

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

*Corso di Laurea in Matematica e Applicazioni
(Classe LM-40)*



Complessi di curve
e gruppi di automorfismi di superfici

Tesi di Laurea in Geometria (S.S.D. MAT 03)

Relatore:
Prof. Riccardo Piergallini

Laureando:
Reynaldo Staffolani

ANNO ACCADEMICO 2016-2017

Indice

Introduzione	4
1 Complessi di curve di una superficie	8
1.1 Preliminari	8
1.2 Complesso dei sistemi di taglio	10
1.3 Complesso delle decomposizioni in pantaloni	13
1.4 I complessi $\mathcal{AX}(\Delta)$, $\mathcal{AZ}(\Delta)$, $\mathcal{BX}(\Delta, \Delta_0)$ e $\mathcal{BZ}(\Delta, \Delta_0)$	16
1.5 Complessi simpliciali di curve	18
1.6 I complessi \mathcal{WB} , \mathcal{B} , \mathcal{B}_u e \mathcal{B}_0	18
2 Connessione e semplice connessione del complesso dei sistemi di taglio	21
2.1 Il complesso $\mathcal{X}_{1,n}$	21
2.2 Cammini di raggio 0	27
2.3 Caso generale	32
2.4 Sottocomplessi di $\mathcal{X}_{g,n}$	41
3 Dal cellulare al simpliciale	43
3.1 Retratti di complessi di celle	43
3.2 Il complesso simpliciale associato	44
4 Generatori dei gruppi di automorfismi di superfici	51
4.1 Preliminari	51
4.2 Il Teorema di Dehn-Lickorish	53
5 Presentazioni dei gruppi di automorfismi di superfici	59
5.1 Premesse	59
5.2 Il gruppo $\mathcal{M}_{0,n+1}$	61
5.3 Elementi del gruppo $\mathcal{M}_{g,1}$	62
5.4 Lo stabilizzatore di un vertice	65
5.5 Generatori dello stabilizzatore di uno spigolo e di $\mathcal{M}_{g,1}$	69

5.6	Il gruppo $\mathcal{M}_{g,1}$	71
5.7	Il gruppo $\mathcal{M}_{g,0}$	75

Elenco delle figure

1.1	Cammino triangolare	11
1.2	Cammino quadrato	11
1.3	Cammino pentagonale	12
1.4	Un paio di pantaloni	13
1.5	Diverse decomposizioni in pantaloni di $\mathcal{S}_{2,0}$	13
1.6	Il movimento combinatoriale F	14
1.7	Bigoni	15
1.8	Triangoli	15
1.9	Quadrati	15
1.10	Pentagoni	16
1.11	Esempi di archi con punti base in Δ	17
2.1	Un bigono tra le curve α e β	22
2.2	Costruzione della curva δ	24
2.3	Cammino esagonale in $\mathcal{X}_{g,n}$	29
2.4	Cammini di raggio 0, caso 1	30
2.5	Cammini di raggio 0, caso 2	30
2.6	Cammini di raggio 0, caso 3a	31
2.7	Cammini di raggio 0, caso 3b	32
2.8	Costruzione delle curve δ_1 e δ_2 nel caso $n = 2$	33
2.9	Costruzione delle curve δ_i	39
2.10	Riduzione di un cammino di raggio m	41
3.1	Illustrazione semplificata dell'applicazione φ	46
3.2	Omotopia tra w e $*$	47
3.3	Costruzione di p	48
3.4	Omotopia tra p_ω e v_*	49
3.5	Costruzione di un cammino omotopo a w	49
4.1	Spin di z rispetto a c	52
4.2	Esempi di curve $a_i, b_i, a_{i,j}$ con $r = 3$	53

4.3	Avvitamenti di Dehn rispetto le curve p_1 e p_2	54
4.4	Primo caso del Lemma 4.2.4	55
4.5	Secondo caso del Lemma 4.2.4	55
4.6	Curve m_i, d_i e a_i di \mathcal{S}_g	56
5.1	Relazione a lanterna	60
5.2	Curve δ_i e $\alpha_{i,j}$ del disco B	61
5.3	Curve $\alpha_i, \beta_i, \delta_k$ e ε_j	62
5.4	Curve $\delta_{i,j}$	63
5.5	Curve $\gamma_i, i = 1, 2, 3, 4, 6$	74
5.6	Curve $\delta_g, \delta'_g, \delta_{g+1}, \gamma$ e γ'	77

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è di fornire una panoramica sui diversi complessi cellulari o simpliciali che si possono associare a una superficie $\mathcal{S}_{g,n,r}$ compatta, connessa e orientabile di genere g , con n componenti di bordo ed r punture, a partire dalle classi di isotopia di curve contenute in $\mathcal{S}_{g,n,r}$. Tra questi complessi, i due più noti sono il complesso dei sistemi di taglio $\mathcal{X}_{g,n}$ o il complesso simpliciale di curve $\mathcal{Y}_{g,n}$. Il primo ha come vertici collezioni di g curve disgiunte e non isotope tra loro che non sconnettono la superficie. Se due vertici hanno $g - 1$ curve in comune e le restanti si incontrano una sola volta, allora questi vengono connessi da uno spigolo chiamato *movimento semplice*. Le facce vengono ottenute incollando dischi a particolari cammini chiusi del complesso. Lo spazio $\mathcal{Y}_{g,n}$ si costruisce più facilmente. I vertici sono classi di isotopia di curve singole, due vertici formano uno spigolo se le due curve sono disgiunte, tre vertici formano una faccia se le tre curve sono a due a due disgiunte e così via. Allo stesso modo si definisce il sottocomplesso \mathcal{Y}_{nosep} richiedendo che le curve in questione non sconnettino la superficie né singolarmente, né tramite la loro unione. Una delle applicazioni più importanti di tali complessi consiste nel fornire una presentazione del gruppo degli automorfismi delle superfici a meno di isotopia, basata sull'azione indotta da questo gruppo sugli stessi complessi. Un ingrediente essenziale per questa applicazione è la semplice connessione dei complessi in questione. Le definizioni di tali complessi, nonché le loro proprietà sono state tratte dagli articoli [10], [5], [1] e [12]. In particolare, la definizione e le caratteristiche di $\mathcal{X}_{g,n}$ sono basate sull'articolo [14], mentre quelle dei complessi $\mathcal{Y}_{g,n}$ e \mathcal{Y}_{nosep} fanno riferimento a [5] e [10].

Come mostrato da diversi autori, il complesso dei sistemi di taglio $\mathcal{X}_{g,n}$ è connesso e semplicemente connesso. Un modo elementare per giungere a tale conclusione è quello di procedere per induzione sul *genere* della superficie e sul *raggio* di una curva fissata intorno un cammino chiuso. Un cammino nel complesso in questione può esser visto come una successione di insiemi di curve in cui ogni vertice scambia una sola curva col vertice successivo. Presa

una curva chiusa e semplice α di un vertice, si dice che questa ha *distanza* m dalla collezione che la contiene se nell'insieme dato vi è una curva che incontra α esattamente m volte, mentre tutte le altre incontrano la curva data almeno m volte. Il *raggio* di una curva α intorno a un cammino si definisce come il massimo delle distanze di α al variare del vertice nel cammino. A partire da questi concetti è possibile provare che anche opportuni sottocomplessi di $\mathcal{X}_{g,n}$ godono di queste proprietà.

Il contributo principale di questa tesi è di derivare la semplice connessione di \mathcal{Y}_{nosep} da quella di $\mathcal{X}_{g,n}$ con tecniche elementari se il genere della superficie è almeno 3. Tale obiettivo viene provato in generale per un qualunque complesso cellulare di dimensione 2 ed un complesso simpliciale *associato*. Si prova che esiste un isomorfismo tra i gruppi fondamentali dei due spazi usando strumenti semplici della teoria dell'omotopia.

Il *gruppo degli automorfismi* $\mathcal{M}_{g,n,r}$ di una superficie, chiamato anche *mapping class group*, è un gruppo dato dalle classi di isotopia di tutti gli omeomorfismi $h : \mathcal{S}_{g,n,r} \rightarrow \mathcal{S}_{g,n,r}$ che preservano l'orientazione. Un elemento chiave per indagare tali strutture è l'*avvitamento di Dehn* rispetto a una curva chiusa. Questi avvittamenti sono omeomorfismi che operano su un intorno regolare di una curva fissata. Intuitivamente corrispondono alle seguenti operazioni. Si taglia la superficie lungo la curva data, si ruota una delle due parti di 360° nel senso dato dall'orientazione della varietà e infine si incolla lungo i bordi generati dal taglio lungo la curva. Un teorema classico dell'argomento prova che tutti gli elementi di $\mathcal{M}_{g,n}$ si possono scrivere come prodotti di avvittamenti lungo curve opportune. Questo permette inoltre di specificare i generatori del gruppo $\mathcal{M}_{g,n}$. Inizialmente questo risultato è stato raggiunto da M. Dehn nel 1938. Successivamente è stato ripreso e reso più semplice da W. B. R. Lickorish nel 1962. In questo testo è riportata la seconda dimostrazione.

Un modo per descrivere esplicitamente $\mathcal{M}_{g,n}$ è di dare una *presentazione* di questo gruppo. Sin dai primi sviluppi della teoria, le presentazioni ottenute sono state numerose e diverse, distinte soprattutto in base agli strumenti usati per raggiungere questo scopo. Nel testo vengono esibite le presentazioni dei gruppi $\mathcal{M}_{g,1}$ e $\mathcal{M}_{g,0}$. Per tale obiettivo si è fatto uso dell'azione degli omeomorfismi di $\mathcal{M}_{g,1}$ e $\mathcal{M}_{g,0}$ sul complesso $\mathcal{X}_{g,n}$ definito all'inizio, insieme a risultati classici dell'argomento come il Lemma di Alexander o la *relazione a lanterna*. Un sistema di taglio per esser tale non deve sconnettere la superficie. Quando gli applichiamo un omeomorfismo, il risultato è ancora un insieme di curve che non sconnette la superficie. Segue che l'azione di $\mathcal{M}_{g,n}$ sui vertici di $\mathcal{X}_{g,n}$ è transitiva. Similarmente si prova che questi omeo-

morfismi agiscono transitivamente anche su spigoli incidenti in un vertice. Da questi risultati è possibile dedurre le relazioni per le presentazioni di tali gruppi.

Il Capitolo 1 di questa tesi è dedicato a una panoramica sui complessi di curve e al mostrare alcune loro proprietà quali la connessione o la contrattilità. Successivamente, nel Capitolo 2, si prova tramite doppia induzione sul genere di una superficie e sul raggio di una curva intorno a un cammino, che il complesso dei sistemi di taglio è connesso e semplicemente connesso. Nel Capitolo 3 si fornisce una dimostrazione dell'isomorfismo tra un complesso cellulare di dimensione 2 e un complesso simpliciale associato e la si applica ai complessi $\mathcal{X}_{g,n}$ e \mathcal{Y}_{nosep} . A seguire, nel Capitolo 4, si prova che tutti gli omeomorfismi di una superficie si possono scrivere come prodotti di avvitamanti di Dehn. La tesi si conclude con il Capitolo 5 in cui vengono mostrate le presentazioni dei gruppi $\mathcal{M}_{g,1}$ e $\mathcal{M}_{g,0}$. I contenuti sono basati principalmente sulle trattazioni riguardanti complessi di curve e gruppi di automorfismi di superfici. Il materiale è stato comunque riorganizzato e integrato con vari dettagli e dimostrazioni.

Capitolo 1

Complessi di curve di una superficie

1.1 Preliminari

Sia B^k il disco di dimensione k e sia $S^{k-1} = \partial B^k$ la sfera di dimensione $k-1$. Ricordiamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.1.1. Un *complesso di celle* \mathcal{X} è uno spazio di Hausdorff dato dall'unione di sottospazi disgiunti $\{e_i\}_{i \in I}$ chiamati *celle* che soddisfano:

- i) a ogni cella è associato un intero $k \geq 0$ chiamato *dimensione della cella*. La notazione \mathcal{X}^k indica l'unione di tutte le celle $e_i = e_i^k$ di dimensione $h \leq k$. \mathcal{X}^k viene chiamato *k-scheletro di \mathcal{X}* ;
- ii) a ogni k -cella e_i^k è associata una mappa caratteristica $\chi_i : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X}^{k-1})$, tale che $\chi_i|_{B^k - S^{k-1}}$ è un omeomorfismo tra $B^k - S^{k-1}$ e e_i^k .

Definizione 1.1.2. Sia $k \geq 0$ intero. Definiamo *simpletso di dimensione k* lo spazio

$$\Delta^k = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1\}.$$

Più in generale, dati $k+1$ punti $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$ affinemente indipendenti, cioè tali che le equazioni $\sum t_i v_i = 0$ e $\sum t_i = 0$ implicano $t_i = 0$ per ogni i , possiamo definire il *k-simpletso generato da v_0, \dots, v_k* come lo spazio

$$(v_0, \dots, v_k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid x = \sum_{i=0}^k t_i v_i, 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1 \right\}.$$

Dato (v_0, \dots, v_k) semplice, allora anche $(v_{i_0}, \dots, v_{i_m})$ è un semplice, per ogni $\{i_0, \dots, i_m\} \subset \{0, \dots, k\}$, $m \leq k$. Il semplice $(v_{i_0}, \dots, v_{i_m})$ si chiama *m-faccia* del semplice (v_0, \dots, v_k) .

Definizione 1.1.3. Sia $k \geq 0$ intero fissato. Un *complesso simpliciale* \mathcal{K} è un insieme di semplici in \mathbb{R}^k tale che l'intersezione di due semplici qualunque è vuota o è una faccia comune, e tale che ogni faccia di un semplice in \mathcal{K} è un semplice in \mathcal{K} .

Osserviamo che ogni complesso simpliciale \mathcal{K} è anche un complesso di celle. Infatti, un semplice di dimensione k può esser visto come una k -cella tramite l'omeomorfismo $\chi : S^{k-1} \rightarrow \Delta^k$.

Diamo un'altra definizione che ci sarà utile nel cap. 3.

Definizione 1.1.4. Sia $\sigma = (v_0, \dots, v_k)$ un semplice. Chiamiamo *baricentro* di σ il punto $\beta(\sigma) = (k+1)^{-1}(v_0 + \dots + v_k)$. Più in generale, dato un complesso simpliciale \mathcal{K} , chiamiamo *suddivisione baricentrica* o *raffinamento baricentrico* il complesso \mathcal{K}' tale che

- (i) i vertici di \mathcal{K}' sono baricentri dei semplici di \mathcal{K} ,
- (ii) i semplici di \mathcal{K}' sono semplici $(\beta(\sigma_0), \dots, \beta(\sigma_h))$, dove $\sigma_0, \dots, \sigma_h \subset \mathcal{K}$, σ_i è una faccia di σ_{i+1} e $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$, con $h \leq k$.

Ricordiamo la seguente definizione che sarà ricorrente nel resto del testo.

Definizione 1.1.5. Sia $\mathcal{S}_{g,n}$ una superficie connessa, compatta e orientabile. Sia $\gamma \subset \mathcal{S}_{g,n}$ una curva chiusa, semplice e orientata e sia N un suo intorno regolare il quale è omeomorfo a un cilindro. Possiamo assumere che N sia parametrizzato dalle coordinate positive rispetto l'orientazione di $\mathcal{S}_{g,n}$ date da (r, ϑ) , dove $-1 \leq r \leq 1$ è l'asse del cilindro e ϑ è l'angolo della circonferenza alla base. Supponiamo inoltre che la curva γ sia definita per $r = 0$. Chiamiamo *avvitamento di Dehn rispetto la curva γ* l'omeomorfismo

$$T_\gamma : N \rightarrow N, \quad \text{tale che} \quad T_\gamma(r, \vartheta) = (r, \vartheta + \pi(r+1)).$$

Intuitivamente l'avvitamento agisce come la seguente serie di azioni: si taglia la superficie lungo la curva γ , si ruota di 360° una delle due parti nel senso dato dall'orientazione di $\mathcal{S}_{g,n}$, ed infine si incollano i due bordi punto per punto.

Diamo inoltre la seguente nozione.

Definizione 1.1.6. Sia $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{g,n}$ una superficie di genere g e con n componenti di bordo, e sia \mathcal{G} il gruppo degli omeomorfismi $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ che preservano l'orientazione. Chiamiamo *mapping class group della superficie \mathcal{S}* il gruppo $\mathcal{M}_{g,n} = \pi_0(\mathcal{G})$, dove $\pi_0(\mathcal{G})$ denota l'insieme delle componenti connesse per archi di \mathcal{G} , in questo caso le classi di isotopia di tali omeomorfismi.

1.2 Complesso dei sistemi di taglio

Sia $\mathcal{S}_{g,n}$ la superficie di genere g con n componenti di bordo. Date due curve γ_1 e γ_2 , la notazione $|\gamma_1 \cap \gamma_2|$ indica il *numero di intersezioni geometriche* delle due curve. Iniziamo col definire il complesso dei sistemi di taglio, indicato con $\mathcal{X}_{g,n}$. Scegliamo $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ curve chiuse, semplici e disgiunte in $\mathcal{S}_{g,n}$ tali che tagliando la superficie lungo ciascuna di esse questa rimane connessa e si ottiene un disco con $2g + n$ buchi. Una classe di isotopia di queste curve a meno dell'ordine viene chiamata *sistema di taglio* e si indica con $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$. Chiamiamo

$$\mathcal{X}_{g,n}^0 = \{ \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle \mid \gamma_1, \dots, \gamma_g \subset \mathcal{S}_{g,n} \text{ formano un sistema di taglio} \}$$

lo 0-scheletro di $\mathcal{X}_{g,n}$. Siano ora $v, w \in \mathcal{X}_{g,n}^0$ due vertici che hanno in comune $g - 1$ curve e differiscono per $\gamma_g \in v$ e $\gamma'_g \in w$. Se $|\gamma_g \cap \gamma'_g| = 1$ uniamo i due vertici con uno spigolo. Quest'ultimo identifica un cambio di curva chiamato *movimento semplice* e indicato con $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_{g-1}, \gamma_g \rangle \rightarrow \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{g-1}, \gamma'_g \rangle$, o più brevemente $\langle \gamma_g \rangle \rightarrow \langle \gamma'_g \rangle$. L'insieme

$$\mathcal{X}_{g,n}^1 = \{ e : v \rightarrow w \mid e = \langle \gamma_i \rangle \rightarrow \langle \gamma'_i \rangle \text{ è un movimento semplice} \} \cup \mathcal{X}_{g,n}^0$$

forma l'1-scheletro del complesso $\mathcal{X}_{g,n}$. Per completare la definizione di $\mathcal{X}_{g,n}$ consideriamo i seguenti cammini chiusi:

(1) Siano tre vertici $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{X}_{g,n}^0$ con $g - 1$ curve in comune tali che $\gamma_g \in v_1$, $\gamma'_g \in v_2$, $\gamma''_g \in v_3$ come in Figura 1.1, in modo che il cammino chiuso

$$\langle \gamma_g \rangle \rightarrow \langle \gamma'_g \rangle \rightarrow \langle \gamma''_g \rangle \rightarrow \langle \gamma_g \rangle \quad (1.2.1)$$

sia triangolare.

(2) Siano quattro vertici $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathcal{X}_{g,n}^0$ con $g - 2$ curve in comune tali che $\gamma_{g-1}, \gamma_g \in v_1$, $\gamma'_{g-1}, \gamma_g \in v_2$, $\gamma'_{g-1}, \gamma'_g \in v_3$, $\gamma_{g-1}, \gamma'_g \in v_4$ come in Figura 1.2, in modo che il cammino chiuso

$$\langle \gamma_{g-1}, \gamma_g \rangle \rightarrow \langle \gamma'_{g-1}, \gamma_g \rangle \rightarrow \langle \gamma'_{g-1}, \gamma'_g \rangle \rightarrow \langle \gamma_{g-1}, \gamma'_g \rangle \rightarrow \langle \gamma_{g-1}, \gamma_g \rangle \quad (1.2.2)$$

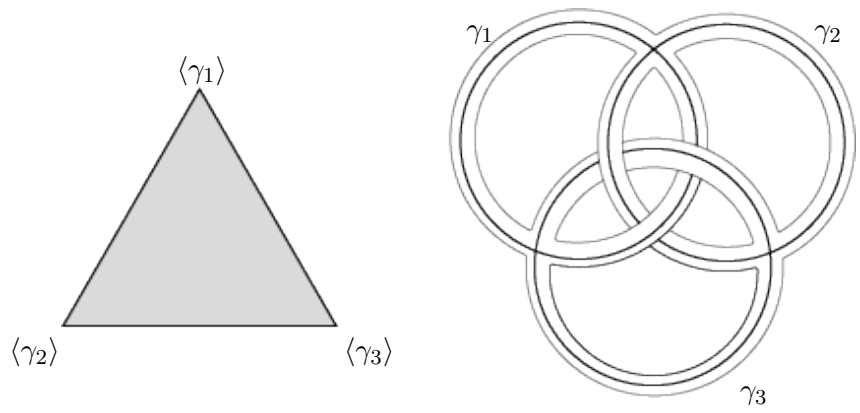


Figura 1.1: Cammino triangolare

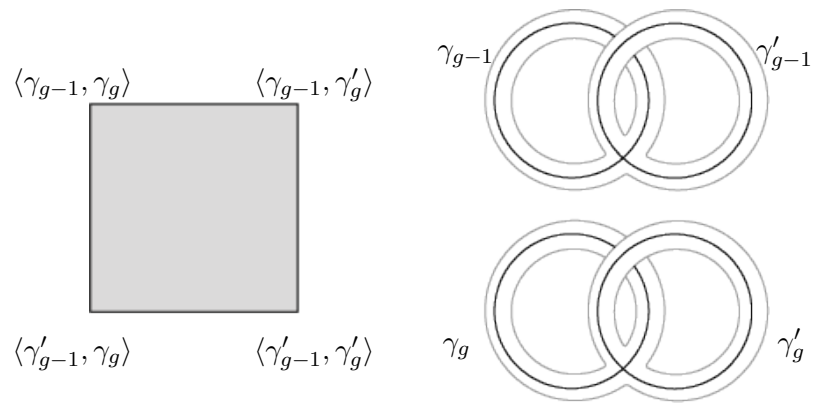


Figura 1.2: Cammino quadrato

sia quadrato.

(3) Siano cinque vertici $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathcal{X}_{g,n}^0$ con $g-2$ curve in comune tali che $\gamma_{g-1}, \gamma_g \in v_1$, $\gamma_{g-1}, \gamma'_g \in v_2$, $\gamma'_{g-1}, \gamma'_g \in v_3$, $\gamma'_{g-1}, \gamma''_g \in v_4$, $\gamma''_g, \gamma_g \in v_5$ e come in Figura 1.3, in modo che il cammino chiuso

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{g-1}, \gamma_g \rangle \rightarrow \langle \gamma_{g-1}, \gamma'_g \rangle \rightarrow \langle \gamma'_{g-1}, \gamma'_g \rangle \rightarrow \\ \rightarrow \langle \gamma'_{g-1}, \gamma''_g \rangle \rightarrow \langle \gamma''_g, \gamma_g \rangle \rightarrow \langle \gamma_{g-1}, \gamma_g \rangle \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

sia pentagonale.

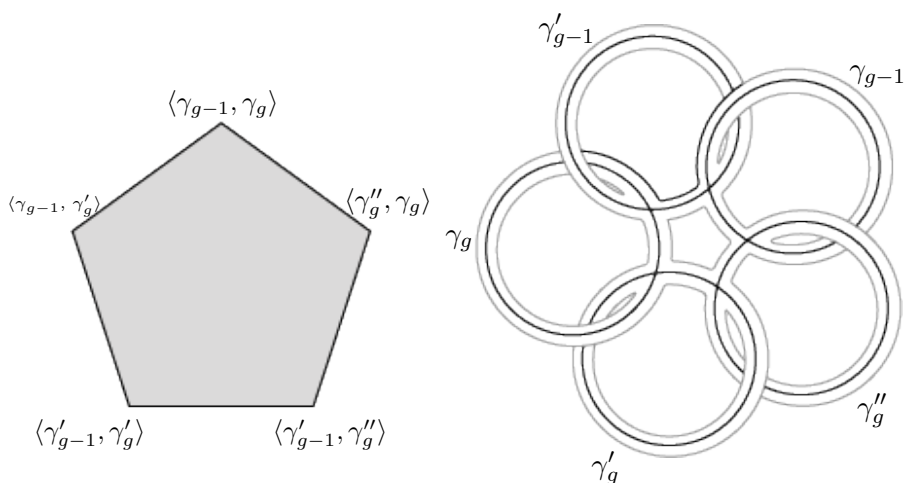


Figura 1.3: Cammino pentagonale

Definizione 1.2.1. Definiamo il *complesso dei sistemi di taglio* $\mathcal{X}_{g,n}$ come il complesso di celle di dimensione 2 con 0-scheletro e 1-scheletro $\mathcal{X}_{g,n}^0$ e $\mathcal{X}_{g,n}^1$ rispettivamente, a cui incolliamo 2-celle nei cammini chiusi del tipo descritti dalle formule (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.3).

