò un  $w$  che avrà singolarità degeneri dove il grado locale è maggiore di due. Tuttavia è possibile perturbare  $w$  in modo che ogni punto singolare degenero si separi in un numero di punti singolari non degeneri pari alla molteplicità. Per dimostrarlo basta considerare un modello locale dell'immersione  $h : \mathbf{B}^2 \rightarrow \mathbf{B}^2 \times \mathbf{B}^2$  intorno ad un punto singolare, in modo che  $\pi_2 \circ h$  sia un rivestimento ramificato ( $\pi_2 : \mathbf{B}^2 \times \mathbf{B}^2 \rightarrow \mathbf{B}^2$  è la proiezione sul secondo fattore) e scrivere  $w$  in coordinate locali (per  $v$  si può prendere qualunque campo trasversale a  $\{0\} \times \mathbf{B}^2$ , p.e.  $v = \frac{\partial}{\partial x^1}$  se  $x^1, \dots, x^4$  sono le coordinate usuali su  $\mathbf{B}^2 \times \mathbf{B}^2$ ). A questo punto si esamina la matrice jacobiana delle componenti di  $w$  e si sceglie opportunamente la perturbazione (andrà bene anche una lineare, [30]). Un punto singolare sarà non degenero se e solo se la matrice jacobiana in quel punto ha determinante non nullo.

Contando le singolarità del campo che così si ottiene, segue che anche la formula 3.2 continua a valere, e quindi si ottengono le stesse conclusioni a cui eravamo giunti nel caso semplice.

Abbiamo così dimostrato la proposizione seguente.

**Proposizione 3.3.4.** *Nessun proiettivo in  $\mathbf{S}^4$  (tranne quello standard) si può rappresentare come treccia non orientabile.*

A questo punto nasce il problema seguente.

**Problema 3.3.5.** *È possibile classificare tutte le superfici chiuse non orientabili in  $\mathbf{S}^4$  che si rappresentano come trecce non orientabili?*



## Bibliografia

- [1] Israel Berstein and Allan L. Edmonds, *On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **247** (1979), 87–124.
- [2] ———, *On the classification of generic branched coverings of surfaces*, Illinois J. Math. **28** (1984), no. 1, 64–82.
- [3] Joan S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974, Annals of Mathematics Studies, No. 82.
- [4] J. Scott Carter, Seiichi Kamada, and Masahico Saito, *Alexander numbering of knotted surface diagrams*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
- [5] J. Scott Carter, Joachim H. Rieger, and Masahico Saito, *A combinatorial description of knotted surfaces and their isotopies*, Adv. Math. **127** (1997), no. 1, 1–51.
- [6] J. Scott Carter and Masahico Saito, *Canceling branch points on projections of surfaces in 4-space*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), no. 1, 229–237.
- [7] ———, *Reidemeister moves for surface isotopies and their interpretation as moves to movies*, J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), no. 3, 251–284.

- [8] ———, *Knot diagrams and braid theories in dimension 4*, Real and complex singularities (São Carlos, 1994) (Harlow), Longman, Harlow, 1995, pp. 112–147.
- [9] ———, *Braids and movies*, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), no. 5, 589–608.
- [10] ———, *Normal Euler classes of knotted surfaces and triple points on projections*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 2, 617–623.
- [11] ———, *Knotted surfaces and their diagrams*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [12] Allan L. Edmonds, *Deformation of maps to branched coverings in dimension two*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 1, 113–125.
- [13] James Eells, Jr., *Singularities of smooth maps*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1967.
- [14] Brayton Gray, *Homotopy theory*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975, An introduction to algebraic topology, Pure and Applied Mathematics, Vol. 64.
- [15] Morris W. Hirsch, *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 242–276.
- [16] ———, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York, 1976, Graduate Texts in Mathematics, No. 33.
- [17] Seiichi Kamada, *Nonorientable surfaces in 4-space*, Osaka J. Math. **26** (1989), no. 2, 367–385.
- [18] ———, *Surfaces in  $\mathbf{R}^4$  of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 2, 137–160.
- [19] ———, *2-dimensional braids and chart descriptions*, Topics in knot theory (Erzurum, 1992) (Dordrecht), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, pp. 277–287.

- [20] ———, *A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space*, *Topology* **33** (1994), no. 1, 113–122.
- [21] ———, *An observation of surface braids via chart description*, *J. Knot Theory Ramifications* **5** (1996), no. 4, 517–529.
- [22] ———, *On braid monodromies of non-simple braided surfaces*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **120** (1996), no. 2, 237–245.
- [23] ———, *Surfaces in 4-space: a view of normal forms and braidings*, *Lectures at KNOTS '96 (Tokyo)* (River Edge, NJ), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997, pp. 39–71.
- [24] ———, *Standard forms of 3-braid 2-knots and their Alexander polynomials*, *Michigan Math. J.* **45** (1998), no. 1, 189–205.
- [25] Robion C. Kirby, *The topology of 4-manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [26] Antoni A. Kosinski, *Differential manifolds*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1993.
- [27] R. Lashof and S. Smale, *On the immersion of manifolds in euclidean space*, *Ann. of Math. (2)* **68** (1958), 562–583.
- [28] Jean Martinet, *Singularities of smooth functions and maps*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982, Translated from the French by Carl P. Simon.
- [29] William S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [30] John W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965, Based on notes by David W. Weaver.

- [31] Jose M. Montesinos, *Lectures on branched coverings*, Geometry of differentiable manifolds (Roma), Università di Roma, Roma, 1984, pp. 127–167.
- [32] Riccardo Piergallini, *Manifolds as branched covers of spheres*, Proceedings of the Eleventh International Conference of Topology (Trieste, 1993), vol. 25, 1993, pp. 419–439 (1994).
- [33] Dale Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1990, Corrected reprint of the 1976 original.
- [34] Colin Patrick Rourke and Brian Joseph Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1982, Reprint.
- [35] Lee Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), no. 1, 1–37.
- [36] ———, *Special positions for surfaces bounded by closed braids*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), no. 3, 93–133.
- [37] Stephen Smale, *A classification of immersions of the two-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1958), 281–290.
- [38] ———, *The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces*, Ann. of Math. (2) **69** (1959), 327–344.
- [39] James W. Vick, *Homology theory*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1994, An introduction to algebraic topology.
- [40] George W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [41] Hassler Whitney, *On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. (2) **62** (1955), 374–410.