Si prova che $\mathcal{X}_{g,n}$ è connesso e semplicemente connesso per ogni $g \geq 0$ e $n \geq 0$. Una dimostrazione viene data nel cap. 2 di questa tesi, tratta dall'articolo [14]. Per una dimostrazione classica di questo risultato si può consultare [9]. In [12] vi è una semplice dimostrazione di questo fatto assumendo di conoscere una presentazione del mapping class group della superficie.

1.3 Complesso delle decomposizioni in pantaloni

Sia $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{g,n}$ come già vista in precedenza. Una *decomposizione in pantaloni* di \mathcal{S} è una decomposizione della superficie in un numero finito di pantaloni determinato da un insieme finito di curve chiuse, semplici e disgiunte. Ricordiamo che un *pantalone* è un disco chiuso al cui interno sono stati rimossi due dischi aperti.

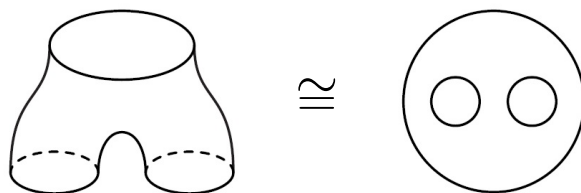


Figura 1.4: Un paio di pantaloni

Più precisamente, l'insieme $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ di curve chiuse, semplici e disgiunte di \mathcal{S} determinano una *decomposizione in pantaloni* di \mathcal{S} se $\mathcal{S} - \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$ consiste di h componenti ognuna delle quali è omeomorfa all'interno di un pantalone. Si osservi che esistono più possibili decomposizioni per una stessa superficie.

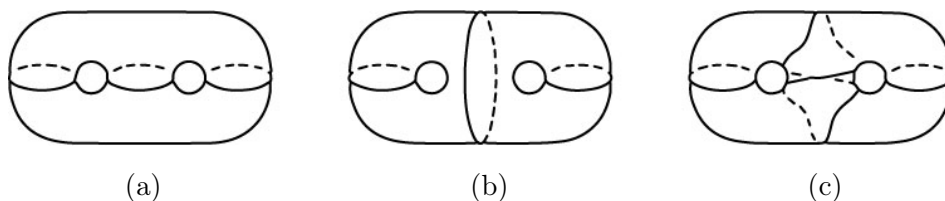


Figura 1.5: Diverse decomposizioni in pantaloni di $\mathcal{S}_{2,0}$

Si dimostra che $\mathcal{S}_{g,n}$ ammette tale decomposizione solo se $(g, n) \notin \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0)\}$. Si può provare anche che k e h sono univocamente determinati e sono dati da $k = 3g - 3 + n$ e $h = 2g - 2 + n$.

Iniziamo a definire il complesso delle decomposizioni in pantaloni $\mathcal{P}_{g,n}$. Chiamiamo $V(\mathcal{P}_{g,n})$ l'insieme di tutti i grafi connessi con n vertici monovalenti chiamati *estremi liberi*, e $2g - 2 + n$ vertici trivalenti. Segue con un semplice calcolo che questi grafi hanno $3g - 3 + 2n$ spigoli, di cui n che con-

nettono un vertice monovalente a uno trivalente, e i restanti $3g - 3 + n$ che connettono due vertici trivalenti.

Introduciamo un movimento locale definito tra due grafi di $V(\mathcal{P}_{g,n})$, illustrato in Figura 1.6, chiamato *movimento combinatoriale F*. Siano v_1 e v_2 due vertici trivalenti e sia e lo spigolo che li connette e su cui effettuiamo il movimento F . Per ogni $i = 1, 2$, vi sono due spigoli, eventualmente coincidenti, che insieme ad e hanno come estremo v_i . Chiamiamo a e b gli spigoli connessi a v_1 mentre c e d son quelli connessi a v_2 . Il primo grafo in Figura 1.6 rappresenta la coppia $(ab)(cd)$. Informalmente possiamo vedere il movimento F come una contrazione dello spigolo e seguita dall'inversa di un'altra contrazione di uno spigolo e' . Più precisamente, si ha che per ogni lato tra due vertici trivalenti, vi sono due modi per effettuare il movimento F , corrispondenti alle due possibili combinazioni delle coppie

$$(ab)(cd) \rightarrow (ad)(bc)$$

$$(ab)(cd) \rightarrow (ac)(bd).$$

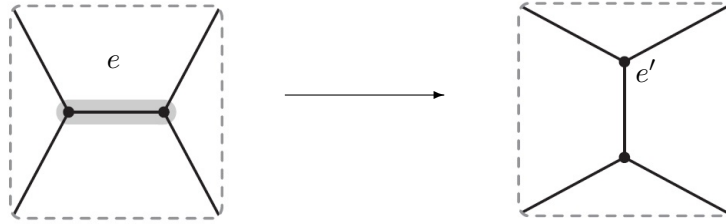


Figura 1.6: Il movimento combinatoriale F

Definiamo $\mathcal{P}_{g,n}$ come il complesso di celle avente $V(\mathcal{P}_{g,n})$ come insieme di vertici, ogni due vertici legati da un movimento F sono collegati da uno spigolo, e le seguenti 2-celle. Nelle Figure 1.7, 1.8, 1.9 e 1.10, le frecce sottintendono un movimento F .

Si dimostra che il complesso $\mathcal{P}_{g,n}$ è semplicemente connesso per ogni g , n tali che $2g - 2 + n \geq 1$. Si osservi che il gruppo $\mathcal{M}_{g,n}$ agisce naturalmente sulle decomposizioni in pantaloni e che i vertici di $\mathcal{P}_{g,n}$ rappresentano le *strutture combinatoriali* di queste, cioè le classi di $\mathcal{M}_{g,n}$ -equivalenza di tali decomposizioni. Ad esempio, nella Figura 1.5 i due complessi rappresentati in b) e c) sono equivalenti tramite un avvitamento di Dehn. Come discusso in [1], a partire da una presentazione di $\mathcal{M}_{g,n}$ è possibile costruire un complesso infinito semplicemente connesso che rappresenta tutte le decomposizioni in

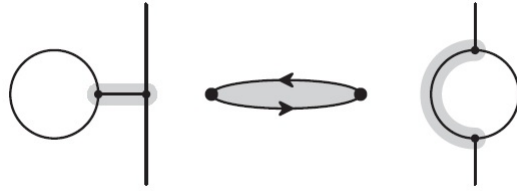


Figura 1.7: Bigoni

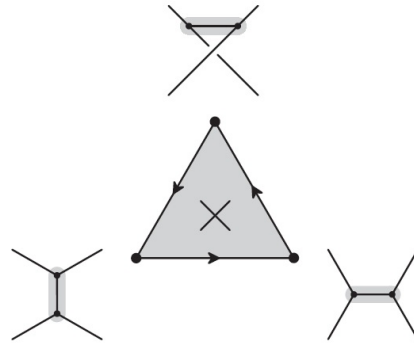


Figura 1.8: Triangoli

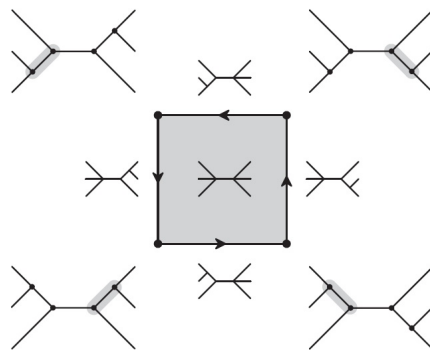


Figura 1.9: Quadrati

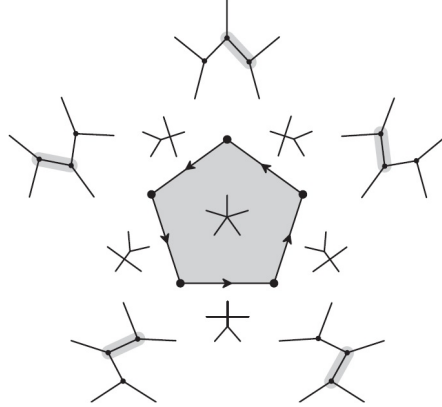


Figura 1.10: Pentagoni

pantaloni di $\mathcal{S}_{g,n}$ e le trasformazioni tra di esse chiamato *complesso della decomposizione in pantaloni decorato* e indicato con $\mathcal{R}_{g,n}$. Tuttavia, lo scopo di questa tesi è di fornire una presentazione di $\mathcal{M}_{g,n}$ a partire dall'azione di questo gruppo su complessi semplicemente connessi pertanto una tale costruzione non rientra in questo discorso.

1.4 I complessi $\mathcal{AX}(\Delta)$, $\mathcal{AZ}(\Delta)$, $\mathcal{BX}(\Delta, \Delta_0)$ e $\mathcal{BZ}(\Delta, \Delta_0)$

Sia \mathcal{S} una superficie come sopra e si assuma che le isotopie di archi di \mathcal{S} mantengano fissi gli estremi. Sia $\Delta = \{p_1, \dots, p_n\}$ un insieme non vuoto di punti in $\partial\mathcal{S}$, non necessariamente in componenti distinte. Chiamiamo ∂' l'unione delle componenti di \mathcal{S} che contengono punti di Δ e indichiamo con n' il numero di componenti di questo insieme. Chiaramente $\Delta \subset \partial'$. Chiamiamo *arco con punti base in Δ* la classe di isotopia relativa a Δ di un arco $\alpha \subset \mathcal{S}$ di classe C^∞ a tratti tale che ha estremi $p_i, p_j \in \Delta$, con i, j non necessariamente distinti, e α incontra $\partial\mathcal{S}$ solo in p_i e p_j .

Definiamo $\mathcal{AX}(\Delta)$ come il complesso simpliciale di dimensione $2g-2+n'$ i cui k -simplessi sono le classi di isotopia $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_k \rangle$ di archi con punti base in Δ che soddisfano:

- i) $\alpha_i \cap \alpha_j \subset \Delta$ per ogni $i \neq j$,
- ii) $\mathcal{S} - \{\alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_k\}$ è connesso.

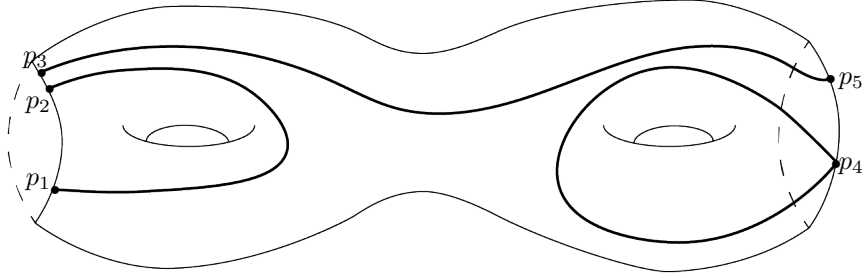


Figura 1.11: Esempi di archi con punti base in Δ

Il complesso $\mathcal{AZ}(\Delta)$ si costruisce con tutti i k -simplessi $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_k \rangle$ che soddisfano la condizione i), pertanto alcuni archi possono sconnettere la superficie. Valgono

Teorema 1.4.1. *Il complesso $\mathcal{AX}(\Delta)$ è omotopicamente equivalente ad un bouquet di sfere di dimensione $2g - 2 + n'$.*

Teorema 1.4.2. *Il complesso $\mathcal{AZ}(\Delta)$ è contraibile se $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$. Se $(g, n) = (0, 1)$ o $(g, n) = (0, 2)$, allora $\mathcal{AZ}(\Delta)$ è omeomorfo ad una sfera di dimensione $q + 2r - 6$, dove $q = |\Delta|$.*

Si dimostra che il Teorema 1.4.2 implica il Teorema 1.4.1. Una dimostrazione di questi due teoremi può essere trovata in [5], sez. 1, p. 218-225, dove nel secondo vengono usati strumenti più sofisticati quali le *laminazioni*. Per approfondimenti si veda [13].

Sia ora Δ_0 un sottoinsieme di Δ , diverso da Δ stesso. Definiamo il complesso $\mathcal{BX}(\Delta, \Delta_0)$ come il sottocomplesso di $\mathcal{AX}(\Delta)$ dato dai simplessi $\{\beta_0, \dots, \beta_k\}$ dove ogni β_i connette un punto di Δ_0 con un punto di $\Delta_1 = \Delta - \Delta_0$. La notazione $\mathcal{BZ}(\Delta, \Delta_0)$ sottintende lo stesso complesso in cui gli archi possono sconnettere la superficie. Diremo inoltre che un arco di $\partial' - \Delta$ è *puro* se ha entrambi gli estremi in Δ_0 o in Δ_1 , altrimenti verrà detto *impuro*. Valgono

Teorema 1.4.3. *Il complesso $\mathcal{BX}(\Delta, \Delta_0)$ è omotopicamente equivalente ad un bouquet di sfere di dimensione $2g - 2 + n'$.*

Teorema 1.4.4. *Il complesso $\mathcal{BZ}(\Delta, \Delta_0)$ è omotopicamente equivalente ad un bouquet di sfere di dimensione $4g + n + n' + 1 + m - 5$, dove m è il numero di archi puri. Se ∂' contiene solo archi puri, allora $\mathcal{BZ}(\Delta, \Delta_0)$ è contraibile.*

Una dimostrazione di entrambi i teoremi si trova in [5], sez. 1, p. 218-225. Il Teorema 1.4.3 viene dimostrato assumendo che valga il Teorema 1.4.4 mentre quest'ultimo viene provato tramite il Teorema 1.4.2.

1.5 Complessi simpliciali di curve

Sia $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{g,n}$ come sopra. Indichiamo con $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{g,n}$ il *complesso simpliciale di curve*, i cui k -simplessi sono classi di isotopia di curve chiuse, semplici e a due a due disgiunte $C = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \subset \mathcal{S}_{g,n}$, per ogni $k \leq g$. Un k -simpleso C come sopra ha C' come faccia se e solo se $C' \subset C$. Il primo ad introdurre questo complesso è stato Harvey in [7], ripreso poi in [6], dove sono mostrati i legami con gli spazi di Teichmüller.

Consideriamo i k -simplessi di \mathcal{Y} del tipo $C = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}\}$ dove $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}\}$ è una famiglia di curve non separanti di \mathcal{S} . L'insieme di tutti questi simplessi forma un sottocomplesso di \mathcal{Y} chiamato *sottocomplesso delle curve non separanti* e indicato con \mathcal{Y}_{nosep} . Scegliendo famiglie di curve separanti $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}\}$ di \mathcal{S} è possibile definire analogamente il *sottocomplesso delle curve separanti*, indicato con \mathcal{Y}_{sep} . Vale il seguente

Teorema 1.5.1. *Sia $\mathcal{S}_{g,n}$ una superficie di genere $g \geq 0$ e con $n \geq 0$ componenti di bordo. Allora*

- 1) *il complesso \mathcal{Y} è $(2g + n - 4)$ -connesso per $n \geq 1$, mentre è $(2g - 3)$ -connesso se $n = 0$;*
- 2) *il sottocomplesso \mathcal{Y}_{nosep} è omotopicamente equivalente ad un bouquet di sfere di dimensione $g - 1$.*

Una dimostrazione del teorema viene data in [5], sez. 1, Teorema 1.2. Si dimostra che l'affermazione 1) implica la 2), mentre la prima viene dimostrata dopo aver definito i complessi $\mathcal{AX}(\Delta)$ e $\mathcal{BX}(\Delta)$ e assumendo il Teorema 1.4.1. Un'altra dimostrazione di questo teorema può essere trovata in [10], in cui si fa uso di strumenti come famiglie di funzioni ad un parametro e punti critici. In [12] è presente una dimostrazione della connessione del complesso eseguita assumendo di conoscere la presentazione del gruppo $\mathcal{M}_{g,n}$.

1.6 I complessi \mathcal{WB} , \mathcal{B} , \mathcal{B}_u e \mathcal{B}_0

Si assuma in questa sezione che \mathcal{S} è tale che $\partial\mathcal{S} \neq \emptyset$ e che in ogni componente di $\partial\mathcal{S}$ vi sia un'involuzione fissata che inverte l'orientazione, indicata con $z \rightarrow \bar{z}$.

Consideriamo due insiemi di vertici. Chiamiamo *vertici bianchi* le classi di isotopia di curve non banali di \mathcal{S} , cioè tutti i vertici del complesso \mathcal{Y} sopra

definito. Chiamiamo *vertici blu* le classi di isotopia con estremi fissati, degli archi α di \mathcal{S} che soddisfino queste tre condizioni:

- i) α è *propriamente immerso* in \mathcal{S} , cioè gli estremi di α coincidono con $\alpha \cap \partial\mathcal{S}$ e α è trasversale a $\partial\mathcal{S}$;
- ii) gli estremi di α sono nella stessa componente di $\partial\mathcal{S}$ e sono del tipo $\{z, \bar{z}\}$, con $z \neq \bar{z}$;
- iii) α è *non banale*, nel senso che non è isotopo a un arco tutto contenuto in $\partial\mathcal{S}$.

Definiamo il *complesso white - blue* $\mathcal{WB} = \mathcal{WB}(\mathcal{S})$ come il complesso simpliciale che ha come k -simplessi insiemi di vertici $\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}$ tali che $\gamma_0, \dots, \gamma_k$ costituiscono singolarmente un vertice bianco o blu, e sono a due a due disgiunti come curve.

Si osservi che \mathcal{Y} è il sottocomplesso di \mathcal{WB} dato dai soli vertici bianchi. Il sottocomplesso dato dai soli vertici blu viene invece chiamato *complesso blue* e indicato con $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{S})$. Definiamo infine il sottocomplesso $\mathcal{B}_u = \mathcal{B}_u(\mathcal{S})$ di \mathcal{B} dato da tutti i vertici blu e i k -simplessi $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$ dove gli archi $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ sono a due a due disgiunti e tali che $S - (\alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_k)$ è ancora connessa.

Vale il seguente

Teorema 1.6.1. *Gli spazi \mathcal{WB} , \mathcal{B} e \mathcal{B}_u sono $(2g - 4 + n)$ -, $(2g - 4 + n)$ - e $(g - 2)$ -connessi rispettivamente. Inoltre, \mathcal{B}_u è omotopicamente equivalente a un bouquet di sfere di dimensione $g - 1$.*

Una dimostrazione di questo risultato viene fornita in [10], sez. 3.1, p. 70-71. Come nel caso precedente, la dimostrazione usa strumenti come famiglie di funzioni a un parametro, punti critici, mappe tra i complessi \mathcal{Y} e \mathcal{WB} , \mathcal{B} , \mathcal{B}_u .

È possibile costruire un complesso più semplice di \mathcal{B}_u chiamato $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(\mathcal{S})$ introdotto sempre in [10], dove viene usato per dimostrare la stabilità dell'omologia di gruppi modulari. Fissiamo un'orientazione di \mathcal{S} e si supponga che $\partial\mathcal{S}$ consista di una sola componente connessa e siano b_0 e b_1 due punti di $\partial\mathcal{S}$. I vertici del complesso sono classi di isotopia di archi α di \mathcal{S} che congiungono b_0 e b_1 , dove l'isotopia mantiene fissi gli estremi e gli archi soddisfano le condizioni i), iii) prima enunciate. Un insieme di vertici $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$ formano un k -simplex se sono verificate le seguenti condizioni:

- 1) $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ sono a due a due disgiunte,

- 2) $\mathcal{S} - (\alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_k)$ è connessa,
- 3) si ordinano gli archi in due modi distinti, in senso antiorario intorno a b_0 e in senso orario intorno a b_1 e si scelgono gli insiemi $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$ che ammettono lo stesso ordine in entrambi i sensi.

Anche in questo caso si ha

Teorema 1.6.2. *Lo spazio \mathcal{B}_0 è omotopicamente equivalente a un bouquet di sfere di dimensione $g - 1$.*

Per una dimostrazione si rimanda di nuovo a [10], sez. 3.6, Teorema 3.7.

Capitolo 2

Connessione e semplice connessione del complesso dei sistemi di taglio

2.1 Il complesso $\mathcal{X}_{1,n}$

Sia $\mathcal{S}_{g,n}$ una superficie compatta, connessa e orientabile di genere $g > 0$ e con $n \geq 0$ componenti di bordo. Indichiamo con $\overline{\mathcal{S}}_g$ la superficie ottenuta da $\mathcal{S}_{g,n}$ incollando un disco lungo ogni componente di bordo. Una curva è sempre intesa chiusa, semplice ed essenziale. Date α e β curve, le notazioni $|\alpha \cap \beta|$ e $i(\alpha, \beta)$ corrispondono rispettivamente al numero geometrico di intersezioni e al valore assoluto del numero algebrico di intersezioni. Due curve α e β che si incontrano almeno una volta sono intese trasversali tra loro, cioè che i rispettivi vettori tangenti nei punti di intersezione sono linearmente indipendenti. La notazione $[\alpha]$ per una curva α indica la classe di omologia di α in $H_1(\overline{\mathcal{S}}, \mathbb{Z})$.

Sia $\mathcal{X}_{g,n}$ il complesso dei sistemi di taglio definito nel primo capitolo di questa tesi. Il risultato principale di questa sezione è

Teorema 2.1.1. *Il complesso $\mathcal{X}_{1,n}$ è connesso e semplicemente connesso.*

La dimostrazione di questo teorema è divisa in due parti. Nella prima si prova la connessione dimostrando che date due qualunque curve esiste un cammino in $\mathcal{X}_{1,n}$ che connette i vertici corrispondenti alle curve date. La semplice connessione viene provata per induzione sul *raggio di un cammino intorno ad una curva*.

Definizione 2.1.2. Sia $p = (v_1, \dots, v_k)$ un cammino in $\mathcal{X}_{g,n}$, cioè ogni v_i è un sistema di taglio e le coppie (v_i, v_{i+1}) sono connesse da un movimento semplice e quindi uno spigolo. Sia α una curva fissata di un qualche vertice v_j , $1 \leq j \leq k$. definiamo la *distanza di α da un vertice v_i* come

$$d(\alpha, v_i) = \min\{|\alpha \cap \beta| : \beta \in v_i\},$$

mentre chiamiamo il *raggio di p intorno ad α* il numero

$$r(p, \alpha) = \max_i d(\alpha, v_i).$$

Un cammino p i cui vertici contengono tutti una curva fissa α viene detto *α -segmento*. Se i vertici del cammino hanno più curve fisse si scrive *$(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ -segmento*. Si osservi che nel caso $g = 1$ i segmenti corrispondono a singoli vertici.

Definizione 2.1.3. Due curve α e β hanno un *eccesso di intersezione* se esistono due curve α' e β' isotope rispettivamente ad α e β , tali che $|\alpha \cap \beta| > |\alpha' \cap \beta'|$. Due curve α e β con $|\alpha \cap \beta| \geq 2$ formano un *bigono* se esistono due archi a di α e b di β che si incontrano solo nei loro estremi comuni e non incontrano altri punti di α e β e tali che $a \cup b$ è bordo di un disco in $\mathcal{S}_{g,n}$, eventualmente con buchi. Il disco viene chiamato *bigono* e può essere rimosso sostituendo l'arco a di α con l'arco b di β come in Figura 2.1.

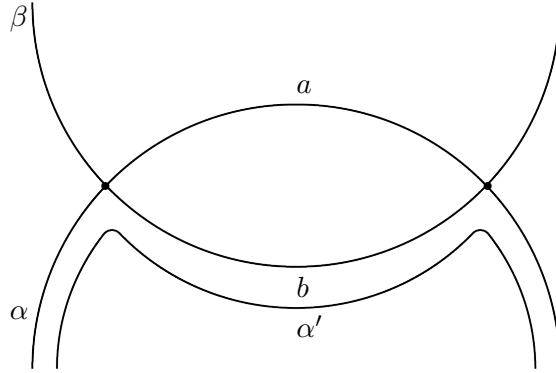


Figura 2.1: Un bigono tra le curve α e β

Lemma 2.1.4. Siano α e β due curve di $\mathcal{S}_{g,n}$ che hanno un eccesso di intersezione. Allora, α e β formano un bigono.

Per una dimostrazione si rimanda a [8], Lemma 3.1. Segue

Corollario 2.1.5. *Sia fissata una metrica riemanniana in $\mathcal{S}_{g,n}$. Due geodetiche minimali chiuse e semplici di $\mathcal{S}_{g,n}$ non hanno eccesso di intersezione. In particolare, sostituendo due curve con le rispettive geodetiche nella stessa classe di isotopia, il numero dei punti di intersezione tra loro non aumenta.*

Dimostrazione. Per assurdo, poniamo che α e β siano due geodetiche semplici e chiuse che hanno un eccesso di intersezione. In particolare, supponiamo che vi siano due archi a di α e b di β che formano un bigono e indichiamo con $l(a)$ e $l(b)$ la loro lunghezza. Supponiamo dapprima che $l(a) = l(b)$ e rimuoviamo il bigono come in Figura 2.1, sostituendo l'arco a con un arco a' parallelo a b , ottenendo una curva α' . Segue che $l(a') < l(a) = l(b)$, cioè α' ha lunghezza minore di α , assurdo perché questa è una geodetica. Il caso $l(a) \neq l(b)$ si discute allo stesso modo, sostituendo entrambi gli archi a e b . \square

Lemma 2.1.6. *Sia fissata una metrica riemanniana su $\mathcal{S}_{g,n}$ e sia A un insieme finito di curve chiuse e semplici di $\mathcal{S}_{g,n}$. Siano $\alpha, \beta \in A$ tali che formano un bigono minimale, cioè che non contiene altri bigoni all'interno. Sia inoltre α' la curva che si ottiene a partire da α rimuovendo il bigono minimale con β e sostituendolo con l'arco della geodetica nella classe di isotopia di α . Allora,*

$$|\alpha \cap \alpha'| = 0, \quad |\beta \cap \alpha'| < |\beta \cap \alpha| \quad e \quad |\gamma \cap \alpha'| \leq |\gamma \cap \alpha|$$

per ogni $\gamma \in A - \{\alpha, \beta\}$. In particolare, $[\alpha] = [\alpha']$ e se $|\gamma \cap \alpha| = 1$, allora $|\gamma \cap \alpha'| = 1$.

Dimostrazione. Siano a e b gli archi di α e β che formano il bigono come nelle ipotesi. Dalla minimalità, si ha che una qualunque altra curva $\gamma \in A$ può al massimo intersecare il bigono lungo archi che incontrano a e b una sola volta. Segue che $|\alpha \cap \gamma|$ non cambia con la rimozione del bigono, può al più diminuire nella sostituzione degli archi delle curve con gli archi delle geodetiche. Chiaramente α e α' sono disgiunte e omologhe nella superficie chiusa $\overline{\mathcal{S}}_g$ e passando ad α' vengono rimossi almeno due punti di intersezione tra α e β . \square

D'ora in poi sia $g = 1$ fino alla fine della sezione. Data una base per $H_1(\overline{\mathcal{S}}_1, \mathbb{Z})$, la classe di omologia $[\alpha]$ di una curva α è definita da una coppia di interi primi tra loro a meno del segno. Dati $[\alpha] = (a_1, a_2)$ e $[\beta] = (b_1, b_2)$, allora $i(\alpha, \beta) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$. Se α e β sono geodetiche in \mathcal{S}_1 allora $|\alpha \cap \beta| =$

$i(\alpha, \beta)$. Lo stesso risultato vale anche per due curve che non formano bigoni e che quindi non hanno eccesso di intersezione su $\mathcal{S}_{1,n}$.

Lemma 2.1.7. *Siano α e β due curve non separanti di $\mathcal{S}_{1,n}$ tali che $|\alpha \cap \beta| = k \neq 1$. Allora esiste una curva δ non separante tale che se $k = 0$ allora $|\delta \cap \alpha| = |\delta \cap \beta| = 1$, mentre se $k > 1$ allora $|\delta \cap \alpha| < k$ e $|\delta \cap \beta| < k$.*

Dimostrazione. Fissiamo un'orientazione di α e β . Se $|\alpha \cap \beta| = 0$, allora le due curve sono isotope su \mathcal{S}_1 e sconnettono la superficie in due componenti connesse \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Scegliamo due punti P e Q su α e β rispettivamente, e uniamoli con archi semplici in \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . L'unione degli archi formano la curva δ cercata. Se $k > 1$ e le due curve hanno un eccesso di intersezione su \mathcal{S}_1 , allora formano un bigono su \mathcal{S} . Rimuovendo il bigono si può ridurre il numero delle intersezioni dal Lemma 2.1.6. Se non vi sono bigoni, allora il numero geometrico e algebrico di intersezione coincidono. In particolare tutte le intersezioni sono dello stesso segno. Scegliamo ora due punti di intersezione consecutivi su β . Costruiamo la curva δ come in Figura 2.2. Prendiamo il primo tra i due punti che β incontra secondo l'orientazione fissata e senza incrociare β seguiamo α parallelamente fino a raggiungere il secondo punto. Da qui si incrocia β una volta e si chiude la curva. La curva δ così costruita è non separante e tale che $|\delta \cap \alpha| = 1$ e $|\delta \cap \beta| < k$.

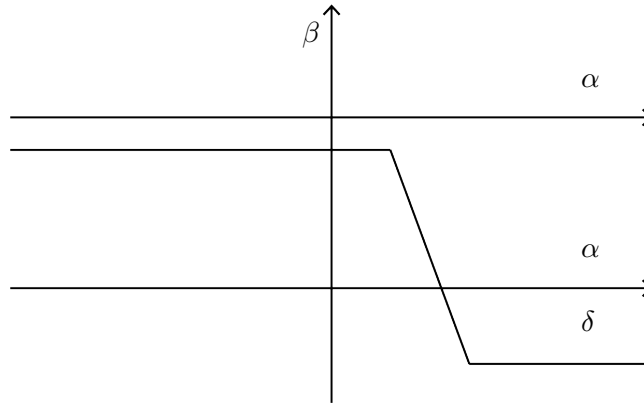


Figura 2.2: Costruzione della curva δ

□

Corollario 2.1.8. *Il complesso dei sistemi di taglio $\mathcal{X}_{1,n}$ è connesso.*

Dimostrazione. Un sistema di taglio di $\mathcal{S}_{1,n}$ corrisponde alla classe di isotopia di una sola curva. Se due curve si incontrano una sola volta, allora sono connesse da uno spigolo. Se le due curve α e β sono disgiunte, dal Lemma 2.1.7 esiste δ tale che $\langle \alpha \rangle \rightarrow \langle \delta \rangle \rightarrow \langle \beta \rangle$. Se $|\alpha \cap \beta| = k > 1$, applicando di nuovo il Lemma 2.1.7 si ricava per induzione la tesi. \square

Bisogna ora provare che i cammini chiusi di $\mathcal{X}_{1,n}$ sono omotopicamente nulli.

Lemma 2.1.9. *Un cammino chiuso $p = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_1)$ tale che $|\delta_2 \cap \delta_4| = 0$ è omotopicamente nullo.*

Dimostrazione. Sia $\beta = T_{\delta_2}^{\pm 1}(\delta_3)$ l'immagine di δ_3 tramite l'avvitamento di Dehn intorno δ_2 . Si osservi che β può esser vista come $\delta_2 \cup \delta_3$ al di fuori di un intorno sufficientemente piccolo di $\delta_2 \cap \delta_3$. Da questo segue che $|\beta \cap \delta_2| = 1$, $|\beta \cap \delta_3| = 1$ e $|\beta \cap \delta_4| = 1$. Allora, il cammino $p' = (\delta_1, \delta_2, \beta, \delta_4, \delta_1)$ è chiuso ed omotopo a p perché $p - p'$ si divide nell'unione dei due triangoli $t_1 = (\beta, \delta_2, \delta_3, \beta)$ e $t_2 = (\beta, \delta_3, \delta_4, \beta)$. Si ha inoltre che $i(\beta, \delta_1) = |i(\delta_3, \delta_1) \pm i(\delta_2, \delta_1)| = |i(\delta_3, \delta_1) \pm 1|$, quindi scegliendo opportunamente i segni si ha $i(\delta_3, \delta_1) > i(\beta, \delta_1)$ a meno che $i(\delta_3, \delta_1) = 0$. Possiamo assumere per induzione che $i(\delta_3, \delta_1) = 0$. Se $|\delta_1 \cap \delta_3| > 0$ allora δ_1 e δ_3 hanno un eccesso di intersezione in $\overline{\mathcal{S}}_1$ e formano un bigono in $\overline{\mathcal{S}}_1$. Rimuovendo il bigono da δ_3 , dal Lemma 2.1.6 otteniamo una nuova curva β tale che $[\beta] = [\delta_3]$, $|\beta \cap \delta_3| = 0$, $|\beta \cap \delta_1| < |\delta_3 \cap \delta_1|$ e $|\beta \cap \delta_i| = |\delta_3 \cap \delta_i|$ per $i \neq 1$. Il cammino chiuso $p' = (\delta_1, \delta_2, \beta, \delta_4, \delta_1)$ è tale che $p - p' = (\beta, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \beta)$ con $|\beta \cap \delta_3| = 0$ e $|\delta_2 \cap \delta_4| = 0$. Per induzione è sufficiente assumere $|\delta_3 \cap \delta_1| = 0$. Ponendo poi $\beta = T_{\delta_2}(\delta_3)$, allora β interseca ognuna delle quattro curve una volta, quindi il cammino p è somma di quattro triangoli, cioè è omotopicamente nullo in $\mathcal{X}_{1,n}$. \square

Lemma 2.1.10. *Se $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ è un cammino chiuso, allora esiste un cammino $p' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_k)$ omotopo a p in $\mathcal{X}_{1,n}$, $[\alpha_i] = [\alpha'_i]$ per ogni i e l'insieme $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ non forma bigoni.*

Dimostrazione. Supponiamo che due curve del cammino p formino un bigono. Allora esiste anche un bigono minimale dato dagli archi di due curve α_i e α_j . Dal Lemma 2.1.6, rimuovendo il bigono da α_i otteniamo una curva α'_i disgiunta da α_i tale che $[\alpha_i] = [\alpha'_i]$, $|\alpha_j \cap \alpha_i| > |\alpha_j \cap \alpha'_i|$ e $|\alpha_k \cap \alpha'_i| \leq |\alpha_k \cap \alpha_i|$ per ogni altra curva α_k . Segue che rimpiazzando α_i con α'_i otteniamo un nuovo cammino p' con un numero minore di punti di intersezione tra le curve. La

differenza tra i due cammini è il cammino chiuso $q = (\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha'_i, \alpha_{i-1})$ che è omotopicamente nullo per il Lemma 2.1.9. Allora, il cammino p' è omotopo a p in $\mathcal{X}_{1,n}$. Proseguendo per induzione sul numero totale di punti di intersezione tra coppie di curve di p si ricava la tesi. \square

Possiamo ora provare che $\mathcal{X}_{1,n}$ è semplicemente connesso.

Dimostrazione. Sia $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_1)$ un cammino chiuso in $\mathcal{X}_{1,n}$. Dal Lemma 2.1.10 possiamo assumere che il cammino non ha bigoni. Dal Lemma 2.1.4 non si ha eccesso di intersezioni su $\overline{\mathcal{S}}_1$, da cui $|\alpha_i \cap \alpha_j| = i(\alpha_j, \alpha_i)$. Sia $m = r(p, \alpha_1) = \max\{i(\alpha_1, \alpha_j) | j = 1, \dots, k\}$ il raggio di p intorno ad α_1 . Supponiamo che $m = 1$. Due curve disgiunte non banali in $\overline{\mathcal{S}}_1$ sono omologhe e due curve rappresentanti la stessa classe di omologia hanno numero di intersezione algebrica nullo. Segue che due curve consecutive in un cammino non possono essere entrambe disgiunte da α_1 . Se $k > 4$ allora $|\alpha_1 \cap \alpha_3| = 1$ oppure $|\alpha_1 \cap \alpha_4| = 1$. Otteniamo uno spigolo che divide p in due cammini più corti di raggio 1. Se $k = 4$ e $|\alpha_1 \cap \alpha_3| = 0$, dal Lemma 2.1.9 p è omotopicamente nullo. Se $k = 3$ allora p è un cammino triangolare. Sia $m > 1$. Per induzione possiamo assumere che ogni cammino di raggio minore di m è omotopicamente nullo e che ogni cammino di raggio m che ha un numero minore di curve α_j , con $|\alpha_j \cap \alpha_1| = m$, è anch'esso omotopicamente nullo. Scegliamo il più piccolo indice i tale che $i(\alpha_1, \alpha_i) = m$. Allora $i(\alpha_1, \alpha_{i-1}) < m$ e $i(\alpha_1, \alpha_{i+1}) \leq m$. Si ricordi che la classe di omologia di una curva è rappresentato da una coppia di interi primi tra loro (a, b) e che date due classi $(a, b), (c, d)$, l'intersezione algebrica è data da $i((a, b), (c, d)) = |ad - bc|$. Nel seguito, le classi di omologia e i numeri di intersezione algebrica sono intesi a meno del segno. Scegliamo una base di $H_1(\overline{\mathcal{S}}_1)$ che contenga la curva α_1 in modo che $[\alpha_1] = (1, 0)$, e poniamo $[\alpha_{i-1}] = (a, b)$, $[\alpha_i] = (p, m)$ e $[\alpha_{i+1}] = (c, d)$. Allora,

$$am - bp = \pm 1, \quad cm - dp = \pm 1, \quad |b| < m, |d| \leq m,$$

da cui $m(ad - bc) = (\pm d \pm b)$. Da $|b| + |d| < 2m$, segue che $|ad - bc| = 1$ oppure $ad - bc = 0$. Nel primo caso $i(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}) = |\alpha_{i-1} \cap \alpha_{i+1}| = 1$. Possiamo rimuovere il triangolo $t = (\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i-1})$ ottenendo un cammino omotopicamente nullo per ipotesi induttiva. Se $ad - bc = 0$ allora $i(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}) = |\alpha_{i-1} \cap \alpha_{i+1}| = 0$. Sia $\beta = T_{\alpha_{i-1}}^{\pm 1}(\alpha_i)$. Allora $|\beta \cap \alpha_{i-1}| = 1$ e $|\beta \cap \alpha_{i+1}| = 1$. Possiamo sostituire α_i con β ottenendo un nuovo cammino chiuso p' tale che la differenza $p - p' = (\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \beta, \alpha_{i-1})$ è omotopicamente nulla per il Lemma 2.1.9, da cui p' è omotopo a p . Scegliendo in modo opportuno il segno dell'avvitamento di Dehn, si ha che $i(\beta, \alpha_1) < m$. Si può avere $|\beta \cap \alpha_1| \geq m$. Possiamo rimuovere i bigoni grazie al Lemma 2.1.10

e quindi eliminare gli eccessi di intersezione. Si ottiene così un cammino omotopo che è omotopicamente nullo per ipotesi induttiva. □

2.2 Cammini di raggio 0

In questa sezione e la successiva si assume che $\mathcal{S}_{g,n}$ è tale che $g > 1$, $n \geq 0$. Per brevità scriviamo $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{g,n}$. Se il complesso in questione corrisponde a una superficie diversa da $\mathcal{S}_{g,n}$, questo verrà specificato. Dalla sezione precedente possiamo assumere la seguente

Ipotesi Induttiva 2.2.1. Il complesso dei sistemi di taglio di una superficie di genere minore di g è connesso e semplicemente connesso.

Si vuole provare che ogni cammino chiuso in \mathcal{X} è omotopicamente nullo. Iniziamo provando questo risultato per cammini di raggio 0, cioè cammini i cui vertici hanno almeno una curva disgiunta da quella data. I cammini di raggio 0 più semplici sono i segmenti. Ricordiamo inoltre che date due curve α e β disgiunte e non separanti di \mathcal{S} si ha che $\alpha \cup \beta$ non separa la superficie se e solo se $[\alpha] \neq [\beta]$. In questo caso α e β possono trovarsi nello stesso sistema di taglio di \mathcal{S} .

Lemma 2.2.2. *Un segmento chiuso è omotopicamente nullo in \mathcal{X} .*

Dimostrazione. Sia p un α -segmento in $\mathcal{X}_{g,n}$. Tagliando la superficie \mathcal{S} lungo la curva α , che equivale a rimuovere α dai vertici di p , si ottiene un nuovo cammino chiuso $p' \subset \mathcal{X}_{g-1,n}$ dato dalle curve rimanenti di p . Dall'Ipotesi Induttiva 2.2.1, p' è somma di cammini descritti nelle formule (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.3) definiti nella sezione 1.2 di questa tesi. Aggiungendo la curva α ai vertici di p' e ai vertici dei cammini sopra citati, otteniamo una suddivisione del cammino p in cammini chiusi omotopicamente nulli. □

Vale inoltre

Lemma 2.2.3. *Se due vertici di \mathcal{X} hanno in comune una o più curve, questi possono essere connessi da un cammino i cui vertici contengono le curve fissate.*

Dimostrazione. Siano v e w i vertici in questione. Tagliando la superficie \mathcal{S} lungo le curve in comune a v e w , si ha che le curve rimanenti ai due

vertici formano due sistemi di taglio v' e w' della superficie di genere minore. Dall'Ipotesi Induttiva 2.2.1 esiste un cammino $p' = (v'_0, \dots, v'_k)$ tale che $v'_0 = v'$ e $v'_k = w'$. Aggiungendo le curve in comune rimosse all'inizio, si ha che esiste un cammino $p = (v_0, \dots, v_k)$ tale che $v_0 = v$ e $v_k = w$. \square

Lemma 2.2.4. *Siano α_1, α_2 e α_3 tre curve disgiunte tali che l'unione di due qualunque di loro non sconnette \mathcal{S} ma l'unione di tutte e tre sconnette la superficie. Allora esistono tre curve disgiunte β_1, β_2 e β_3 e un cammino chiuso*

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \rightarrow \langle \alpha_1, \beta_2 \rangle \rightarrow \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle \rightarrow \langle \beta_1, \alpha_3 \rangle \rightarrow \\ \rightarrow \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle \rightarrow \langle \alpha_2, \beta_3 \rangle \rightarrow \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

omotopicamente nullo in \mathcal{X} .

Dimostrazione. Sia $\gamma_3, \dots, \gamma_g$ un sistema di taglio della superficie $\mathcal{S} - (\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3)$, cioè un sistema di curve che non sconnette ulteriormente la superficie. Allora $\langle \alpha_1, \alpha_2, \gamma_3, \dots, \gamma_g \rangle$ è ancora un sistema di taglio di \mathcal{S} . Siano \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 le componenti ottenute tagliando \mathcal{S} lungo tutte le α_i e le γ_j , per ogni i e j . Si osservi che un arco che connette componenti diverse del bordo non sconnette la superficie. Possiamo allora trovare tre archi disgiunti in \mathcal{S}_1 , b_1 che connette α_1 e α_2 , b_2 che connette α_2 e α_3 e b_3 che connette α_3 e α_1 . Allo stesso modo si trovano b'_1, b'_2 e b'_3 in \mathcal{S}_2 con gli stessi estremi di b_1, b_2 e b_3 rispettivamente. Incollando \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 lungo i rispettivi bordi, otteniamo delle curve β_1, β_2 e β_3 che soddisfano il cammino p in (2.2.1). Inoltre le curve β_2 e β_3 sono disgiunte e $[\beta_2] \neq [\beta_3]$. Per provare che il cammino è omotopicamente nullo in \mathcal{X} scegliamo una curva $\delta = T_{\alpha_2}(\beta_1)$. Allora, $|\delta \cap \alpha_1| = |\delta \cap \alpha_2| = |\delta \cap \beta_1| = |\delta \cap \beta_2| = 1$ e $|\delta \cap \alpha_3| = |\delta \cap \beta_3| = 0$. In Figura 2.3 si può vedere come la curva δ divide il cammino p in somma di cammini descritti nelle formule (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.3). \square

Proposizione 2.2.5. *Se p è un cammino chiuso di raggio 0 intorno a una curva α , allora p è omotopicamente nullo.*

Dimostrazione. Sia v_0 un vertice di p contenente la curva α . Proviamo la proposizione per induzione sul numero di segmenti che come elemento fisso hanno una curva disgiunta da α . Consideriamo l' α -segmento massimale di p che contiene il vertice v_0 , indicato con p_1 . Se questo coincide con tutto p allora, dal Lemma 2.2.2 segue la tesi. Supponiamo che p e il primo segmento

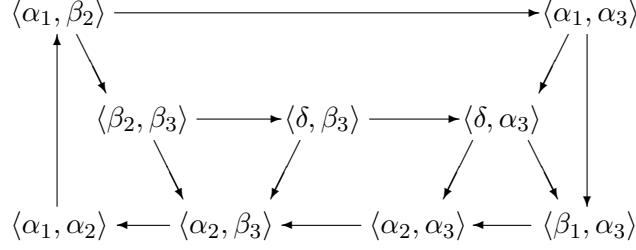


Figura 2.3: Cammino esagonale in $\mathcal{X}_{g,n}$

non coincidano e sia v_1 l'ultimo vertice di p_1 . Il vertice successivo contiene una curva β disgiunta da α tale che β è la curva fissa del segmento successivo chiamato p_2 . Siccome $|\alpha \cap \beta| = 0$, il movimento semplice tra v_1 e il vertice successivo non coinvolge β quindi anche v_1 contiene β . Sia v_2 l'ultimo vertice di p_2 . Se in p vi sono solo due segmenti, allora v_2 contiene sia α che β . Dal Lemma 2.2.3, esiste un (α, β) -segmento che connette v_1 e v_2 . Allora p è somma di un α -segmento chiuso e di un β -segmento chiuso, entrambi omotopicamente nulli per il Lemma 2.2.2. Possiamo quindi assumere che vi sia un terzo segmento. Il vertice \tilde{v} successivo a v_2 contiene una curva γ disgiunta da α tale che γ è la curva fissa del terzo segmento p_3 . Sia v_3 il vertice finale di p_3 . Vogliamo ridurre il numero di segmenti fino a 2 per poi poter applicare l'osservazione precedente. Distinguiamo tre casi.

Caso 1. Il vertice v_2 non contiene la curva γ . Siccome \tilde{v} contiene γ e non contiene β , si deve avere $|\beta \cap \gamma| = 1$. Sia \mathcal{S}_1 la superficie di genere $g - 1$ ottenuta tagliando \mathcal{S} lungo $\beta \cup \gamma$. I vertici v_2 e \tilde{v} hanno $g - 1$ curve in comune che formano un sistema di taglio u di \mathcal{S}_1 . L'unione $\beta \cup \gamma$ non sconnette $\mathcal{S} - \alpha$, quindi α non sconnette \mathcal{S}_1 e appartiene ad un sistema di taglio u' di \mathcal{S}_1 . I vertici u e u' possono esser connessi da un cammino q nel complesso dei sistemi di taglio di \mathcal{S}_1 . Se aggiungiamo β , rispettivamente γ , a tutti i vertici di q otteniamo un cammino q_2 , rispettivamente q_1 . Il cammino q_2 connette v_2 ad un vertice u_2 contenente α e β , mentre il cammino q_1 connette \tilde{v} con un vertice v_1 contenente α e γ . I vertici corrispondenti di q_1 e q_2 sono connessi con uno spigolo quindi il rettangolo centrale in Figura 2.4 si divide in somma di cammini quadrati e quindi è omotopicamente nullo. Possiamo connettere v_1 a u_2 tramite un (α, β) -segmento così il triangolo in Figura 2.4 diventa un

β -segmento chiuso, e quindi è omotopicamente nullo per il Lemma 2.2.2. La parte di p tra v_1 e \tilde{v} può essere rimpiazzata dal cammino inferiore in Figura 2.4. Otteniamo un nuovo cammino p' che non ha β -segmenti, cioè ha un numero minore di segmenti ed è omotopo a p in \mathcal{X} .

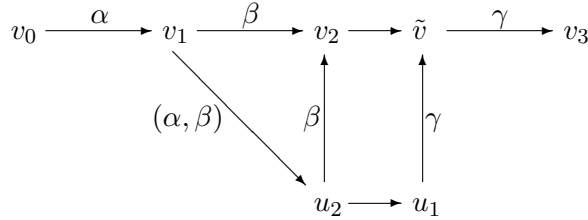


Figura 2.4: Cammini di raggio 0, caso 1

Caso 2. Il vertice v_2 contiene γ e $\alpha \cup \gamma$ non sconnette \mathcal{S} . Se esiste un vertice v che contiene α e β e γ , allora potremmo connetterlo a v_1 e v_2 per il Lemma 2.2.3. Otterremo quindi un segmento chiuso e il cammino rimanente avrebbe un segmento in meno. Altrimenti $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ sconnette \mathcal{S} e possiamo applicare il Lemma 2.2.4. Esistono dunque dei vertici w_1 contenente α e β , w_2 contenente β e γ e w_3 contenente α e γ , ed esistono un β -segmento tra w_1 e w_2 , un γ -segmento tra w_2 e w_3 e un α -segmento tra w_3 e w_1 . Possiamo connettere v_1 a w_1 con un (α, β) -segmento e v_2 e w_2 con un (β, γ) -segmento. Allora il secondo segmento di p può essere rimpiazzato da un α -segmento e un γ -segmento, e la differenza è un β -segmento chiuso più un cammino esagonale del tipo (2.2.1).

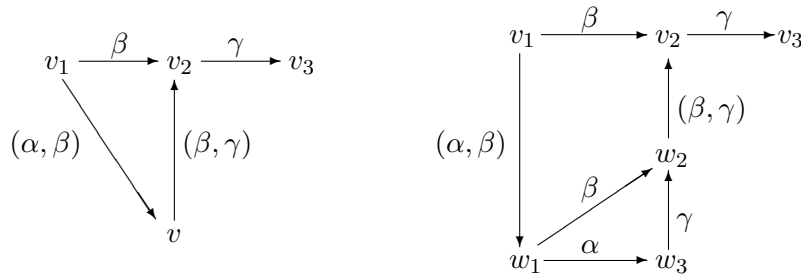


Figura 2.5: Cammini di raggio 0, caso 2

Caso 3a. Il vertice v_2 contiene g e $\alpha \cup \gamma$ sconnette \mathcal{S} in due superfici \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Se vi fossero solo tre segmenti allora, come nel vertice v_1 , il primo vertice del primo segmento deve contenere sia α che γ e la loro unione non sconetterebbe \mathcal{S} , contraddicendo le nostre ipotesi. In particolare segue che ogni cammino chiuso di raggio 0 con al più tre segmenti, dove la curva comune di ogni segmento è disgiunta da una curva fissa del primo segmento, è omotopicamente nullo. Possiamo assumere che il cammino p ha un quarto segmento con curva fissa δ disgiunta da α . Siccome $[\gamma] = [\alpha]$, non possiamo avere $|\gamma \cap \delta| = 1$. Quindi δ non è coinvolta nel movimento semplice da v_3 al vertice successivo contenente δ . In particolare $[\gamma] \neq [\delta]$ e $[\alpha] \neq [\delta]$. Possiamo assumere che β sia in \mathcal{S}_1 . Se δ si trova in \mathcal{S}_2 , allora esiste un vertice w che contiene α e β e δ . Possiamo connettere w a v_1 con (α, β) -segmento, w a v_2 con un β -segmento e w a v_3 con δ -segmento. Otteniamo così un nuovo cammino omotopo a p che non contiene β -segmenti né γ -segmenti come mostrato in Figura 2.6.

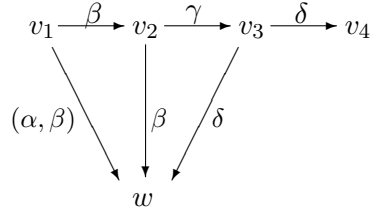


Figura 2.6: Cammini di raggio 0, caso 3a

Caso 3b. Supponiamo che δ sia in \mathcal{S}_1 . Si consideri il complesso dei sistemi di taglio \mathcal{X}_1 di \mathcal{S}_1 e si scelgano due vertici s, s' di \mathcal{X}_1 tali che s contiene la curva δ e s' contiene β . Sia q un cammino in \mathcal{X}_1 che connette s a s' . Sia t un vertice fissato del complesso dei sistemi di taglio \mathcal{X}_2 di \mathcal{S}_2 , se \mathcal{X}_2 è non vuoto. Aggiungiamo α e tutte le curve di t ad ogni vertice del cammino q ricavando un α -segmento in \mathcal{X} che connette un vertice w_2 contenente δ ad un vertice w'_2 contenente β . Analogamente aggiungiamo la curva γ e le curve di t ad ogni vertice di q ottenendo un γ -segmento in \mathcal{X} che connette un vertice w_3 contenente δ ad un vertice w'_3 contenente β . Connettiamo ora v_1 a w_2 con un α -segmento, v_2 a w'_2 con un β -segmento, v_3 a w'_3 con γ -segmento e v_4 e w_3 con un δ -segmento, come in Figura 2.7. Due vertici alla stessa altezza nei segmenti verticali in Figura 2.7 hanno una curva δ_i in comune, una curva di un vertice di q disgiunta da α e γ , e possono quindi essere connessi con

un δ_i -segmento. Si ottiene una “scala” tale che ogni rettangolo di questa ha raggio 0 intorno a γ e consiste di soli tre segmenti, quindi è omotopicamente nullo. Ogni altro cammino chiuso in Figura 2.7 omotopicamente nullo in modo analogo. Otteniamo un nuovo cammino omotopo a p che non contiene β -segmenti né γ -segmenti.

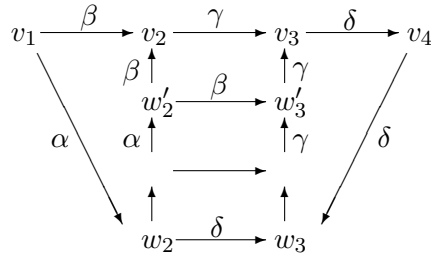


Figura 2.7: Cammini di raggio 0, caso 3b

□

2.3 Caso generale

Passiamo ora al caso generale. Si vuole provare per induzione sul raggio dei cammini chiusi che

Teorema 2.3.1. *Il complesso $\mathcal{X}_{g,n}$ è connesso e semplicemente connesso.*

Dalla sez.2.2 possiamo assumere

Ipotesi Induttiva 2.3.2. Un cammino chiuso di raggio minore di m è omotopicamente nullo.

Vogliamo provare che un cammino chiuso p di raggio m intorno ad una curva α è omotopicamente nullo. L'idea alla base di questa dimostrazione è quella di costruire degli “short-cut”, cioè dei cammini che dividono p e sono “vicini” ad α tramite un β -segmento fissato. Il primo passo è costruire una curva intermedia.

Lemma 2.3.3. *Siano γ_1 e γ_2 due curve non separanti di \mathcal{S} tali che $|\gamma_1 \cap \gamma_2| = n > 1$. Allora esiste una curva non separante δ tale che $|\gamma_1 \cap \delta| < n$ e $|\gamma_2 \cap \delta| < n$. Supponiamo inoltre di avere due curve non separanti α e β e un numero intero $m > 0$ tale che $|\alpha \cap \beta| \leq m$, $|\gamma_1 \cap \alpha| < m$, $|\gamma_2 \cap \alpha| \leq m$ e $|\gamma_1 \cap \beta| = |\gamma_2 \cap \beta| = 0$. Allora esiste una curva δ come sopra che soddisfa anche $|\delta \cap \alpha| < m$ e $|\delta \cap \beta| = 0$.*

Dimostrazione. Orientiamo le curve γ_1 e γ_2 e dividiamo l'unione $\gamma_1 \cup \gamma_2$ in un'unione diversa di curve chiuse e orientate come segue. Scegliamo un punto di intersezione $P_1 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$. Le curve γ_1 e γ_2 dividono un intorno regolare del punto P_1 in quattro regioni. Scegliamo quella sul lato di γ_1 dopo che γ_2 l'ha incrociata e sul lato di γ_2 prima che incrocia γ_1 . Tracciamo una curva seguendo parallelamente γ_1 fino al punto di intersezione successivo P_2 . Senza incrociare γ_2 in P_2 , seguiamo γ_2 fino ad arrivare al punto di partenza. Otteniamo così una curva δ_1 .

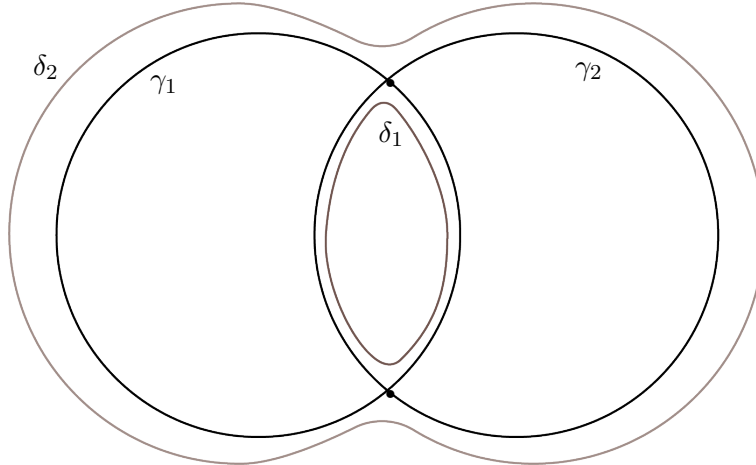


Figura 2.8: Costruzione delle curve δ_1 e δ_2 nel caso $n = 2$

Cominciamo ora vicino a P_2 procedendo come sopra: seguiamo γ_1 fino al prossimo punto di intersezione P_3 , che eventualmente può essere P_1 , e poi seguiamo γ_2 senza incrociarla fino al punto di partenza, ottenendo una curva δ_2 . Continuando per ogni coppia consecutiva di punti in $\gamma_1 \cap \gamma_2$, ricaviamo una curva δ_i che incrocia γ_1 vicino $(\gamma_1 \cap \gamma_2) - \{P_i\}$, e incrocia γ_2 vicino $(\gamma_1 \cap \gamma_2) - \{P_{i+1}\}$. Quindi le curve δ_i incontrano entrambe le curve meno di m di volte. Sia $\bar{\gamma}$ la classe di omologia della curva orientata γ in $H_1(\bar{\mathcal{S}}, \mathbb{Z})$.

Si ha che

$$\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 = \bar{\delta}_1 + \cdots + \bar{\delta}_k.$$

Ripetiamo ora la stessa costruzione delle δ_i ma con γ_2 con orientazione opposta. Si hanno così delle curve $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ tali che

$$\bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2 = \bar{\varepsilon}_1 + \cdots + \bar{\varepsilon}_r.$$

Inoltre $\bar{\delta}_1 - \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\gamma}_2$. Da queste uguaglianze in $H_1(\bar{\mathcal{S}}, \mathbb{Z})$ segue

$$\bar{\varepsilon}_1 + \sum_{i \neq 1} \bar{\delta}_i = \bar{\gamma}_1, \quad \bar{\delta}_1 + \sum_{i \neq 1} \bar{\varepsilon}_i = \bar{\gamma}_1, \quad \sum_{i \neq 1} \bar{\delta}_i - \sum_{i \neq 1} \bar{\varepsilon}_i = \bar{\gamma}_2.$$

Si ricordi che una curva chiusa e semplice sconnette \mathcal{S} se e solo se rappresenta lo 0 in $H_1(\bar{\mathcal{S}}, \mathbb{Z})$. Siccome γ_1 e γ_2 sono non separanti segue che o δ_1 e qualche $\delta_i, i \neq 1$ sono non separanti, oppure ε_1 e qualche $\varepsilon_i, i \neq 1$ sono non separanti. Ognuna di queste incontra γ_1 e γ_2 meno di n volte quindi può essere scelta come la δ della tesi. Se vi sono inoltre α e β e un intero $m > 0$ come nelle ipotesi, allora

$$|\gamma_1 \cap \alpha| + |\gamma_2 \cap \alpha| = \sum |\delta_i \cap \alpha| = \sum |\varepsilon_i \cap \alpha| \leq 2m - 1,$$

quindi una delle curve δ_i o ε_i non separanti interseca α meno di m volte ed è disgiunta da β .

□

Lemma 2.3.4. *Siano γ_1 e γ_2 due curve disgiunte e non separanti di \mathcal{S} tali che $\gamma_1 \cup \gamma_2$ sconnette \mathcal{S} . Allora esiste una curva non separante δ tale che $|\gamma_1 \cap \delta| = 1$ e $|\gamma_2 \cap \delta| = 1$. Supponiamo inoltre che vi siano altre curve α, β e un intero $m > 0$ tali che $|\alpha \cap \beta| \leq m$, $|\alpha \cap \beta| = 1$ se $m = 1$, $|\gamma_1 \cap \alpha| < m$, $|\gamma_2 \cap \alpha| \leq m$ e $|\beta \cap \gamma_1| = |\beta \cap \gamma_2| = 0$. Allora esiste una curva δ come sopra che soddisfa anche $|\delta \cap \alpha| < m$ e $|\delta \cap \beta| < m$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\gamma_1 \cup \gamma_2$ divida \mathcal{S} in \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Possiamo scegliere un arco semplice d_1 in \mathcal{S}_1 che connette γ_1 a γ_2 , e un arco semplice d_2 in \mathcal{S}_2 che connette γ_1 e γ_2 . Spostando gli estremi di d_1 e d_2 possiamo far sì che questi coincidano. La curva δ così costruita è non separante e incontra γ_1 e γ_2 una sola volta.

Supponiamo ora che siano dati α, β e m come nelle ipotesi. Modifichiamo d_1 e d_2 affinché il numero di intersezioni di δ con α e β risulti minore. Possiamo supporre che β sia in \mathcal{S}_1 . Abbiamo tre casi.

Caso 1. Se α sconnette \mathcal{S}_1 , ma non sconnette \mathcal{S} , allora sconnette γ_1 da γ_2 in \mathcal{S} . Allora esiste un arco d in \mathcal{S}_1 che connette γ_1 con γ_2 ed è disgiunto

da α se questa non sconnette \mathcal{S}_1 , o incrocia α una volta se invece α separa \mathcal{S}_1 . Scegliamo un arco d che ha un numero minimo di intersezioni con β . Se $|\beta \cap d| > m$, allora esistono due punti P e Q di $\beta \cap d$ consecutivi in β e non separati da punti di $\beta \cap \alpha$. Tracciamo un arco muovendoci lungo d fino al punto P , poi lungo β senza intersecarla fino a Q dove si riprende d fino alla fine. L'arco che se ne ricava incontra α al più una volta ed ha un numero minore di intersezioni con β . Possiamo quindi assumere che $|\beta \cap d| = m$ e che ogni coppia di punti di $\beta \cap d$ consecutivi in β è separata da un punto di $\beta \cap \alpha$. Modifichiamo d come segue. Consideriamo l'intersezione $d \cap (\alpha \cup \beta)$. Se il primo o l'ultimo punto lungo d appartiene ad α cominciamo da questo estremo di d , altrimenti da uno qualunque. Ci spostiamo lungo d fino al primo punto P di intersezione con $\alpha \cup \beta$. Se $P \in \alpha$ continuiamo lungo α senza oltrepassarla fino al punto successivo di $\alpha \cap \beta$. Da qui si procede lungo β senza incrociarla fino all'ultimo punto Q di $\beta \cap d$, da cui si segue d fino alla fine. Il nuovo arco incrocia β al più una volta vicino Q e incontra α meno di m volte. Se $P \in \beta$, continuiamo lungo β senza incrociarla fino a Q e poi si seguiamo d fino alla fine, ottenendo un arco come sopra. In entrambi i casi, l'arco così prodotto può essere scelto come d_1 , ricavando la δ della tesi.

Caso 2. La curva α incontra γ_1 o γ_2 . Allora $m > 1$ perchè altrimenti per $m = 1$, $|\gamma_1 \cap \alpha| = 0$ e α incrocia γ_2 in \mathcal{S}_1 , allora α deve intersecare nuovamente γ_2 per poter uscire da \mathcal{S}_1 , contraddicendo $|\gamma_2 \cap \alpha| \leq m$. Gli archi di α dividono \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 in componenti connesse. Una di queste deve incontrare sia γ_1 che γ_2 , altrimenti l'unione di tutte le componenti che incontrano γ_1 ha α come componente di bordo e quindi α sarebbe disgiunta da γ_1 e γ_2 . Scegliendo d_1 , rispettivamente d_2 , in questa componente, possiamo far in modo che siano disgiunte da α . Vogliamo ora modificare d_1 in modo che $|d_1 \cap \alpha| = 0$ e $|d_1 \cap \beta| < m$. Abbiamo tre sottocasi.

Caso 2a. Esiste un arco a_1 di α in \mathcal{S}_1 che connette γ_1 e γ_2 . Scegliamo d_1 parallelo a questo arco. Può accadere che d_1 incontri β m volte. In questo caso a_1 è l'unico arco di α che incontra β . Modifichiamo allora d_1 come segue. Ci muoviamo da γ_1 lungo d_1 fino a quando non incontriamo β la quale seguiamo. Procediamo fino al punto di incrocio successivo di a_1 senza oltrepassare quest'arco. Dunque proseguiamo parallelamente a a_1 fino a γ_2 . Il nuovo arco non incontra α e incontra β meno di m volte.

Caso 2b. Esiste un arco di α in \mathcal{S}_1 che connette γ_1 e β , ed esiste un arco di α che connette γ_2 con β . Allora esistono due punti P e Q di $\alpha \cap \beta$, consecutivi lungo β , e due archi a_1 e a_2 di α tali che a_1 connette γ_1 a P e a_2 connette Q a γ_2 . Ci muoviamo parallelamente ad a_1 fino a P . Si prosegue lungo β senza oltrepassarla fino a Q , e poi parallelamente ad a_2 fino a γ_2 . Il nuovo

arco non incontra α e incontra β meno di m volte.

Caso 2c. Se un arco di α in \mathcal{S}_1 incontra β , allora incrocia solo γ_1 . Il caso γ_2 si affronta allo stesso modo. Consideriamo un arco d in \mathcal{S}_1 disgiunto da α che connette γ_1 e γ_2 . Iniziamo da γ_2 e seguiamo parallelamente d fino al primo punto di intersezione con β . Da qui si segue β senza intersecarla fino al primo punto di intersezione con α . Dunque ci si muove lungo α , lontano da β , fino a γ_1 . Il nuovo arco non incrocia α e incontra β meno di m volte. Se β è disgiunta da α , allora β è disgiunta da una componente di $\mathcal{S}_1 - \alpha$ che connette γ_1 a γ_2 o è contenuta in essa. Possiamo trovare un arco disgiunto da α in questa componente che connette γ_1 e γ_2 e incontra β solo una volta.

Nei casi **2a**, **2b** e **2c** abbiamo ottenuto un arco d_1 disgiunto da α che incontra β meno di m volte. Muoviamo ora gli estremi di d_1 lungo γ_1 e γ_2 per far sì che questi combacino con quelli di d_2 . Ogni spostamento degli estremi avviene lungo uno dei due archi di γ_i . Scegliendo in modo opportuno, possiamo fare in modo che d_1 incroci al più $\frac{m}{2}$ punti di α spostando gli estremi in γ_2 , e al più $\frac{m-1}{2}$ punti di α spostando gli estremi in γ_1 . La curva δ che si ottiene da d_1 e d_2 incontra α e β meno di m volte.

Caso 3. La curva α è in \mathcal{S}_2 . Allora $|\alpha \cap \beta| = 0$ e quindi si deve avere $m > 1$. Possiamo scegliere d_2 disgiunto da β e che incrocia α al più una volta, e possiamo scegliere d_1 disgiunto da α che incrocia β al più una volta. La curva δ ottenuta da d_1 e d_2 incontra α e β meno di m volte. □

Lemma 2.3.5. *Siano δ_1 e δ_2 due curve non separanti di \mathcal{S} e sia w_1 un vertice di \mathcal{X} contenente δ_1 e sia w_2 un vertice di \mathcal{X} contenente δ_2 . Allora esiste un cammino $q = (w_1 = z_1, z_2, \dots, z_k = w_2)$ che connette w_1 e w_2 . Supponiamo inoltre che vi siano due curve α, β e un intero $m > 0$ tali che $|\alpha \cap \beta| \leq m$, $|\alpha \cap \beta| = 1$ se $m = 1$, $|\delta_1 \cap \alpha| < m$, $|\delta_2 \cap \alpha| \leq m$, e $|\beta \cap \delta_1| = |\beta \cap \delta_2| = 0$. Allora esiste un cammino q come sopra e un intero j , $1 \leq j < k$ tale che $d(z_i, \beta) < m$ per ogni i , $d(z_i, \alpha) < m$ per $1 \leq i \leq j < k$ e z_i contiene δ_2 per $j < i \leq k$.*

Dimostrazione. Proviamo il Lemma per induzione su $|\delta_1 \cap \delta_2| = n$.

Se $\delta_1 = \delta_2$ possiamo connettere i due vertici con δ_1 -segmento per il Lemma 2.2.2.

Se $n = 1$ esistono due vertici u_1, u_2 in \mathcal{X} che sono connessi da uno spigolo e tali che $\delta_1 \in u_1$ e $\delta_2 \in u_2$. Connettiamo poi w_1 a u_1 e w_2 a u_2 come nel caso precedente.

Se $n = 0$ e $\delta_1 \cup \delta_2$ non sconnette \mathcal{S} allora esiste un vertice v contenente entrambe le curve δ_1 e δ_2 . Possiamo connettere v a w_1 e w_2 come nel primo caso.

Supponiamo ora che $n = 0$ e che $\delta_1 \cup \delta_2$ sconnette \mathcal{S} . Allora, dal Lemma 2.3.4 esiste una curva δ tale che $|\delta_1 \cap \delta| = |\delta_2 \cap \delta| = 1$. Possiamo trovare un vertice fissato v contenente δ e possiamo connettere v a w_1 e w_2 come nel secondo caso. Se si hanno inoltre delle curve α, β e un intero m , possiamo scegliere δ affinché $|\alpha \cap \delta| < m$ e $|\beta \cap \delta| < m$. Allora, il cammino ottenuto connettendo v a w_1 e w_2 hanno tutti i vertici a distanza minore di m da β , e ad una distanza minore di m da α fatta eccezione per l'ultimo δ_2 -segmento che termina in w_2 , dato che $|\delta_2 \cap \alpha| \leq m$.

Se $n > 1$, dal Lemma 2.3.3 esiste una curva δ tale che $|\delta_1 \cap \delta| < n$ e $|\delta_2 \cap \delta| < n$. Scegliamo un vertice v contenente δ . Per induzione su n possiamo connettere v a w_1 e w_2 . Se si hanno anche le curve α e β e l'intero m , esiste una curva δ come sopra che soddisfa $|\delta \cap \alpha| < m$ e $|\delta \cap \beta| = 0$. Per induzione su n possiamo connettere w_1 a v e quest'ultimo a w_2 tramite un cammino i cui vertici hanno distanza minore di m da β , e distanza minore di m da α fatta eccezione per il δ_2 -segmento finale che termina in w_2 .

□

Come corollario immediato si ottiene

Corollario 2.3.6. *Il complesso \mathcal{X} è connesso.*

Abbiamo bisogno di qualche risultato in più per provare che ogni cammino chiuso in \mathcal{X} è omotopicamente nullo.

Lemma 2.3.7. *Siano α, β, γ curve non separanti di \mathcal{S} tali che $|\alpha \cap \beta| = m$, $|\alpha \cap \gamma| \leq m$, $|\beta \cap \gamma| = 1$. Allora esiste una curva non separante δ tale che $|\delta \cap \alpha| < m$, $|\delta \cap \beta| = 0$ e $|\delta \cap \gamma| \leq 1$. Se $m = 1$ allora $|\delta \cap \gamma| = 0$ e $[\delta]$ è diversa da $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\gamma]$.*

Dimostrazione. Tagliando \mathcal{S} lungo $\gamma \cup \beta$ otteniamo una superficie \mathcal{S}_1 con un bordo ∂ "rettangolare" con due β -lati e due γ -lati, orizzontali in Figura 2.9. Possiamo vedere \mathcal{S}_1 come un rettangolo con buchi e manici. La curva α interseca \mathcal{S}_1 lungo qualche arco a_i con estremi P_i e Q_i su ∂ . Se per qualche i i punti P_i e Q_i si trovano sullo stesso β -lato, allora m deve essere maggiore di 1 e possiamo costruire una curva δ data da un arco parallelo ad a_i ed un arco parallelo al tratto di β che connette P_i e Q_i passando per i punti di $\gamma \cap \beta$. Allora $|\delta \cap \beta| = 0$, $|\delta \cap \alpha| < m$ e $|\delta \cap \gamma| = 1$. Si ricordi che se due curve si intersecano esattamente in un punto, allora sono entrambe non separanti in \mathcal{S} . Segue che δ soddisfa le condizioni del Lemma. Se per qualche i i punti P_i

e Q_i si trovano su due γ -lati distinti, possiamo spostare l'estremo P_i dell'arco a_i lungo γ , fino al punto corrispondente a Q_i . Otteniamo una curva chiusa δ che soddisfa le condizioni del Lemma. Possiamo quindi assumere che non vi sono archi a_i come sopra.

Supponiamo che per ogni i, j , la coppia di punti P_i, Q_i e P_j, Q_j non si separano a vicenda in ∂ . Allora possiamo connettere gli estremi corrispondenti con intervalli che non si intersecano nel rettangolo. In altre parole, un intorno regolare di $\alpha \cup \partial$ in \mathcal{S}_1 è una superficie piana omeomorfa ad un rettangolo con buchi. Siccome \mathcal{S}_1 ha genere maggiore di 0, esiste una sottosuperficie di \mathcal{S}_1 di genere positivo attaccata ad un buco, oppure una sottosuperficie di \mathcal{S}_1 che connette due buchi del rettangolo. Tale sottosuperficie contiene una curva δ che è non separante su \mathcal{S} ed è disgiunta da α , β e γ e la classe di omologia $[\delta]$ è diversa da $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\gamma]$. Questo succede in particolare se $m = 1$ perché in questo caso vi è al più un punto su ogni lato e le coppie di estremi di archi non si separano a vicenda.

Possiamo allora assumere che $m > 1$ e che esiste una coppia di archi a_1 e a_2 tali che la coppia P_1, Q_1 separano la coppia P_2, Q_2 in ∂ . Siccome un arco a_i non connette due γ -lati diversi, dobbiamo avere due punti, siano P_1 e P_2 , sullo stesso lato. Supponiamo che P_1, P_2 siano nel β -lato di sinistra. Scegliendo un punto intermedio tra i due, ammesso che ve ne sia uno, possiamo assumere che P_1 e P_2 sono punti consecutivi di α lungo β . Si hanno diverse possibili configurazioni di coppie di punti. Per ognuna di queste costruiamo una curva δ_i come in Figura 2.9. Ogni δ_i è disgiunta da β ed interseca γ al più una volta. In particolare, se è disgiunta da essa, allora δ interseca un'altra curva una volta sola. Quindi δ_i è non separante. Da provare che possiamo sempre scegliere un'opportuna δ_i con $|\delta_i \cap \alpha| < m$. Si osservi che δ_i potrebbe incontrare α solo lungo il bordo ∂ , e non lungo archi che connettono P_1 e P_2 .

Caso 1. I punti Q_1 e Q_2 sono sullo stesso γ -lato inferiore. Se non vi è alcun punto di α su γ alla sinistra di Q_1 , allora $|\delta_1 \cap \alpha| < m$. Se vi è un punto di α su γ alla sinistra di Q_1 , allora $|\delta_2 \cap \alpha| < m$.

Caso 2. I punti Q_1 e Q_2 sono in due γ -lati diversi. Allora $|\delta_3 \cap \alpha| < m$.

Caso 3. I punti Q_1 e Q_2 sono sul β -lato di destra. Allora $|\delta_4 \cap \alpha| < m$.

Caso 4. Uno dei punti Q_i , poniamo Q_1 , si trova su un γ -lato, mentre l'altro si trova su un β -lato. Sia u_i , $i = 1, \dots, 6$ il numero dei punti di intersezione di α con il tratto di ∂ corrispondente mostrato in Figura 2.9. Allora $u_3 + u_4 = u_5 + u_6 = |\alpha \cap \beta| = m$ e $u_1 + u_2 \leq m$. Segue che $|\delta_1 \cap \alpha| = u_1 + u_4$, $|\delta_5 \cap \alpha| = u_1 + u_3$, $|\delta_6 \cap \alpha| = u_2 + u_5$ e $|\delta_7 \cap \alpha| = u_2 + u_6$. Inoltre, siccome P_2 e Q_2 sono connessi da un arco di α , $u_4 \neq u_6$ e P_2 e Q_2

rappresentano punti distinti in \mathcal{S} , altrimenti si avrebbe un unico arco di α . Segue che $|\delta_i \cap \alpha| < m$ per $i = 1, 5, 6, 7$.

Ora assumiamo che per ogni coppia di archi (i, j) che si separano a vicenda, sullo stesso β -lato non è possibile trovare più di un estremo. Se P_i e Q_i si trovano su un γ -lato e P_j si trova tra loro, allora a_i insieme ad un arco di γ compreso tra P_i e Q_i formano una curva non separante che incrocia α meno di m volte. Possiamo assumere che P_1 e P_2 giacciono su due β -lati distinti. Poniamo P_1 su quello di sinistra e P_2 su quello di destra, mentre Q_1 e Q_2 sul lato in basso. Rimpiazzando Q_1 o Q_2 con un punto intermedio se necessario, possiamo assumere anche che per ogni Q_i tra Q_1 e Q_2 , il corrispondente P_i si trova anch'esso tra Q_1 e Q_2 . Se non vi è alcun punto di α sul lato di sinistra sotto a P_1 , allora $|\delta_1 \cap \alpha| < m$, altrimenti prendiamo il più vicino a P_1 , chiamiamolo P_3 . Allora per ipotesi segue che il punto Q_3 si trova sul lato in basso alla sinistra di Q_2 e $|\delta_8 \cap \alpha| < m$. Questo conclude la dimostrazione del Lemma.

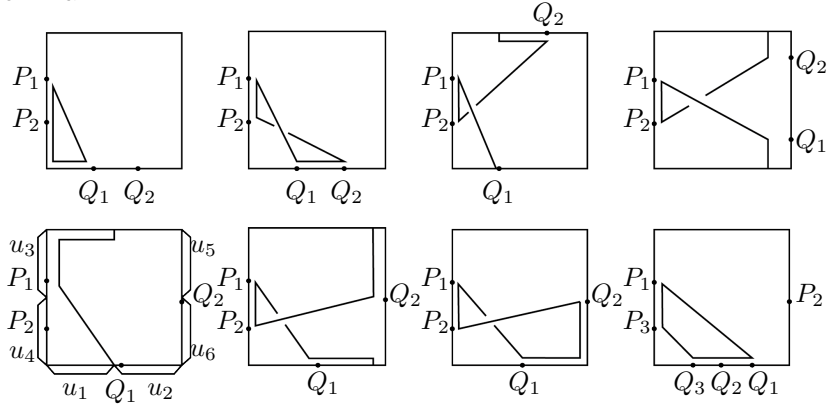


Figura 2.9: Costruzione delle curve δ_i

□

Proposizione 2.3.8. *Un cammino chiuso p di raggio m intorno α è omotopicamente nullo.*

Dimostrazione. Sia v_0 un vertice di p contenente α . Diremo che p comincia in v_0 . Sia v_1 il primo vertice di p che ha distanza m da α . Sia q il segmento massimale di p che comincia a v_1 e contiene una qualche curva β fissa tale che $|\beta \cap \alpha| = m$ e tale che nessun vertice di q contiene una curva β' che soddisfa $|\beta' \cap \alpha| < m$. Sia u_1 un vertice di p che precede v_1 e sia u_2 il vertice di p che segue v_2 . Il vertice u_1 contiene una curva γ_1 tale che $|\gamma_1 \cap \beta| < m$. Il vertice

u_2 è il primo vertice del secondo segmento che ha come curva fissa γ_2 tale che $|\gamma_2 \cap \alpha| \leq m$. Se u_1 contiene β allora $|\gamma_1 \cap \beta| = 0$. Altrimenti, siccome v_1 non contiene γ_1 , il movimento semplice da u_1 a v_1 coinvolge γ_1 e β , quindi $|\gamma_1 \cap \beta| = 1$. Se v_2 contiene γ_2 allora $|\gamma_2 \cap \beta| = 0$. Può anche accadere che $|\gamma_2 \cap \alpha| < m$ e che $\beta \in u_2$. Anche in questo caso si ha $|\gamma_2 \cap \beta| = 0$, altrimenti $|\gamma_2 \cap \beta| = 1$. Costruiamo dei vertici w_1, w'_1, w_2 e w'_2 e dei cammini che li uniscono come in Figura 2.10, in modo che i rettangoli che si formano siano omotopicamente nulli. A quel punto rimpiazziamo la parte di p tra u_1 e u_2 con il cammino che connette consecutivamente u_1 a w'_1 , w'_1 a w_1 , w_1 a w_2 , w_2 a w'_2 e w'_2 a u_2 . Chiamiamo p' il nuovo cammino.

Nella nostra costruzione w_i contiene una curva non separante δ_i disgiunta da β . Se $|\gamma_i \cap \beta| = 0$, allora poniamo $\delta_i = \gamma_i$, $w_i = w'_i = u_i$ e il corrispondente rettangolo degenera in uno spigolo. Se $|\gamma_i \cap \beta| = 1$ procediamo come segue. Dal Lemma 2.3.7 esiste una curva non separante δ_i tale che $|\delta_i \cap \beta| = 0$, $|\delta_i \cap \alpha| < m$ e $|\delta_i \cap \gamma_i| \leq 1$. Se $|\delta_i \cap \gamma_i| = 0$, sempre nel caso $m = 1$, allora $[\delta_i] \neq [\gamma_i]$ e $[\delta_i] \neq [\beta]$ perché hanno intersezioni diverse. Esiste un vertice w'_i contenente δ_i e γ_i e un vertice w_i contenente δ_i e β . Connettiamo u_i a w'_i con un γ_i -segmento, w'_i a w_i con un δ_i -segmento e w_i a v_i con un β -segmento. Il corrispondente rettangolo ha raggio zero intorno δ_i , quindi è omotopicamente nullo per l'Ipotesi Induttiva 2.3.2.

Se $|\delta_i \cap \gamma_i| = 1$ esistono w'_i e w_i connessi tramite uno spigolo che contengono rispettivamente γ_i e δ_i . Connettiamo w'_i a u_i tramite un γ_i -segmento. Applichiamo ora il Lemma 2.3.5 ai vertici w_i e v_i con $\delta_1, \delta_2, \alpha, \beta$ rimpiazzate da $\delta_i, \beta, \gamma_i, \beta$ rispettivamente e $m > 1$. Esiste un cammino che connette w_i a v_i tale che tutti i vertici del cammino hanno distanza minore di m da γ_i e β . Il corrispondente rettangolo ha raggio minore di m intorno γ_i quindi è omotopicamente nullo per l'Ipotesi Induttiva 2.3.2.

Applichiamo ora il Lemma 2.3.5 ai vertici w_1 e w_2 . Esiste un cammino $q = (w_1 = z_1, z_2, \dots, z_k = w_2)$ che connette w_1 a w_2 tale che $d(z_i, \beta) < m$ per ogni i , $d(z_i, \alpha) < m$ per $1 \leq i \leq j < k$ e z_i contiene δ_2 per $j < i \leq k$. In particolare, il rettangolo in mezzo in Figura 2.10 ha raggio minore di m intorno β quindi è omotopicamente nullo per l'Ipotesi Induttiva 2.3.2. Tutti i vertici della nuova parte del cammino p' hanno distanza minore di m da α fatta eccezione per il γ_2 -segmento finale da w'_2 a u_2 , se $|\gamma_2 \cap \beta| = 1$, o $\delta_2 = \gamma_2$ -segmento finale di q se $|\gamma_2 \cap \beta| = 0$, e quindi il rettangolo di destra degenera. Allora, p' ha un numero minore di segmenti a distanza m da α , non ha β -segmenti, ed è omotopicamente nullo per induzione sul numero di segmenti di p a distanza m da α .

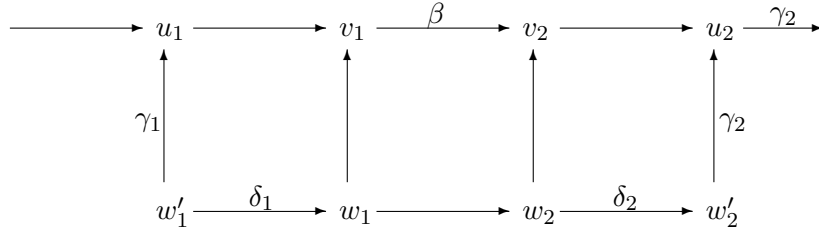


Figura 2.10: Riduzione di un cammino di raggio m

□

2.4 Sottocomplessi di $\mathcal{X}_{g,n}$

Sia $\mathcal{X}_{g,n}$ il complesso dei sistemi di taglio definito nella sez. 1.2. Ricordiamo che ogni vertice del complesso è costituito da g classi di isotopia di curve chiuse e semplici di $\mathcal{S}_{g,n}$, a due a due disgiunte.

Definizione 2.4.1. Sia $\gamma \subset \mathcal{S}_{g,n}$ curva semplice e chiusa. Indichiamo con $\mathcal{X}_{g,n}^\gamma$ il sottocomplesso di $\mathcal{X}_{g,n}$ dato da tutti i sistemi di taglio che possiedono la curva γ

$$\mathcal{X}_{g,n}^\gamma = \{ \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle \in \mathcal{X}_{g,n} \mid \gamma_i = \gamma \text{ per qualche } 1 \leq i \leq g \}.$$

Se i vertici del sottocomplesso hanno in comune più di una curva $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, la notazione usata sarà $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k}$, per ogni $k \leq g$.

Dalla definizione segue banalmente che

$$\mathcal{X}_{g,n} = \bigcup_{\gamma \subset \mathcal{S}_{g,n}} \mathcal{X}_{g,n}^\gamma.$$

Si noti inoltre che esiste una biiezione naturale $\psi_{g,n} : \mathcal{X}_{g,n}^\gamma \rightarrow \mathcal{X}_{g-1,n+2}$ tale che $\psi_{g,n}(\langle \gamma, \gamma_2, \dots, \gamma_g \rangle) = \langle \gamma_2, \dots, \gamma_g \rangle$. Fissata la curva γ , il complesso $\mathcal{X}_{g,n}^\gamma$ può esser visto come il complesso dei sistemi di taglio della superficie $\mathcal{S}_{g-1,n+2}$ ottenuta tagliando $\mathcal{S}_{g,n}$ lungo γ . Si verifica facilmente che $\psi_{g,n}$ è iniettiva e suriettiva.

Teorema 2.4.2. *Il sottocomplesso $\mathcal{X}_{g,n}^\gamma$ di $\mathcal{X}_{g,n}$ è connesso e semplicemente connesso per ogni $g \geq 1$ e per ogni $\gamma \subset \mathcal{S}_{g,n}$ chiusa e semplice.*

Dimostrazione. Sia $\gamma \subset \mathcal{S}_{g,n}$ curva chiusa e semplice fissata e siano $v = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$ e $w = \langle \gamma'_1, \dots, \gamma'_g \rangle$ due vertici qualunque di $\mathcal{X}_{g,n}^\gamma$. Dalla definizione di $\mathcal{X}_{g,n}^\gamma$ si ha che esistono $i, j \in \{1, \dots, g\}$ tali che $\gamma_i \in v$, $\gamma'_j \in w$ e $\gamma_i = \gamma_j = \gamma$. Avendo una curva in comune, dal Lemma 2.2.3 segue che i due vertici possono essere connessi da un γ -segmento tutto contenuto in $\mathcal{X}_{g,n}^\gamma$. Questo prova la connessione del sottocomplesso. Sia ora $p = (v_1, \dots, v_k)$ un

cammino chiuso in $\mathcal{X}_{g,n}^\gamma$. Dal fatto che ogni $v_i \in p$ possiede la curva γ , possiamo vedere il cammino chiuso come un segmento chiuso. Dal Lemma 2.2.2 segue che p è omotopicamente nullo. □

Si osservi che il Teorema 2.4.2 vale anche per i complessi $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k}$, per ogni $k \leq g$. Vale inoltre

Teorema 2.4.3. *Siano $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1}$ e $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_2}$ due sottocomplessi di $\mathcal{X}_{g,n}$ con γ_1 e γ_2 curve chiuse e semplici di $\mathcal{S}_{g,n}$ distinte. Allora $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1} \cap \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_2} = \emptyset$ oppure è il sottocomplesso $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1, \gamma_2}$. In particolare, se l'intersezione è non vuota, allora è connessa e semplicemente connessa.*

Dimostrazione. Siano γ_1 e γ_2 curve chiuse e semplici di $\mathcal{S}_{g,n}$ distinte e siano $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1}$ e $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_2}$ i rispettivi sottocomplessi. Due casi:

Le due curve sono tali che $|\gamma_1 \cap \gamma_2| \neq 0$. Siccome non sono disgiunte si ha che non esiste un sistema di taglio in cui entrambe sono contenute, pertanto $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1} \cap \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_2} = \emptyset$.

Le due curve sono disgiunte, $|\gamma_1 \cap \gamma_2| = 0$. Segue che γ_1 e γ_2 possono trovarsi sullo stesso sistema di taglio e che l'intersezione $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1} \cap \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_2}$ risulta essere $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1, \gamma_2}$. Dal Teorema 2.4.2 si ha che l'intersezione è connessa e semplicemente connessa. □

Capitolo 3

Dal cellulare al simpliciale

3.1 Retratti di complessi di celle

Sia $\mathcal{S}_{g,n}$ una superficie orientabile di genere $g \geq 0$, con $n \geq 0$ componenti di bordo. Sia poi \mathcal{X} un complesso di celle di dimensione 2 e $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ un complesso simpliciale di dimensione 2. Ogni curva $\gamma \subset \mathcal{S}_{g,n}$ presente in questo capitolo è sempre intesa essenziale e non separante. La scrittura $A \searrow B$ significa che esiste una retrazione di A in B .

Diamo il seguente risultato che ci servirà in seguito

Lemma 3.1.1. *Sia \mathcal{X} un complesso di celle e sia $\mathcal{F} = \{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottocomplessi di \mathcal{X} tali che $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{X}_i$. Allora, per ogni $\mathcal{X}_i \in \mathcal{F}$ esiste un aperto $A_i \subset \mathcal{X}$ tale che:*

- (1) \mathcal{X}_i è contenuto in A_i , e $A_i \searrow \mathcal{X}_i$;
- (2) $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j \neq \emptyset$ se e solo se $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, per ogni $\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{X}_i \in \mathcal{F}$ sottocomplesso, e sia $\beta(\mathcal{X})$ il *raffinamento baricentrico* di \mathcal{X} , cioè il complesso simpliciale che si ottiene a partire da \mathcal{X} attuando una suddivisione baricentrica sulle 1-celle e 2-celle. Consideriamo il raffinamento baricentrico $\beta^2(\mathcal{X})$ e poniamo

$$A_i = \text{Int} \left(\bigcup_{\substack{\sigma \in \beta^2(\mathcal{X}), \\ \sigma \cap \mathcal{X}_i \neq \emptyset}} \sigma \right).$$

Chiaramente $A_i \supset \mathcal{X}_i$ ed è aperto. Parametrizzando in modo opportuno le 1-celle e le 2-celle di $A_i - \mathcal{X}_i$, si trova facilmente un'omotopia che rende A_i

retrato di \mathcal{X}_i . Supponiamo ora che vi siano $\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j \in \mathcal{F}$ tali che $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j \neq \emptyset$. Dalla definizione di raffinamento baricentrico e dalla costruzione degli insiemi A_i e A_j , si ottiene $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. L'altra direzione dell'affermazione (2) segue banalmente. \square

Si noti che anche se \mathcal{X} è un CW-complesso non localmente finito è possibile comunque trovare per ogni \mathcal{X}_i sottocomplesso un retratto A_i che si deforma su di esso. Per approfondimenti si vedano [3] e [15], in particolare la definizione di *proprietà dell'estensione assoluta dell'omotopia (AHEP)* e i risultati a seguire.

3.2 Il complesso simpliciale associato

Costruiamo a partire da \mathcal{F} , un complesso simpliciale $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ di dimensione 2, detto *complesso simpliciale associato*. Sia $\mathcal{F} = \{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottocomplessi di \mathcal{X} che soddisfa le ipotesi del Lemma 3.1.1. Il vertice v_i di $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ corrisponde al sottocomplesso $\mathcal{X}_i \in \mathcal{F}$, per ogni $i \in I$. Due vertici $v_i, v_j \in \mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$, con $i \neq j$, sono connessi da uno spigolo se e solo se i sottocomplessi corrispondenti \mathcal{X}_i e \mathcal{X}_j non sono disgiunti. Tre vertici $v_i, v_j, v_k \in \mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$, con $i \neq j, j \neq k$ e $i \neq k$, formano una faccia se e solo se i sottocomplessi corrispondenti $\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j$ e \mathcal{X}_k sono tali che $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j \cap \mathcal{X}_k \neq \emptyset$.

Teorema 3.2.1. *Sia \mathcal{X} complesso di celle di dimensione 2 e $\mathcal{F} = \{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$ famiglia di sottocomplessi di \mathcal{X} tali che $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{X}_i$ e \mathcal{X}_i è connesso e semplicemente connesso per ogni $i \in I$, e presi $\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j \in \mathcal{F}$ qualunque, o sono disgiunti oppure la loro intersezione è connessa e semplicemente connessa. Sia $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ il complesso simpliciale associato ad \mathcal{X} . Si ha che*

- (1) \mathcal{X} è connesso se e solo se $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ è connesso;
- (2) se $\mathcal{X}, \mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ sono connessi, allora $\pi_1(\mathcal{X}) \cong \pi_1(\mathcal{Y}_{\mathcal{F}})$.

Dimostrazione. (1) Supponiamo che $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ sia connesso e proviamo che anche \mathcal{X} lo è. Siano x e x' due punti di \mathcal{X} . Vogliamo far vedere che esiste un cammino in \mathcal{X} che collega questi due punti. Sicuramente esistono $i, j \in I$ tali che $x \in \mathcal{X}_i$ e $x' \in \mathcal{X}_j$. D'altra parte, dalla definizione di $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ i due sottocomplessi \mathcal{X}_i e \mathcal{X}_j corrispondono a due vertici v_i e v_j . Dalla connessione di $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ si ha che esiste un cammino $p = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ tale che $v_{i_1} = v_i, v_{i_k} = v_j$ e $(v_{i_h}, v_{i_{h+1}})$ è uno spigolo in $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ per ogni $h \leq k - 1$. Il cammino p induce la

sequenza di sottocomplessi $p' = (\mathcal{X}_{i_1}, \dots, \mathcal{X}_{i_k})$ dove $\mathcal{X}_{i_1} = \mathcal{X}_i$, $\mathcal{X}_{i_k} = \mathcal{X}_j$ e $\mathcal{X}_{i_h} \cap \mathcal{X}_{i_{h+1}} \neq \emptyset$ per ogni $h \leq k-1$. Dalla connessione di ogni \mathcal{X}_{i_h} possiamo tracciare un arco di \mathcal{X} che congiunge x e x' nel seguente modo. Sia \mathcal{X}_{i_2} il secondo spazio della sequenza e sia x_2 un punto appartenente ad esso. Dalla connessione di \mathcal{X}_{i_1} , \mathcal{X}_{i_2} e $\mathcal{X}_{i_1} \cap \mathcal{X}_{i_2}$ possiamo tracciare un arco che connette x con x_2 . Ripetendo questa costruzione per ogni coppia di sottocomplessi consecutivi nella sequenza, e facendo in modo di scegliere sempre lo stesso x_h per ogni spazio \mathcal{X}_{i_h} , otteniamo un arco in \mathcal{X} che collega x a x' . Da questo fatto segue che per $x_0 \in \mathcal{X}$ fissato e per ogni $x \in \mathcal{X}$, è possibile trovare $C_x \subset \mathcal{X}$ connesso tale che $x_0, x \in C_x$. Chiaramente $\mathcal{X} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} C_x$, e quindi \mathcal{X} è connesso.

Supponiamo che \mathcal{X} è connesso e per assurdo assumiamo che $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ non è connesso. Segue che esistono V, W aperti non vuoti e disgiunti di $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ tali che $V \cup W = \mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$. Chiaramente $V \cap W = \emptyset$ equivale a dire che per ogni $v \in V$ e per ogni $w \in W$, questi non possono essere connessi da uno spigolo. Sia $v_i \in V$. Questo vertice corrisponde ad un sottocomplesso $\mathcal{X}_i \in \mathcal{F}$ e per il Lemma 3.1.1, esiste un aperto A_i tale che $\mathcal{X}_i \subset A_i$. Chiamiamo $A = \bigcup_{v_i \in V} A_i$. Ripetendo lo stesso ragionamento per $w_j \in W$, a questo corrisponde un sottocomplesso $\mathcal{X}_j \in \mathcal{F}$ ed esiste un aperto A_j che contiene \mathcal{X}_j . Poniamo $B = \bigcup_{w_j \in W} A_j$. Allora A e B sono due aperti non vuoti di \mathcal{X} tali che $A \cup B = \mathcal{X}$; questo segue dal fatto che A e B sono unione di aperti realizzati a partire da V e W tali che $V \cup W = \mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$. Supponiamo che A e B non sono disgiunti. Questo implica che esistono $i, j \in I$ tali che $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Dal Lemma 3.1.1, $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j \neq \emptyset$, dunque i vertici $v_i \in V$ e $w_j \in W$ sono connessi da uno spigolo, impossibile. In conclusione, abbiamo trovato due aperti A e B non vuoti e disgiunti di \mathcal{X} la cui unione è tutto \mathcal{X} , da cui \mathcal{X} non è connesso, assurdo.

(2). Supponiamo che \mathcal{X} e $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ siano connessi. Da provare che $\pi_1(\mathcal{X}) \cong \pi_1(\mathcal{Y}_{\mathcal{F}})$. Costruiamo un'applicazione continua $\varphi : \mathcal{Y}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{X}$, in modo che l'applicazione indotta $\varphi_* : \pi_1(\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X})$ risulti essere un isomorfismo di gruppi. Sia $v_i \in \mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$, e sia $\mathcal{X}_i \in \mathcal{F}$ il sottocomplesso corrispondente. Poniamo $\varphi(v_i) = x_i \in \mathcal{X}_i$ punto qualunque fissato. Indichiamo con v_* il punto base in $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$, e con $*$ il punto base in \mathcal{X} e poniamo $\varphi(v_*) = *$. Sia $e_{i,j}$ uno spigolo tra i due vertici v_i e v_j e sia $m_{i,j}$ il suo baricentro. Allora $e_{i,j}$ si divide in $e_i^j \cup e_j^i$, dove e_i^j è lo spigolo che congiunge v_i a $m_{i,j}$, mentre e_j^i è lo spigolo che connette v_j con $m_{i,j}$. Poniamo $\varphi(m_{i,j}) = x_{i,j} \in \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$ punto qualunque fissato. Dunque definiamo $\varphi(e_i^j) = \alpha_i^j \subset \mathcal{X}_i$ arco fissato tra x_i e $x_{i,j}$, e $\varphi(e_j^i) = \alpha_j^i \subset \mathcal{X}_j$ arco fissato tra x_j e $x_{i,j}$. Tali archi esistono per la connessione degli \mathcal{X}_i . Segue che $\varphi(e_{i,j}) = (\alpha_i^j \cup \alpha_j^i)$ è un arco tra

x_i e x_j che indichiamo $\alpha_{i,j}$. Sia ora $m_{i,j,k}$ il baricentro del semplice $f_{i,j,k}$ dato da tre vertici v_i , v_j e v_k . Indichiamo con e^i lo spigolo che connette x_i con $m_{i,j,k}$, e con $e^{i,j}$ lo spigolo che connette $m_{i,j}$ con $m_{i,j,k}$. Poniamo $\varphi(m_{i,j,k}) = x_{i,j,k} \in \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j \cap \mathcal{X}_k$ punto qualunque fissato, $\varphi(e^i) = \alpha^i \subset \mathcal{X}_i$ arco fissato tra x_i e $x_{i,j,k}$, e $\varphi(e^{i,j}) = \alpha^{i,j} \subset \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$ arco fissato tra $x_{i,j}$ e $x_{i,j,k}$. La funzione φ è ora definita sul bordo del triangolino evidenziato in Figura 3.1. Dalla semplice connessione dei sottocomplessi possiamo estendere la φ_* anche all'interno del triangolino e porre che la sua immagine sia contenuta in \mathcal{X}_i . Allo stesso modo si procede con semplici più grandi. La faccia data dai vertici v_i , v_j e v_k viene mandata in $\mathcal{X}_i \cup \mathcal{X}_j \cup \mathcal{X}_k$.

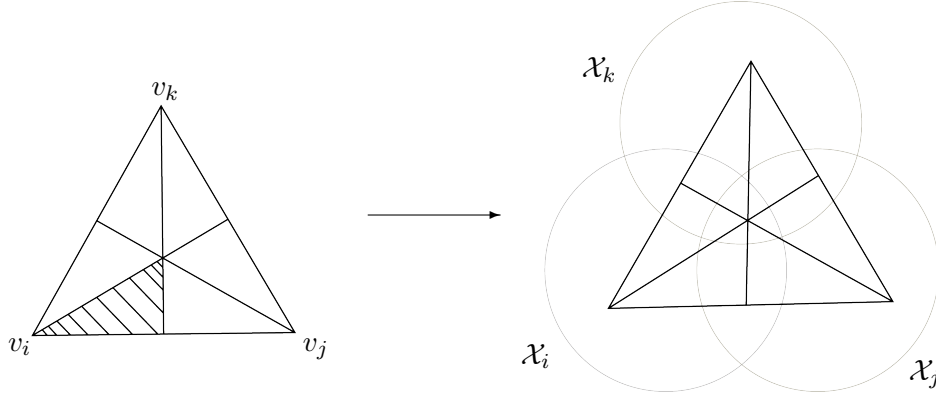


Figura 3.1: Illustrazione semplificata dell'applicazione φ

Per costruzione, $\varphi : \mathcal{Y}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{X}$ è un'applicazione continua, quindi $\varphi_* : \pi_1(\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X})$ è un omomorfismo.

Vogliamo provare che φ_* è un isomorfismo. Iniziamo col vedere che φ_* è iniettiva. Per far questo proviamo che $\ker \varphi_* = 0$. Sia $\omega = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ dove $v_1 = v_k = v_*$, una catena di spigoli chiusa in $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ tale che $[\omega] \in \ker \varphi_*$, dove v_* è il punto base scelto in $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$. Sia $\varphi(\omega) = w$ il coppia passante per la sequenza di punti (x_1, x_2, \dots, x_k) , dove $x_1 = x_k = *$. Dalle ipotesi si ha che esiste un'omotopia $H : \mathcal{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ tale che $[w] = 0$. Vogliamo provare che esiste un'omotopia in $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ tale che $[\omega] = 0$. Dalla definizione di $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ si ha che ω rappresenta la catena di sottocomplessi $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_k)$. In Figura 3.2 troviamo una suddivisione del cammino $\varphi(\omega)$ nell'omotopia di $[w]$.

Supponiamo che la suddivisione sia tale che ogni quadratino ha immagine tramite H contenuta in un certo A_i del Lemma 3.1.1. Tale suddivisione

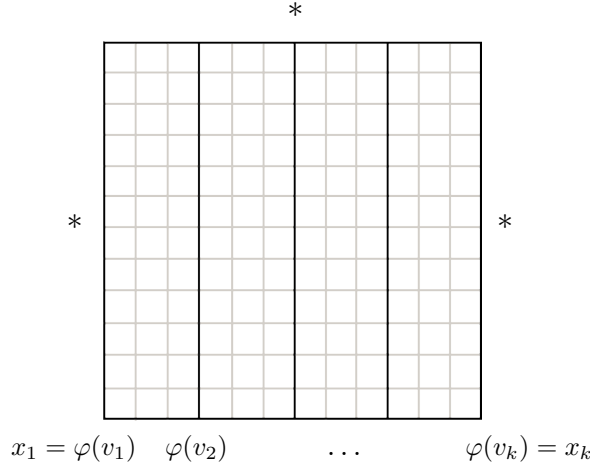


Figura 3.2: Omotopia tra w e $*$

individua dei punti intermedi nel cammino w . Siano i punti x_i, x_{i+1} e $x_{i,i+1}$. Indichiamo con $(x_{i_1}, \dots, x_{i_h})$ la sequenza di punti tali che $x_{i_1} = x_1, x_{i_h} = x_{i,i+1}$ e i restanti sono i punti intermedi di w tra x_i e $x_{i,i+1}$. Chiaramente per ogni $j = 1, \dots, h$, esiste un aperto A_{i_j} del Lemma 3.1.1 che contiene il punto x_{i_j} . Possiamo supporre che $A_{i_1} = A_i$, dove A_i è l'aperto associato a v_i che contiene tutto l'arco tra x_i e $x_{i,i+1}$. Si osservi che gli aperti in questione non sono necessariamente tutti distinti e che ognuno contiene il rispettivo sottocomplesso \mathcal{X}_{i_j} . In particolare si osservi che due punti consecutivi x_{i_j} e $x_{i_{j+1}}$ sono contenuti in due sottocomplessi tali che $\mathcal{X}_{i_j} \cap \mathcal{X}_{i_{j+1}} \neq \emptyset$. Segue che esiste una corrispondente sequenza di spigoli in $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ data da $p = (v_{i_1}, \dots, v_{i_h})$, dove $v_{i_1} = v_i$ e $v_{i_h} = m_{i,i+1}$. Vogliamo provare che p e lo spigolo $(v_i, m_{i,i+1})$ sono omotopi. Consideriamo i vertici $(v_{i_1}, v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$, con $j = 2, \dots, h - 1$ fissato. I rispettivi aperti soddisfano le formule

$$A_i \cap A_{i_j} \neq \emptyset, \quad A_i \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset, \quad A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset.$$

In particolare, dal fatto che i punti x_{i_j} e $x_{i_{j+1}}$ sono connessi da un arco tutto contenuto in A_i e dalle formule precedenti segue che $A_i \cap A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset$. Questo implica che i vertici $(v_{i_1}, v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$ formano una faccia. Ripetendo questa costruzione per ogni $j = 2, \dots, h - 1$ si ha che p e $(v_i, m_{i,i+1})$ sono omotopi, come mostrato in Figura 3.3.

Chiaramente la costruzione di p può esser fatta per ogni arco tra i punti $(x_i, x_{i,i+1})$ e $(x_{i,i+1}, x_{i+1})$ di w , e di conseguenza tra ogni spigolo $(v_i, m_{i,i+1})$ e $(m_{i,i+1}, v_{i+1})$. Applichiamo la suddivisione di w scelta all'inizio a tutta la sequenza ω .

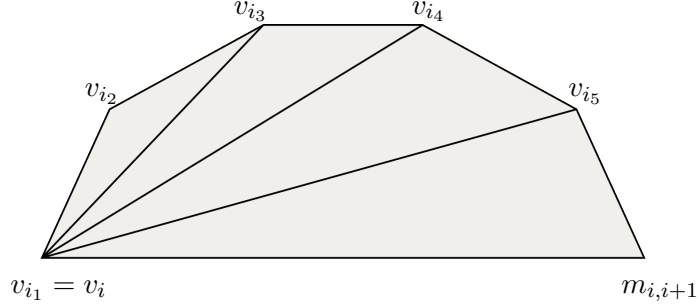


Figura 3.3: Costruzione di p

Con un abuso di notazione, otteniamo $p_\omega = (v_* = v_{1,0}, \dots, v_{i,j,0}, \dots, v_{1,0} = v_*)$, sequenza di spigoli omotopa a ω . Vogliamo provare che p_ω è omotopicamente nullo. Supponiamo che p_ω abbia parametrizzazione $[0, 1]$. Allora si deve mostrare che vale lo schema in Figura 3.4, cioè che esiste un'omotopia che rende p_ω omotopo a v_* . In particolare, la costruzione di p_ω è tale che ogni quadrato dello schema è contenuto tutto in un certo $A_{i_j,k}$. Bisogna provare che per ogni quadrato, i due cammini come in Figura 3.4 sono omotopi. Per semplicità consideriamo il quadrato contenuto in $A_{i_{1,1}}$ dato dai vertici $(v_{i_{1,1}}, v_{i_{1,2}}, v_{i_{2,2}}, v_{i_{2,1}}, v_{i_{1,1}})$. Lo spigolo $(v_{i_{1,1}}, v_{i_{1,2}})$ ci dice che $A_{i_{1,1}} \cap A_{i_{1,2}} \neq \emptyset$. Allo stesso modo, dallo spigolo $(v_{i_{1,2}}, v_{i_{2,2}})$ possiamo dedurre che $A_{i_{1,2}} \cap A_{i_{2,2}} \neq \emptyset$. Inoltre, dal fatto che il quadrato è tutto contenuto in $A_{i_{1,1}}$, si ha che $A_{i_{1,1}} \cap A_{i_{2,2}} \neq \emptyset$, quindi esiste lo spigolo $(v_{i_{1,1}}, v_{i_{2,2}})$. Segue che il quadrato si divide nella somma di due triangoli tali che

$$A_{i_{1,1}} \cap A_{i_{1,2}} \cap A_{i_{2,2}} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad A_{i_{1,1}} \cap A_{i_{2,1}} \cap A_{i_{2,2}} \neq \emptyset,$$

dunque il quadrato è omotopicamente nullo. Applicando questo discorso a tutto p_ω si ricava che quest'ultimo è omotopo al cappio costante v_* , e di conseguenza lo è anche ω .

Proviamo ora che φ_* è suriettiva. Sia $w \subset \mathcal{X}$ un cappio passante per il punto base $*$. Se $w \subset \mathcal{X}_i$, per qualche $i \in I$, allora dalla semplice connessione del sottocomplesso si ha che $[w] = *$ e quindi si ha $\varphi_*(v_*) = [w] = *$. Supponiamo ora che il cappio w sia contenuto nella sequenza di sottocomplessi $(\mathcal{X}_* = \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_k = \mathcal{X}_*)$, tale che $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_{i+1} \neq \emptyset$ e tali che esistono $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1$ da cui $w([t_i, t_{i+1}]) \subset \mathcal{X}_i$, per ogni $i = 1, \dots, k-1$. Consideriamo l'arco $w([t_i, t_{i+1}])$. Per come l'abbiamo definito, gli estremi $w(t_i)$ e $w(t_{i+1})$ appartengono alle intersezioni $\mathcal{X}_{i-1} \cap \mathcal{X}_i$ e $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_{i+1}$ rispettivamente. Siano i punti $x_{i-1,1} \in \mathcal{X}_{i-1} \cap \mathcal{X}_i$ e $x_{i,i+1} \in \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_{i+1}$ scelti come immagine di $m_{i-1,i}$ e $m_{i,i+1}$ rispettivamente tramite l'applicazione φ .

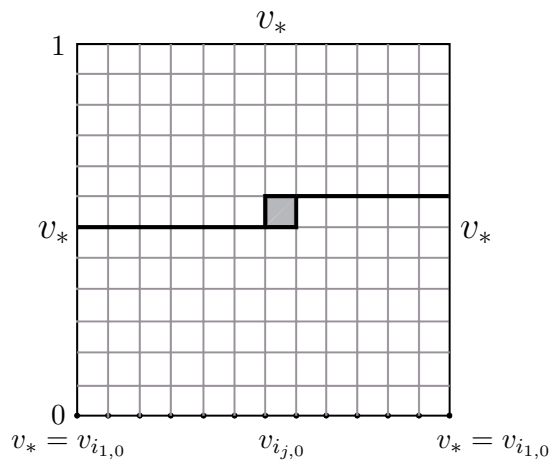


Figura 3.4: Omotopia tra p_ω e v_*

Dalla connessione delle intersezioni possiamo connettere le coppie di punti $(x_{i-1,i}, w(t_i))$ e $(x_{i,i+1}, w(t_{i+1}))$. Infine, sia α l'arco che congiunge $x_{i-1,i}$ a $x_{i,i+1}$, e che è immagine dell'unione degli spigoli tra $m_{i-1,i}$ e v_i e tra v_i e $m_{i,i+1}$, tramite la funzione φ . Gli archi α e $(w(t_i), w(t_{i+1}))$ sono entrambi contenuti in \mathcal{X}_i che è connesso e semplicemente connesso. Segue che la regione individuata da α , $(w(t_i), w(t_{i+1}))$, $(x_{i-1,i}, w(t_i))$ e $(x_{i,i+1}, w(t_{i+1}))$ come in Figura 3.5 è omotopicamente nulla e dunque α e $(w(t_i), w(t_{i+1}))$ sono omotopi. Ripetendo questa costruzione per ogni $i = 1, \dots, k - 1$ si ottiene un cammino w' omotopo a quello dato che è immagine tramite φ della sequenza di spigoli (v_1, \dots, v_k) , dunque φ_* è suriettiva.

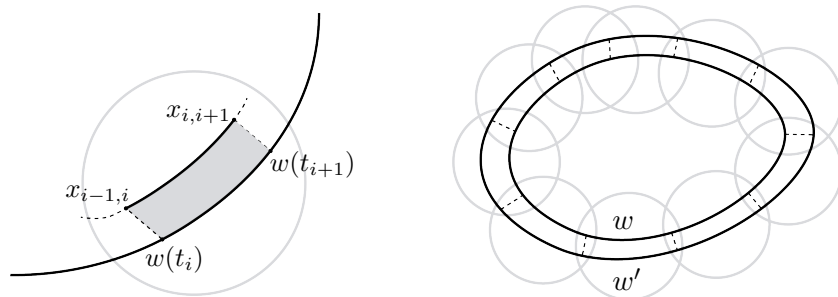


Figura 3.5: Costruzione di un cammino omotopo a w

□

Teorema 3.2.2. *Il complesso \mathcal{Y}_{nosep} delle curve non separanti è semplicemente connesso per $g \geq 3$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{g,n}$, il complesso dei sistemi di taglio. Consideriamo la famiglia di sottocomplessi $\mathcal{F} = \{\mathcal{X}_{g,n}^\gamma\}_{\gamma \subset \mathcal{S}_{g,n}}$, dove ogni $\mathcal{X}_{g,n}^\gamma$ è il sottocomplesso definito nella sez. 2.4. Chiaramente

$$\mathcal{X}_{g,n} = \bigcup_{\gamma \subset S} \mathcal{X}_{g,n}^\gamma,$$

e dai Teoremi 2.4.2 e 2.4.3 ogni $\mathcal{X}_{g,n}^\gamma$ è connesso e semplicemente connesso e presi $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1}, \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_2}$ qualunque, la loro intersezione o è vuota o è semplicemente connessa. Applicando il discorso fatto in precedenza, esiste un complesso simpliciale $\mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ tale che $v_i \in \mathcal{Y}_{\mathcal{F}}$ corrisponde ad un sottocomplesso $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_i}$, due vertici v_i, v_j sono connessi da uno spigolo se e solo se $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_i} \cap \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_j} \neq \emptyset$, e infine tre vertici v_i, v_j e v_k formano una faccia se e solo se $\mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_i} \cap \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_j} \cap \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_k} \neq \emptyset$. Osserviamo che il complesso così ottenuto corrisponde a \mathcal{Y}_{nosep}^2 , il 2-scheletro del complesso delle curve non separanti. Dal Teorema 3.2.1 e dalla connessione di $\mathcal{X}_{g,n}$, segue che $\pi_1(\mathcal{X}_{g,n}) \cong \pi_1(\mathcal{Y}_{nosep}^2)$. Osserviamo ora che dalle inclusioni $i_1 : \mathcal{Y}_{nosep}^1 \hookrightarrow \mathcal{Y}_{nosep}^2$ e $i_2 : \mathcal{Y}_{nosep}^2 \hookrightarrow \mathcal{Y}_{nosep}$, segue che i_{1*} è suriettiva e $\pi_1(\mathcal{Y}_{nosep}^2) \cong \pi_1(\mathcal{Y}_{nosep})$. Le formule

$$\mathcal{X}_{g,n}^\gamma \neq \emptyset, \quad \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1} \cap \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_2} \neq \emptyset, \quad \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1} \cap \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_2} \cap \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_3} \neq \emptyset$$

equivalgono a

$$\mathcal{X}_{g,n}^\gamma \cong \mathcal{X}_{g-1,n+2} \neq \emptyset, \quad \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1, \gamma_2} \cong \mathcal{X}_{g-2,n+4} \neq \emptyset, \quad \mathcal{X}_{g,n}^{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} \cong \mathcal{X}_{g-3,n+4} \neq \emptyset$$

che, ammesso che le curve γ_1, γ_2 e γ_3 siano disgiunte e non isotope tra loro, equivale a richiedere che $g-1 \geq 0$, $g-2 \geq 0$ e $g-3 \geq 0$, da cui $g \geq 3$. □

Capitolo 4

Generatori dei gruppi di automorfismi di superfici

4.1 Preliminari

Sia $\mathcal{S}_{g,0,r}$ una superficie chiusa e orientabile di genere g con r punture z_1, \dots, z_r . Se $r = 0$, allora scriveremo $\mathcal{S}_{g,0,0} = \mathcal{S}_g$. Indichiamo con $\mathcal{F}_r\mathcal{S}_g$ il gruppo degli omeomorfismi $h : \mathcal{S}_{g,0,r} \rightarrow \mathcal{S}_{g,0,r}$ che preservano l'orientazione e tali che $h(z_i) = z_i$, per ogni i . Denotiamo con $\mathcal{B}_r\mathcal{S}_g$ il gruppo degli omeomorfismi $h : \mathcal{S}_{g,0,r} \rightarrow \mathcal{S}_{g,0,r}$ che preservano l'orientazione tali che $h(\{z_1, \dots, z_r\}) = \{z_1, \dots, z_r\}$. Se $r = 0$ scriviamo $\mathcal{F}_0\mathcal{S}_g = \mathcal{G}$. \mathcal{D} è il sottogruppo di \mathcal{G} dato dagli omeomorfismi isotopi all'identità. Il gruppo \mathcal{E} è il sottogruppo di \mathcal{G} generato dagli avvitamamenti di Dehn a meno di isotopia. Se due omeomorfismi $g, h \in \mathcal{F}_r\mathcal{S}_g$ sono isotopi tra loro, scriviamo $g \cong h$. Useremo i simboli \sim, \approx e \sim_c tra due curve p ed m se esistono $h \in \mathcal{G}$, $d \in \mathcal{D}$ o $y \in \mathcal{E}$ rispettivamente tali che $h(m) = p$, $d(m) = p$ o $y(m) = p$.

Definizione 4.1.1. Chiamiamo *pure mapping class group* di $\mathcal{S}_{g,0,r}$ il gruppo $\mathcal{PM}_{g,0,r} = \pi_0(\mathcal{F}_r\mathcal{S}_g)$, e *full mapping class group* di $\mathcal{S}_{g,0,r}$ il gruppo $\mathcal{M}_{g,0,r} = \pi_0(\mathcal{B}_r\mathcal{S}_g)$.

Chiaramente $\mathcal{B}_0\mathcal{S}_g = \mathcal{F}_0\mathcal{S}_g$. Osserviamo che esiste una naturale inclusione $i : \mathcal{F}_r\mathcal{S}_g \hookrightarrow \mathcal{F}_0\mathcal{S}_g$. Indichiamo con $i_* : \mathcal{PM}_{g,0,r} \rightarrow \mathcal{PM}_{g,0,0}$ l'omomorfismo indotto.

Sia c una curva chiusa e semplice di \mathcal{S}_g e sia $z \in c$. Sia N l'intorno regolare di c identificato dai parametri (y, ϑ) , con $-1 \leq y \leq +1$ e $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, dove la curva c corrisponde a $y = 0$ e il punto z ha coordinate $(0, 0)$. L'omeomorfismo

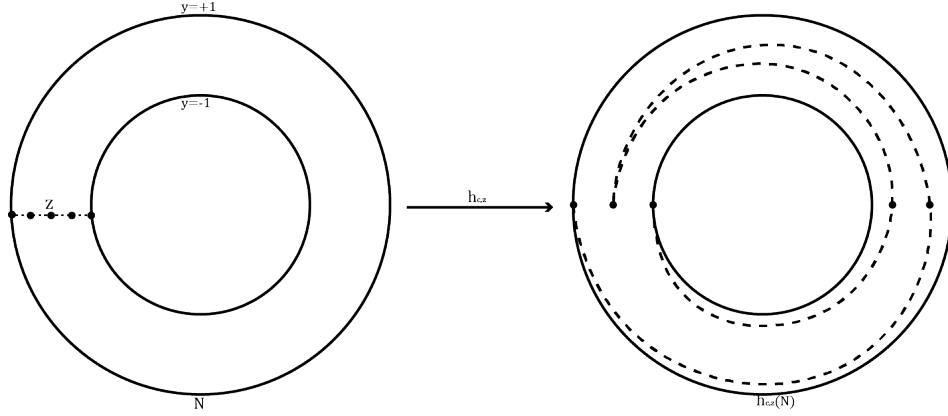


Figura 4.1: Spin di z rispetto a c

$h_{c,z} : \mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{S}_g$ si dice *spin di z rispetto a c* se

$$\begin{aligned} h_{c,z}(y, \vartheta) &= (y, \vartheta + 2\pi y) \quad \text{se } 0 \leq y \leq 1, \\ h_{c,z}(y, \vartheta) &= (y, \vartheta - 2\pi y) \quad \text{se } -1 \leq y \leq 0. \end{aligned}$$

Siano $z_1, \dots, z_r \in \mathcal{S}_g$. Siano $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ $2g$ curve chiuse e semplici di \mathcal{S}_g disgiunte tranne nel punto base z_1 tali che le loro classi di omotopia generano $\pi_1 \mathcal{S}_g$. Inoltre, richiediamo che

$$[a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}] = z_1.$$

Chiamiamo $a_{i,j}, b_{i,j}$, con $1 \leq i \leq g$ e $1 \leq j \leq r$, le $2gr$ curve tali che $a_{i,1} = a_i, b_{i,1} = b_i$ per ogni i , mentre per $j \neq 1$, le curve $a_{i,j}, b_{i,j}$ sono omotope in \mathcal{S}_g a a_i, b_i e contengono il punto z_j , ma non z_k , per ogni $i, j, k \neq j$. In Figura 4.2 possiamo vedere un esempio di queste curve.

Teorema 4.1.2. *Sia $\mathcal{S}_{g,0,n}$ con punture z_1, \dots, z_r . Le classi di isotopia degli spin*

$$h_{a_{i,j}, z_j}, h_{b_{i,j}, z_j}, \quad 1 \leq i \leq g, \quad 1 \leq j \leq r$$

generano $\ker i_*$.

Lemma 4.1.3. *Siano p ed m due curve chiuse e semplici di \mathcal{S}_g tali che $d(p) = m$, con $d \in \mathcal{D}$. Allora, $T_p \cong T_m$.*

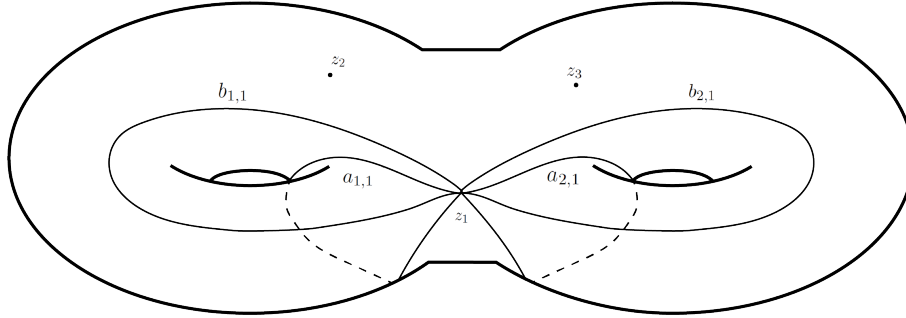


Figura 4.2: Esempi di curve a_i , b_i , $a_{i,j}$ con $r = 3$

4.2 Il Teorema di Dehn-Lickorish

In questa sezione vogliamo dimostrare il seguente

Teorema 4.2.1 (di Dehn-Lickorish). *Ogni omeomorfismo di $h: \mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{S}_g$ che preserva l'orientazione è isotopo ad un prodotto di avvitamenti di Dehn.*

Dimostrazione. Il teorema è un risultato classico dello studio del mapping class group. La prima dimostrazione viene fatta da Dehn nel 1938 tramite lo studio dell'azione del mapping class group su insiemi di curve. Successivamente questa viene ripresa e resa più semplice da Lickorish nel 1962. La dimostrazione del Teorema segue dai Lemmi 4.2.2-4.2.7 dimostrati nel seguito e dai Teoremi 4.1.2 e 4.1.3.

Lemma 4.2.2. *Siano p_1 e p_2 curve chiuse e semplici su \mathcal{S}_g tali che $|p_1 \cap p_2| = 1$. Allora $p_1 \sim_c p_2$.*

Dimostrazione. Chiamiamo $a \in p_1 \cap p_2$. Applichiamo l'avvitamento di Dehn T_{p_2} rispetto p_2 a p_1 . La curva p_1 viene "spezzata" nel punto a e si aggiunge una copia di p_2 nel punto di separazione. Si applica ora T_{p_1} a $T_{p_2}(p_1)$. Come mostrato in Figura 4.3, si ottiene $T_{p_1}T_{p_2}(p_1) \approx p_2$, da cui $p_1 \sim_c p_2$.

□

Definizione 4.2.3. *Due curve p e m si incontrano due volte con intersezione algebrica nulla se $|p \cap m| = 2$ e se è possibile orientare p ed m in modo che $i(p, m) = 0$. In questo caso si usa la notazione $|p \cap m| = 2_0$.*

Lemma 4.2.4. *Siano p e m curve semplici di \mathcal{S}_g , p chiusa. Sia N un intorno di m . Allora, esiste una curva u di \mathcal{S}_g tale che*

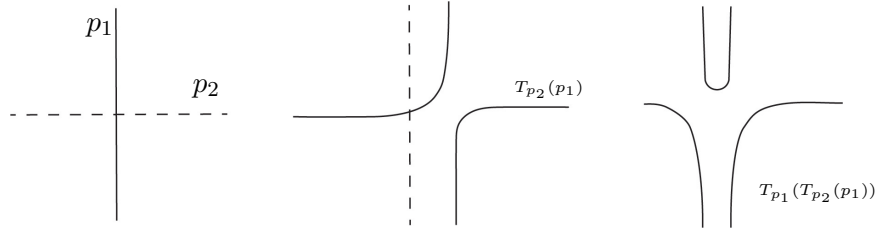


Figura 4.3: Avvitamenti di Dehn rispetto le curve p_1 e p_2

- 1) $u \sim_c p$,
- 2) $u \subset p \cup N$;
- 3) $|u \cap m| = 0$ o 2_0 .

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $r = |p \cap m|$. Se $r = 0$ o 2_0 , è sufficiente prendere $u = p$. Se $r = 1$ e m è chiuso, dal Lemma 4.2.2 possiamo prendere $u = p$. Se $r = 1$ e m non è chiuso, tramite un'isotopia che è l'identità al di fuori di $p \cup N$ si può spostare p fuori da m , così che $u = p$. Supponiamo che la tesi valga per $r < k$ e fissiamo un'orientazione per p ed m . Due casi:

1) L'insieme $p \cap m$ contiene due punti a e b consecutivi su m tali che p è orientata nella stessa direzione sia in a che in b , come mostrato in Figura 4.4. Scegliamo due punti a' e b' in N , vicini ad a e b rispettivamente in modo che possiamo scegliere un cammino semplice c che parte da a' , procede parallelamente a p fino al punto b' , e poi torna ad a' incrociando una volta m . Applichiamo T_c a p . Allora esiste $d \in \mathcal{D}$ tale che

$$d(T_c(p)) \subset p \cup N, \quad \text{e} \quad |d(T_c(p)) \cap m| < k.$$

Per ipotesi induttiva segue la tesi.

2) L'insieme $p \cap m$ contiene tre punti a, b, d consecutivi in m tali che p è orientata in direzioni alternate rispetto ad m nei tre punti, come mostrato in figura. Uno dei due archi \widehat{ad} e \widehat{da} di p che congiungono a e d , non contiene b . Supponiamo $b \notin \widehat{da}$. Scegliamo d' e a' in N , vicino a d e a rispettivamente. Supponiamo inoltre che siano sullo stesso lato di p rispetto all'orientazione data. Sia c il cammino semplice che parte da a' e procede parallelamente a p fino al punto d' , poi incrocia m una volta tornando ad a' . Applichiamo T_c a p . Allora si può scegliere $d \in \mathcal{D}$ tale che

$$d(T_c(p)) \subset p \cup N, \quad \text{e} \quad |d(T_c(p)) \cap m| < k,$$

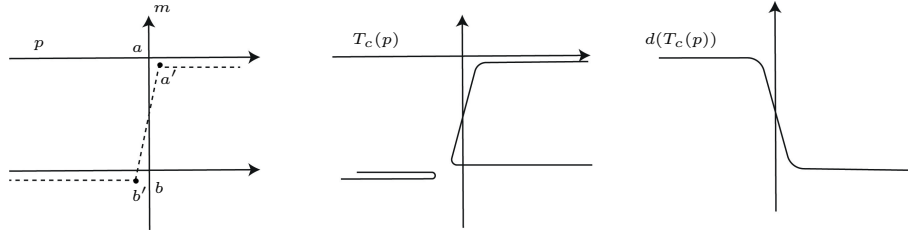


Figura 4.4: Primo caso del Lemma 4.2.4

come in Figura 4.5. Per ipotesi induttiva segue la tesi.

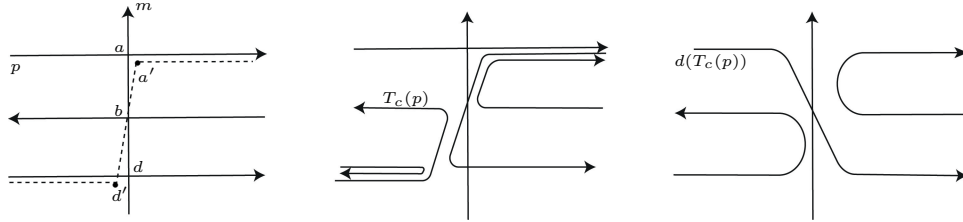


Figura 4.5: Secondo caso del Lemma 4.2.4

□

Lemma 4.2.5. *Siano p, m_1, \dots, m_r cammini semplici di \mathcal{S}_g , p chiuso e $|m_i \cap m_j| = 0$ se $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq l$. Allora esiste un cammino u tale che $u \sim_c p$ tale che per ogni $i = 1, \dots, l$, $|u \cap m_i| = 0$ o 2_0 .*

Dimostrazione. Siccome $|m_i \cap m_j| = 0$, possiamo trovare degli intorni disgiunti N_1, \dots, N_r di m_1, \dots, m_r rispettivamente. Applicando il Lemma 4.2.4 a $p_1 = p$ e m_1 , otteniamo un cammino p_2 che soddisfa le condizioni dell'enunciato rispetto a m_1 . Consideriamo ora $p = p_2$ e m_2 e applichiamo di nuovo il Lemma 4.2.4, ottenendo un cammino p_3 che soddisfa le condizioni dell'enunciato rispetto a m_2 e $|p_3 \cap m_1| = 0, 1$ oppure 2_0 . Iterando questa procedura, si ottiene $u = p_r \sim_c p_{r-1} \sim_c \dots \sim_c p_1 = p$ tale che $|u \cap m_i| = 0, 1$, oppure 2_0 per ogni m_i . Se per qualche $i = 1, \dots, l$, si ha $|u \cap m_i| = 1$, allora dal Lemma 4.2.2 esiste un cammino u' tale che $u' \sim_c u$ tale che $|u' \cap m_i| = 0$. □

Consideriamo ora le curve m_i, a_i, d_i , $i = 1, \dots, g$ come in Figura 4.6.

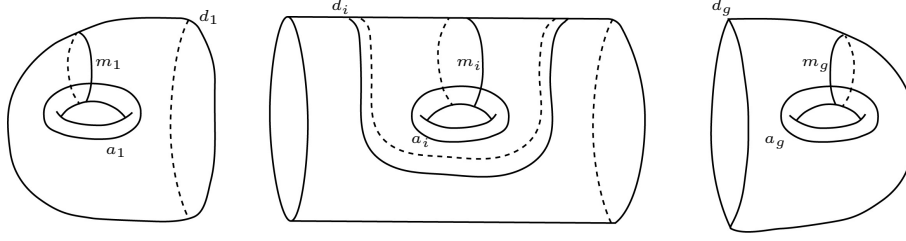


Figura 4.6: Curve m_i , d_i e a_i di \mathcal{S}_g

Lemma 4.2.6. *Siano $\{m_i, d_i : i = 1, \dots, g\}$ le curve in Figura 4.6. Sia $h \in \mathcal{G}$ e sia $p = h(m_1)$. Allora esiste una curva semplice chiusa v tale che $v \sim_c p$, $|v \cap m_i| = 0$ e $|v \cap d_i| = 0$ oppure 2_0 , per ogni $i = 1, \dots, g$.*

Dimostrazione. Le curve di $\{m_i, d_i : i = 1, \dots, g\}$ sono a due a due disgiunte. Dal Lemma 4.2.5, esiste $u \sim_c p$ tale che $|u \cap m_i| = 0$ e 2_0 e $|u \cap d_i| = 0$ o 2_0 , per ogni $i = 1, \dots, g$. Proviamo che esiste v tale che $u \approx v$, dove v non incontra nessun m_i . Se $|u \cap m_j| = 0$ per ogni $j = 1, \dots, g$, abbiamo fatto. Supponiamo allora che per qualche $1 \leq j \leq g$, si ha $|u \cap m_j| = 2_0$. Si supponga inoltre che $|u \cap d_j| = 0$. Si noti che d_j è “bordo” di un toro. Si noti che, esplicitando tutti i possibili cammini u , questi o intersecano sé stessi oppure sono il bordo di un disco su \mathcal{S}_g , impossibile perché $u \sim_c p = h(m_1)$ e m_1 non è bordo di un disco. Segue che se $|u \cap m_j| = 2_0$, allora anche $|u \cap d_j| = 2_0$. Sia $u \cap m_j = \{a, b\}$. Allora a e b dividono u e m_j in coppie di archi $u = u_1 \cup u_2$ e $m_j = m_{j_1} \cup m_{j_2}$. Almeno una tra le quattro

$$u_1 \cup m_{j_1}, \quad u_1 \cup m_{j_2}, \quad u_2 \cup m_{j_1}, \quad u_2 \cup m_{j_2},$$

è bordo di un disco D_j nel j -esimo manico. Usando questo disco possiamo costruire un omeomorfismo $d_j \in \mathcal{D}$, con d_j che ha supporto in un intorno di D_j , tale che $|d_j(u) \cap m_j| = 0$. Applicando questo argomento per ogni j , si ricava $v = (d_g \dots d_2 d_1)(u)$, dove $d_i = id$ se $|u \cap m_i| = 0$. \square

Lemma 4.2.7. *Siano p, m_1 come nelle ipotesi del Lemma 4.2.6. Allora $p \sim_c m_1$.*

Dimostrazione. Sia $v \sim_c p$ la curva chiusa e semplice la cui esistenza è garantita dal Lemma 4.2.6. Siccome $|v \cap m_j| = 0$ per $j = 1, \dots, g$, allora v è contenuta nella sfera con $2g$ buchi $\mathcal{S}_g - (m_1 \cup \dots \cup m_g)$. Ora v sconnette la sfera ma non \mathcal{S}_g , perché v è omeomorfa a m_1 e questa non divide \mathcal{S}_g . Siano

$m_{i,1}$ e $m_{i,2}$ i $2g$ bordi ottenuti dal taglio lungo le m_i , per ogni $i = 1, \dots, g$. Possiamo vedere la sfera $\mathcal{S}_g - (m_1 \cup \dots \cup m_g)$ come un disco con $2g$ componenti di bordo immerso nel piano \mathbb{R}^2 . Allora, dal Teorema della curva di Jordan, per un certo $k \in \{1, \dots, g\}$ v separa un bordo $m_{k,1}$ da $m_{k,2}$, quindi incontra una delle a_k , per un certo $k = 1, \dots, g$. Si noti che dal Lemma 4.2.6, si ha che $|v \cap m_k| = 0$ e $|v \cap d_k| = 0$ oppure 2_0 . Dal fatto che $|v \cap a_k| \neq 0$ e di nuovo dal Teorema della curva di Jordan, in entrambi i casi si deve avere $|v \cap a_k|$ dispari, altrimenti v non separerebbe i due bordi $m_{k,1}$ e $m_{k,2}$. A meno di isotopia si può assumere che $|v \cap a_k| = 1$. Dal Lemma 4.2.2 segue $v \sim_c a_k$. Sia $k \neq 1$. Scegliamo una curva chiusa e semplice m su \mathcal{S}_g che incontra a_k e m_1 una sola volta. Dal Lemma 4.2.2 si ha che $a_k \sim_c m \sim_c m_1$. Dalla transitività di \sim_c , da $v \sim_c m_1$ e $p \sim_c v$ si ha $p \sim_c m_1$. Se $k = 1$ è sufficiente scegliere $m_1 = m$ e la tesi segue direttamente. \square

Procediamo ora con la dimostrazione del Teorema 4.2.1. Sia $h \in \mathcal{G}$ un omeomorfismo di \mathcal{S}_g in sé stessa e sia $p = h(m_1)$. Dal Lemma 4.2.7, possiamo trovare $y \in \mathcal{E}$ tale che $y(p) = m_1$. Fissiamo un'orientazione di m_1 . Questo induce un'orientazione su $p = h(m_1)$ e di conseguenza su $y(p) = m_1$, che può coincidere o no con l'orientazione assegnata a m_1 . Ma ora osserviamo che, applicando due volte il Lemma 4.2.2, il prodotto $T_{a_1} T_{m_1}^2 T_{a_1}$ manda m_1 in una curva isotopa ad essa ma con orientazione invertita, in modo che se necessario possiamo rimpiazzare y con $y' = (T_{a_1} T_{m_1}^2 T_{a_1})y$, assicurando che l'immagine di p abbia la stessa orientazione di m_1 . Sia $h_* = yh$ o $y'h'$ scelto opportunamente affinché venga mantenuta l'orientazione di m_1 . Allora, componendo h_* con un'opportuna isotopia se necessario, possiamo assumere che h_* ristretto a m_1 sia l'identità.

Tagliando \mathcal{S}_g lungo m_1 , possiamo vedere h_* come un omeomorfismo di $\mathcal{S}_g - (D_1 \cup D_2)$ in sé, con D_1, D_2 dischi, dove h_* è l'identità su $\partial D_i, i = 1, 2$. Siano z_1 e z_2 due punti interni a D_1 e D_2 rispettivamente. Allora $h_* : \mathcal{S}_{g-1} - (D_1 \cup D_2) \rightarrow \mathcal{S}_{g-1} - (D_1 \cup D_2)$ può essere esteso a $\bar{h}_* : \mathcal{S}_{g-1} \rightarrow \mathcal{S}_{g-1}$ tale che $\bar{h}_*(z_i) = z_i, i = 1, 2$. Si osservi che \bar{h}_* è un elemento del pure mapping class group $\mathcal{PM}_{g-1,0,2}$. Procediamo ora per induzione sul genere g per dimostrare che $\mathcal{M}_{g,0,0}$ è generato da avvitamanti di Dehn.

$\mathcal{M}_{0,0,0}$ è generato banalmente da avvitamanti. Supponiamo ora che $\mathcal{M}_{g-1,0,0}$ sia generato da avvitamanti. Sia

$$i_* : \mathcal{PM}_{g-1,0,2} \rightarrow \mathcal{PM}_{g-1,0,0} = \mathcal{M}_{g-1,0,0},$$

l'omomorfismo indotto dall'inclusione $i : \mathcal{F}_2 \mathcal{S}_{g-1} \hookrightarrow \mathcal{F}_0 \mathcal{S}_{g-1}$. Inoltre, $\mathcal{PM}_{g-1,0,2}$ è generato da $\ker i_*$ e dagli elementi di $\mathcal{M}_{g-1,0,0}$ dati dal sol-

levamento a $\mathcal{PM}_{g-1,0,2}$. Per uno studio più approfondito di questo risultato si veda il Teorema 4.2, p. 152, cap. 4, sez. 2, in [2]. Dal Lemma 4.1.3, ogni avvitamento di Dehn di \mathcal{S}_{g-1} è isotopo ad un avvitamento di Dehn di $\mathcal{S}_{g-1,0,2}$. In particolare, se la curva rispetto a cui si applica l'avvitamento include al suo interno i punti z_1 o z_2 , a meno di omeomorfismi isotopi all'identità possiamo spostare i due punti al di fuori della curva. Dal Teorema 4.1.2, $\ker i_*$ è generato da spin di z_1 e z_2 lungo opportune curve. Si osservi che uno spin di z_i rispetto ad una curva c , con $i = 1, 2$, è prodotto di avvitementi di Dehn in direzioni opposte lungo due curve c_1 e c_2 tali che $c_1 \approx c \approx c_2$, con c_1 e c_2 separate da $z_i \in c$. Si osservi inoltre che se \bar{h}_* è isotopo all'identità, allora anche h_* lo è. In conclusione, segue che \bar{h}_* è prodotto di avvitementi di Dehn, da cui anche h lo è.

□

Capitolo 5

Presentazioni dei gruppi di automorfismi di superfici

5.1 Premesse

Sia $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{g,n} = \mathcal{S}_{g,n,0}$ una superficie di genere g e con n componenti di bordo. Indichiamo con $\mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{M}_{g,n,0}$ il *mapping class group* di \mathcal{S} formato da tutte le classi di isotopia degli omeomorfismi $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ che preservano l'orientazione della superficie. Nel seguito di questo capitolo vengono usate le notazioni $a * b = aba^{-1}$, mentre $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Dal Teroema 4.2.1 segue che ogni omeomorfismo di $\mathcal{M}_{g,n}$ è isotopo al prodotto di avvitamanti di Dehn.

Ricordiamo alcuni risultati utili per le sezioni a seguire. Per le dimostrazioni si rimanda alla bibliografia.

Lemma 5.1.1 (di Alexander). *Sia $g : B^k \rightarrow B^k$ un omeomorfismo del k -disco in sé stesso tale che g fissa punto per punto la $(k-1)$ -sfera $S^{k-1} = \partial B^k$. Allora g è isotopo all'identità tramite un'isotopia che fissa S^{k-1} . Se $g(0) = 0$, allora l'isotopia può essere scelta in modo che lo 0 venga fissato.*

Per una dimostrazione si rimanda a [2], sez. 4.2, p. 161 - 162.

Lemma 5.1.2. *Sia α una curva di \mathcal{S} e sia $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ un omeomorfismo tale che $\alpha' = h(\alpha)$. Allora $T_{\alpha'} = hT_{\alpha}h^{-1}$.*

Per una dimostrazione si rimanda a [14], sez. 3 p. 430.

Lemma 5.1.3. *Sia $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ una catena di curve di \mathcal{S} , cioè curve chiuse e semplici tali che $|\gamma_i \cap \gamma_{i+1}| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, k-1$, mentre*

$|\gamma_i \cap \gamma_j| = 0$ per ogni i, j tali che $|i - j| > 1$. Sia N l'intorno regolare di $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$. Sia c_i l'avvitamento di Dehn rispetto la curva γ_i . Valgono le seguenti relazioni:

i) Relazione di commutatività: $c_i c_j = c_j c_i$ se $|i - j| > 1$.

ii) Relazione di treccia: $c_i c_j(\gamma_i) = \gamma_j$ e $c_i c_j c_i = c_j c_i c_j$ se $|i - j| = 1$.

iii) Relazione di catena: Se k è dispari, allora N ha due componenti di bordo ∂_1 e ∂_2 e segue $(c_1 c_2 \dots c_k)^{k+1} = T_{\partial_1} T_{\partial_2}$.

Se k è pari, allora N ha una sola componente di bordo ∂_1 e vale $(c_1 c_2 \dots c_k)^{2k+2} = T_{\partial_1}$.

iv) $(c_2 c_1 c_3 c_2)(c_4 c_3 c_5 c_4)(c_2 c_1 c_3 c_2) = (c_4 c_5 c_3 c_4)(c_2 c_1 c_3 c_2)(c_4 c_3 c_5 c_4)$, se $k \geq 5$.

v) $(c_1 c_2 \dots c_k)^{k+1} = (c_1 c_2 \dots c_{k-1})^k (c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1^2 c_2 \dots c_{k-1} c_k) = (c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1^2 c_2 \dots c_{k-1} c_k)(c_1 c_2 \dots c_{k-1})^k$.

Per una dimostrazione si rimanda a [14], sez. 3 p. 431.

Lemma 5.1.4 (della relazione a lanterna). Sia B un disco con bordo ∂ e tre buchi all'interno limitati dalle curve ∂_1, ∂_2 e ∂_3 disposti a triangolo come in Figura 5.1. Chiamiamo $\alpha_{i,j}$ la curva semplice e chiusa in B che separa ∂_i, ∂_j dall'altra curva del triangolo, per ogni $1 \leq i < j \leq 3$. Sia d l'avvitamento di Dehn rispetto la curva ∂ , d_i l'avvitamento rispetto la curva ∂_i e $a_{i,j}$ l'avvitamento rispetto $\alpha_{i,j}$. Allora segue

$$d d_1 d_2 d_3 = a_{1,2} a_{1,3} a_{2,3}.$$

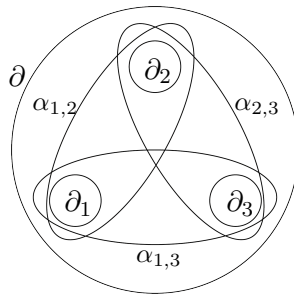


Figura 5.1: Relazione a lanterna

5.2 Il gruppo $\mathcal{M}_{0,n+1}$

Siamo pronti per dare una presentazione del gruppo $\mathcal{M}_{0,n+1}$.

Teorema 5.2.1. *Sia B un disco con bordo ∂ e con n buchi interni limitati dalle curve $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n$. Sia $\alpha_{i,j}$ la curva chiusa e semplice che separa due buchi ∂_i, ∂_j dagli altri come in Figura 5.2, per ogni $1 \leq i < j \leq n$. Sia d l'avvitamento di Dehn rispetto ∂ , d_i l'avvitamento rispetto ∂_i per ogni i , e $a_{i,j}$ l'avvitamento rispetto $\alpha_{i,j}$, per ogni i, j tali che $1 \leq i < j \leq n$. Allora il gruppo $\mathcal{M}_{0,n+1}$ ammette una presentazione*

$$\langle d_i, a_{i,j} \mid (B1), (B2), (a), (b), (c), (d) \rangle,$$

dove:

(B1) $[d_i, d_j] = 1$ e $[d_i, a_{j,k}] = 1$ per ogni i, j, k .

(B2) relazioni del gruppo delle trecce pure:

(a) $a_{r,s}^{-1} * a_{i,j} = a_{i,j}$ se $r < s < i < j$ oppure $i < r < s < j$.

(b) $a_{r,s}^{-1} * a_{s,j} = a_{r,j} * a_{s,j}$ se $r < s < j$.

(c) $a_{r,j}^{-1} * a_{r,s} = a_{s,j} * a_{r,s}$ se $r < s < j$.

(d) $[a_{i,j}, a_{r,j}^{-1} * a_{r,s}] = 1$ se $r < i < s < j$.

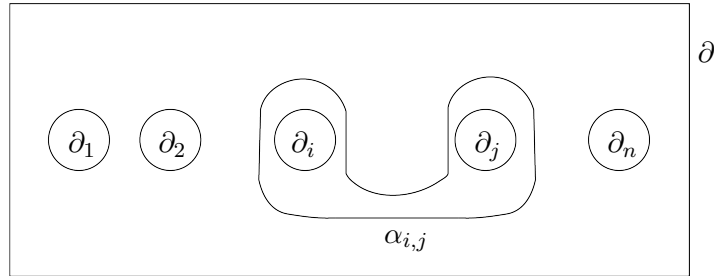


Figura 5.2: Curve δ_i e $\alpha_{i,j}$ del disco B

Dimostrazione. Le relazioni (B2) sono le relazioni della presentazione del gruppo delle trecce pure di n stringhe il quale ha dei generatori $a_{i,j}$ e le seguenti relazioni:

(i) $a_{r,s}^{-1} * a_{i,j} = a_{i,j}$ se $r < s < i < j$ oppure $i < r < s < j$.

$$(ii) a_{r,s}^{-1} * a_{s,j} = a_{r,j} * a_{s,j} \text{ se } r < s < j.$$

$$(iii) [a_{r,j}, a_{s,j}] = [a_{r,s}^{-1}, a_{r,j}^{-1}] \text{ se } r < s < j.$$

$$(iv) a_{r,s}^{-1} * a_{i,j} = [a_{r,j}, a_{s,j}] * a_{i,j} \text{ se } r < i < s < j.$$

Per una dimostrazione di questo fatto si rimanda a [2]. Le relazioni (a) e (b) sono le (i) e (ii) rispettivamente. la relazione (d) segue sostituendo la (iii) nella (iv) e cancellando il termine $a_{r,s}$. Sostituendo la (ii) nei primi tre termini di (iii) e cancellando il termine $a_{r,s}^{-1}$ si ricava la (c).

Sia ora il disco B . Incollando un disco con un centro fissato ad ogni curva ∂_i otteniamo un disco con n punture. Il suo mapping class group è isomorfo al gruppo delle trecce pure con generatori $a_{i,j}$ e relazioni (B2). Nel passare da $\mathcal{M}_{0,n+1}$ al mapping class group del disco con punture vengono eliminati gli avvitementi d_i i quali commutano con tutti gli altri elementi. Si può provare inoltre che la rimozione dei dischi dal disco con punture non cambia le relazioni (B2), quindi $\mathcal{M}_{0,n+1}$ ha la presentazione della tesi. \square

5.3 Elementi del gruppo $\mathcal{M}_{g,1}$

Sia $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{g,1}$. Tale superficie può esser vista come un disco a cui sono stati incollati g manici al suo interno. Per ogni $i = 1, \dots, g$, $k = 2, \dots, g$, $j = 1, \dots, g-1$, chiamiamo le curve α_i , β_i , δ_k e ε_j come in Figura 5.3.

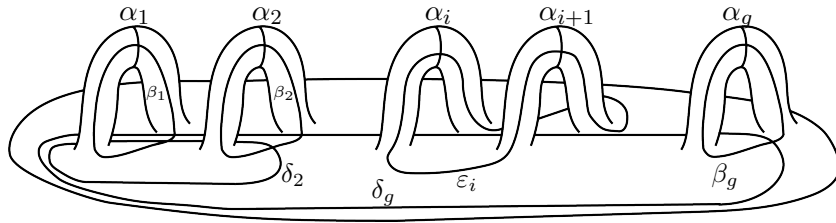


Figura 5.3: Curve α_i , β_i , δ_k e ε_j

La curva α_i corrisponde al meridiano dell' i -esimo manico, β_i è la curva che percorre l' i -esimo manico e ε_i è la curva che passa nell' i -esimo e nell' $(i+1)$ -esimo manico. Le curve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ formano un sistema di taglio.

Sia I_0 l'insieme di indici $I_0 = \{-g, 1-g, 2-g, \dots, -1, 1, 2, \dots, g-1, g\}$. Tagliando \mathcal{S} lungo le curve $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ otteniamo un disco \mathcal{S}_0 con $2g$ buchi limitati dalle curve ∂_i , con $i \in I_0$, dove ∂_i e ∂_{-i} corrispondono alla stessa curva α_i in \mathcal{S} . L'applicazione che incolla i buchi di \mathcal{S}_0 fino ad ottenere \mathcal{S} identifica ∂_i con ∂_{-i} applicando una riflessione rispetto un asse orizzontale. Nel caso di \mathcal{S}_0 , le isotopie sono intese relative rispetto i bordi. Le curve di \mathcal{S} possono essere rappresentate in \mathcal{S}_0 . Se qualche curva in \mathcal{S} incrocia α_i , per qualche i , questa viene rappresentata come unione disgiunta di archi in \mathcal{S}_0 . Ad esempio $\varepsilon_i \subset \mathcal{S}$ in \mathcal{S}_0 diventa due archi, uno da ∂_{-i} a ∂_{-i-1} e l'altro da ∂_i a ∂_{i+1} . Chiamiamo $\delta_{i,j}$, $i < j$, $i, j \in I_0$ la curva di \mathcal{S}_0 che separa ∂_i e ∂_j dai restanti buchi come in Figura 5.4.

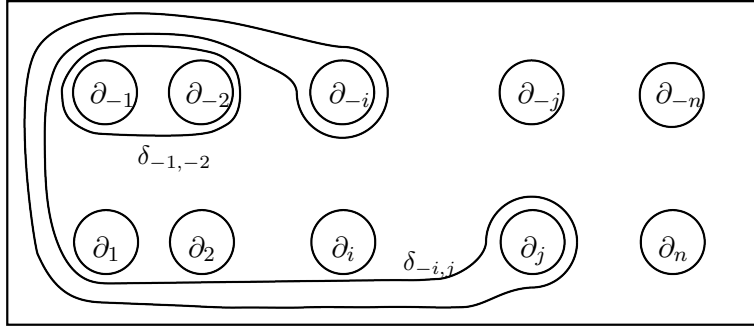


Figura 5.4: Curve $\delta_{i,j}$

Definizione 5.3.1. Indichiamo con a_i , b_i e e_j gli avvitementi di Dehn delle curve α_i , β_i e ε_j rispettivamente, per ogni $i = 1, \dots, g$, $j = 1, \dots, g-1$. Definiamo inoltre gli omeomorfismi:

$$s = b_1 a_1 a_1 b_1.$$

$$t_i = e_i a_i a_{i+1} e_i \text{ per } i = 1, \dots, g-1.$$

$$d_{1,2} = (b_1^{-1} a_1^{-1} e_1^{-1} a_2^{-1}) * b_2$$

Per $i < j$, $i, j \in I_0$ abbiamo

$$d_{i,j} = (t_{i-1} t_{i-2} \dots t_1 t_{j-1} t_{j-2} \dots t_2) * d_{1,2} \text{ se } i > 0.$$

$$d_{i,j} = (t_{-i-1}^{-1} t_{-i-2}^{-1} \dots t_1^{-1} s^{-1} t_{j-1} t_{j-2} \dots t_2) * d_{1,2} \text{ se } i < 0 \text{ e } i+j > 0.$$

$$d_{i,j} = (t_{-i-1}^{-1} t_{-i-2}^{-1} \dots t_1^{-1} s^{-1} t_j t_{j-1} \dots t_2) * d_{1,2} \text{ se } i < 0, j > 0 \text{ e } i + j < 0.$$

$$d_{i,j} = (t_{-j-1}^{-1} t_{-j-2}^{-1} \dots t_1^{-1} t_{-i-1}^{-1} t_{-i-2}^{-1} \dots t_2^{-1} s^{-1} t_1^{-1} s^{-1}) * d_{1,2} \text{ se } j < 0.$$

$$(t_{j-1}^{-1} d_{j-1,j} t_{j-2}^{-1} d_{j-2,j-1} \dots t_1^{-1} d_{1,2}) * (s^2 a_1^4) \text{ se } i + j = 0.$$

Si osservi che dal Teorema 4.2.1 tutti questi omeomorfismi rappresentano elementi di $\mathcal{M}_{g,1}$. L'azione di questi omeomorfismi viene illustrata tra poco. Prima abbiamo bisogno di introdurre altri particolari omeomorfismi.

Definizione 5.3.2. Un *semiavvitamento* $h_{i,j}$ lungo la curva $\delta_{i,j}$ è la classe di isotopia di un omeomorfismo di \mathcal{S}_0 che lascia fisso l'esterno di $\delta_{i,j}$ mentre all'interno agisce come una rotazione di 180° . In particolare, $h_{i,j}$ scambia ∂_i con ∂_j all'interno di $\delta_{i,j}$ quindi non fissa punto per punto il bordo di \mathcal{S}_0 , mentre $h_{i,j}^2$ fissa il bordo di \mathcal{S}_0 ed è isotopo all'avvitamento di Dehn rispetto $\delta_{i,j}$.

Definizione 5.3.3. Chiamiamo *quarto di avvitamento* l'omeomorfismo $r = a_1 b_1 a_1$ tale che $r(\alpha_1) = \beta_1$, $r^2 = s a_1^2 = h_{-1,1}$, e $r^4 = d_{-1,1}$. L'importanza di tale applicazione sarà chiara nella sez. 5.5.

Lemma 5.3.4. *Il risultato dell'azione di t_k , rispettivamente s , su di una curva $\delta_{i,j}$ è lo stesso dell'azione di $h_{k,k+1} h_{-k-1,-k}$, rispettivamente $h_{-1,1}$. In particolare, segue che t_k ruota $\delta_{i,j}$ intorno a $\delta_{k,k+1}$ in senso antiorario e intorno $\delta_{-k-1,-k}$ in senso antiorario, scambiando i rispettivi buchi. Se (i,j) è disgiunta da $\{k, k+1, -k, -k-1\}$ allora t_k lascia $\delta_{i,j}$, $\delta_{k,k+1}$ e $\delta_{-k-1,-k}$ invariate. Allo stesso modo s ruota $\delta_{i,j}$ in senso antiorario intorno $\delta_{-1,1}$ scambiando i rispettivi buchi. Se (i,j) è disgiunto da $\{-1, 1\}$, allora s lascia $\delta_{i,j}$ e $\delta_{-1,1}$ invariate.*

Lemma 5.3.5. *Gli elementi $d_{i,j}$ di $\mathcal{M}_{g,1}$ sono gli avvitamenti di Dehn rispetto le curve $\delta_{i,j}$, per ogni i, j .*

Per una dimostrazione di questi due lemmi si rimanda a [14], sez. 3, p. 434 - 435.

Lemma 5.3.6. *In $\mathcal{M}_{g,1}$ valgono le relazioni:*

(M1) $b_2 a_2 b_2 = a_2 b_2 a_2$ e $[b_1, b_2] = 1$. Ogni altra coppia di elementi consecutivi (a, b) nel seguente ordine $b_2, b_1, a_1, e_1, a_2, e_2, \dots, a_{g-1}, e_{g-1}, a_g$ soddisfa $aba = bab$, e ogni coppia (c, d) di elementi non consecutivi nell'ordine di cui sopra soddisfa $[c, d] = 1$.

$$(M2) \quad (b_1 a_1 e_1 a_2)^5 = b_2 a_2 e_1 a_1 b_1^2 a_1 e_1 a_2 b_2.$$

$$(M3) \quad d_3 a_1 a_2 a_3 = d_{1,2} d_{1,3} d_{2,3} \quad \text{dove} \quad d_{1,2} = (a_2 e_1 a_1 b_1)^{-1} b_2 (a_2 e_1 a_1 b_1), \\ d_{1,3} = t_2 d_{1,2} t_2^{-1}, \quad d_{2,3} = t_1 d_{1,3} t_1^{-1}, \quad d_3 = b_2 a_2 e_1 b_1^{-1} d_{1,3} b_1 e_1^{-1} a_2^{-1} b_2^{-1}.$$

Dimostrazione. La relazione (M1) segue dal Lemma 5.1.3, (i) e (ii). Le curve β_1 , α_1 e ε_1 formano una catena di curve. Una componente di bordo dell'intorno regolare N di $\alpha_1 \cup \beta_1 \cup \varepsilon_1$ è uguale a β_2 . Si verifica facilmente che $a_2 e_1 a_1 b_1^2 a_1 e_1 a_2 (\beta_2)$ è uguale all'altra componente di bordo di N . Dalla (iii) del Lemma 5.1.3 e dal Lemma 5.1.2 si ricava

$$(b_1 a_1 e_1)^4 = b_2 a_2 e_1 a_1 b_1^2 a_1 e_1 a_2 b_2 (a_2 e_1 a_1 b_1^2 a_1 e_1 a_2)^{-1}. \quad (5.3.1)$$

Dalla (v) del Lemma 5.1.3, l'equazione (5.3.1) equivale alla relazione (M2). Sia ora la relazione (M3). Applicando gli avvitalamenti uno alla volta si può verificare che $(b_2 a_2 e_1 b_1^{-1})(\delta_{1,3}) = \delta_3$, dove δ_3 è una delle curve definite nella Figura 5.3. Segue che d_3 rappresenta l'avvitamento rispetto la curva δ_3 . Tagliando \mathcal{S} lungo α_1 , α_2 , α_3 e δ_3 si ottengono due superfici \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , una delle quali è un disco con tre buchi. Dal fatto che $d_{i,j}$ rappresenta l'avvitamento rispetto $\delta_{i,j}$, la relazione (M3) segue applicando il Lemma 5.1.4 al disco. \square

5.4 Lo stabilizzatore di un vertice

Lo scopo di questa sezione è di dare una presentazione allo stabilizzatore di un vertice di $\mathcal{X}_{g,n}$. A tal fine ricordiamo che dato un gruppo \mathcal{G} , un insieme X e un'azione di gruppo $\varphi : \mathcal{G} \times X \rightarrow X, (g, x) \rightarrow g \cdot x$, definiamo lo stabilizzatore di $x \in X$ come il sottogruppo $H_x = \{g \in \mathcal{G} \mid g \cdot x = x\}$ di \mathcal{G} . Osserviamo che dato un qualunque sistema di taglio $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$ e un qualunque omeomorfismo h di $\mathcal{M}_{g,1}$, allora $\langle h(\gamma_1), \dots, h(\gamma_g) \rangle$ è ancora un sistema di taglio. Sia $v_0 \in \mathcal{X}_{g,n}$ il vertice dato dalle curve $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ e sia \mathcal{H} lo stabilizzatore di v_0 .

Teorema 5.4.1. *Lo stabilizzatore \mathcal{H} del vertice v_0 ammette presentazione*

$$\langle a_1, \dots, a_g, s, t_1, \dots, t_{g-1}, d_{i,j} \text{ per } i < j, i, j \in I_0 \mid (P1) - (P8) \rangle,$$

dove

$$(P1) \quad [a_i, a_j] = 1 \text{ e } [a_i, d_{j,k}] = 1 \text{ per ogni } i, j, k \in I_0.$$

(P2) relazioni del gruppo delle trecce pure con generatori $d_{i,j}$.

(P3) $t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$ se $i = 1, \dots, g-2$ e

$$[t_i, t_j] = 1 \text{ se } 1 \leq i < j-1 < g-1.$$

(P4) $s^2 = d_{-1,1} a_1^{-4}$ e $t_i^2 = d_{i,i+1} d_{-i-1,-i} a_i^{-2} a_{i+1}^{-2}$ se $i = 1, \dots, g-1$.

(P5) $[t_1, s] = 1$ se $i = 2, \dots, g-1$.

(P6) $st_1 st_1 = t_1 st_1 s$.

(P7) $[s, a_i] = 1$ se $1 \leq i \leq g$,

$$t_i * a_i = a_{i+1} \text{ se } 1 \leq i \leq g-1,$$

$$[a_i, t_j] = 1 \text{ se } 1 \leq i \leq g \text{ e } j \neq i, i-1.$$

(P8)

$$s * d_{i,j} = d_{i,j} \text{ se } i \neq \pm 1 \text{ e } j \neq \pm 1, \text{ oppure se } i = -1 \text{ e } j = 1,$$

$$s * d_{-1,j} = d_{1,j} \text{ se } 2 \leq j \leq g,$$

$$s * d_{i,-1} = d_{i,1} \text{ se } -g \leq i \leq -2,$$

$$t_k * d_{i,j} = d_{i,j} \text{ se } 1 \leq k \leq g-1 \text{ e } (j = i+1 = k+1, \text{ oppure } j = i+1 = -k, \text{ oppure } i, j \notin \{\pm k, \pm(k+1)\}),$$

$$t_k * d_{k,j} = d_{k+1,j} \text{ se } 1 \leq k \leq g-1 \text{ e } k+2 \leq j \leq g,$$

$$t_k * d_{i,-k-1} = d_{i,-k} \text{ se } 1 \leq k \leq g-1 \text{ e } -g \leq i \leq -k-2,$$

$$t_k * d_{-k-1,k} = d_{-k,k+1},$$

$$t_k * d_{-k-1,k+1} = d_{k,k+1} * d_{-k,k} \text{ se } 1 \leq k \leq g-1,$$

$$t_k * d_{-k-1,j} = d_{-k,j} \text{ se } 1 \leq k \leq g-1 \text{ e } j > -k, j \neq k, k+1,$$

$$t_k * d_{i,k} = d_{i,k+1} \text{ se } 1 \leq k \leq g-1 \text{ e } i < k, i \neq -k, -k-1.$$

Dimostrazione. Un elemento di \mathcal{H} lascia il sistema di taglio v_0 invariato ma può permutare le curve α_i e invertire la loro orientazione. Sicuramente $a_i \in \mathcal{H}$. Si verifica facilmente che

$$t_i(\alpha_i) = \alpha_{i+1}, \quad t_i(\alpha_{i+1}) = \alpha_i, \quad t_i(\alpha_k) = \alpha_k \quad \text{se } k \neq i, i+1.$$

Inoltre $s(\alpha_1) = \alpha_1$ ma ne inverte l'orientazione, mentre lascia invariate le altre α_i , $i \neq 1$. Segue che $t_i, s \in \mathcal{H}$, per ogni $i = 1, \dots, g-1$. Dal Lemma 5.3.5 si ha $d_{i,j} \in \mathcal{H}$ per ogni $i < j$, $i, j \in I_0$. Da provare le relazioni (P1) - (P8). A seguire dimostriamo che le equazioni (P1) - (P8) seguono dalle (M1)

- (M3) enunciate nel Teorema 5.3.6, quindi sono soddisfatte dagli elementi di $\mathcal{M}_{g,1}$, e a maggior ragione in \mathcal{H} .

Possiamo descrivere il gruppo \mathcal{H} tramite due sequenze esatte

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^g \longrightarrow \pm\Sigma_g \longrightarrow \Sigma_g \longrightarrow 1 \quad (5.4.1)$$

$$1 \longrightarrow \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \pm\Sigma_g \longrightarrow 1 \quad (5.4.2)$$

Prima di definire i gruppi e le applicazioni presenti nelle due sequenze (5.4.1) e (5.4.2) abbiamo bisogno del seguente

Lemma 5.4.2. *Sia $1 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 1$ una sequenza esatta di gruppi con presentazioni $A = \langle a_i | Q_j \rangle$ e $\langle c_i | W_j \rangle$. Una presentazione del gruppo B può essere ottenuta come segue. Sia b_i il sollevamento di c_i a B , per ogni i . Sia R_j una parola ottenuta da W_j sostituendo ogni b_i con c_i . Allora, R_j rappresenta un elemento d_j di A che possiamo scrivere come prodotto dei generatori a_i . Infine, per ogni a_i e b_j , il coniugio $b_j * a_i$ rappresenta un elemento $a_{i,j}$ di A che possiamo scrivere come prodotto degli a_i . Segue che*

$$B = \langle a_i, b_j | Q_j, R_j = d_j, b_j * a_i = a_{i,j} \rangle.$$

Descriviamo la sequenza (5.4.1). Il gruppo $\pm\Sigma_g$ corrisponde al gruppo delle permutazioni σ su $2g$ oggetti dell'insieme I_0 tali che $\sigma(-i) = -i$. L'omomorfismo $\varphi : \pm\Sigma \longrightarrow \Sigma_g$ trascura semplicemente il segno. Un generatore di $\ker \varphi$ è una permutazione che cambia il segno di una lettera. A questo punto, il gruppo Σ_g può esser visto come il sottogruppo di $\pm\Sigma_g$ dato dalle permutazioni che mandano numeri positivi in numeri positivi. Sia $\tau_i = (i, i+1)$ una trasposizione di Σ_g , $i = 1, \dots, g-1$. Allora

$$(S1) \quad [\tau_i, \tau_j] = 1 \text{ se } |i - j| > 1,$$

$$(S2) \quad \tau_i * \tau_{i+1} = \tau_{i+1}^{-1} * \tau_i \text{ se } i = 1, \dots, g-2,$$

$$(S3) \quad \tau_i^2 = 1 \text{ se } i = 1, \dots, g-1.$$

La presentazione $\langle \tau_i \mid (S1) - (S3) \rangle$ definisce il gruppo Σ_g . Inoltre, sia σ_i , $i = 1, \dots, g$ il cambio di segno dell' i -esima lettera in una permutazione con segno. Allora $\sigma_i^2 = 1$ e $[\sigma_i, \sigma_j] = 1$ per ogni i, j . Valgono poi $\tau_i * \sigma_i = \sigma_{i+1}$, $\tau_i * \sigma_{i+1} = \sigma_i$ e $[\sigma_i, \tau_i] = 1$ se $j \neq i, i+1$. Segue che è sufficiente avere un generatore $\sigma = \sigma_1$, da cui $\sigma_i = (\tau_{i-1}\tau_{i-2} \dots \tau_1) * \sigma$ per le formule precedenti. Si hanno le relazioni:

$$(S4) \quad \sigma^2 = 1,$$

$$(S5) \quad [\sigma, \tau_i] = 1 \text{ e } [(\tau_i \tau_{i-1} \dots \tau_1) * \sigma, \tau_j] = 1 \text{ se } 1 \leq i \leq g-1 \text{ e } j \neq i \text{ e } j \neq i+1,$$

$$(S6) \quad [(\tau_i \tau_{i-1} \dots \tau_1) * \sigma, \sigma] = 1 \text{ e } [(\tau_i \tau_{i-1} \dots \tau_1) * \sigma, (\tau_j \tau_{j-1} \dots \tau_1) * \sigma] = 1 \text{ se } 1 \leq i, j \leq g-1.$$

Il gruppo $\pm\Sigma_g$ ha dunque presentazione $\langle \sigma, \tau_1, \dots, \tau_{g-1} \mid (S1) - (S6) \rangle$. Da descrivere ora la sequenza (5.4.2). Fissiamo un'orientazione di ogni curva α_i e definiamo l'omeomorfismo $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \pm\Sigma_g$ come segue: un omeomorfismo $h \in \mathcal{H}$ viene mandato nella permutazione $i \mapsto \pm j$ se $h(\alpha_i) = \alpha_j$ con il segno $+$ se l'orientazione non viene invertita, segno $-$ altrimenti. Se h preserva la classe di isotopia di α_i assieme alla sua orientazione, allora h è isotopo ad un omeomorfismo che lascia α_i invariata. L'insieme $\ker \psi$ è il sottogruppo \mathcal{H}_0 di \mathcal{H} dato da tutti gli omeomorfismi che lasciano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ fisse punto per punto. Vogliamo trovare una presentazione di \mathcal{H} a partire dalla sequenza (5.4.2) e tramite il Lemma 5.4.2. A tal fine abbiamo bisogno di una presentazione di \mathcal{H}_0 . Un elemento di \mathcal{H}_0 è un omeomorfismo di \mathcal{S}_0 in sé stessa che lascia le componenti di bordo fisse punto per punto. Incollare le componenti di bordo di \mathcal{S}_0 in modo da ottenere la superficie \mathcal{S} induce un omomorfismo f dal mapping class group di \mathcal{S}_0 ad \mathcal{H}_0 .

Lemma 5.4.3. *Il gruppo $\ker f$ è generato dai prodotti $d_i d_{-i}^{-1}$, dove d_i è l'avvitamento lungo la curva ∂_i .*

Per una dimostrazione si rimanda a [14], sez. 3, p. 438 - 439. Brevemente, dal Teorema 4.1.2 e dalle discussioni presenti in [2] sez. 4.1 p. 156 - 160, si prova che ogni elemento $d_i d_{-i}^{-1}$ induce uno spin rispetto la curva α_i e successivamente che questi appartengono al $\ker f$.

Dal Teorema 5.2.1, si ha che il mapping class group di \mathcal{S}_0 ha presentazione con generatori d_k e $d_{i,j}$, $i < j, i, j \in I_0$ e con relazioni (B1) e (B2). Dunque \mathcal{H}_0 ha presentazione con generatori $a_1, \dots, a_g, d_{i,j}$, con $i < j, i, j \in I_0$ e con relazioni (P1) e (P2). In queste relazioni $d_{i,j}$ rappresenta l'avvitamento di Dehn rispetto $\delta_{i,j}$.

Torniamo alla sequenza (5.4.2). Osservando l'azione delle t_i ed s sulle curve α_j , possiamo sollevare le permutazioni τ_i e σ agli omeomorfismi appena citati rispettivamente. Le (S1) e (S2) si sollevano alla (P3). Le relazioni (S3) e (S4) si sollevano alla (P4). La (S5) si solleva a $[(t_i t_{i-1} \dots t_1) * s, t_j] = 1$ se $j \neq i, i+1$ e segue dalle (P3) e (P5). Consideriamo ora la coniugazione dei generatori di \mathcal{H}_0 con s e t_k . Siccome $s^2 \in \mathcal{H}_0$ e $t_k^2 \in \mathcal{H}_0$, dalla (P4), è sufficiente conoscere il risultato della coniugazione di ogni generatore di \mathcal{H}_0 con s oppure s^{-1} , e con t_k oppure t_k^{-1} . Tale risultato è descritto nella (P7)

e nella (P8). Rimane da verificare il sollevamento della (S6). Iniziamo con $[\tau_1 * \sigma, \sigma]$. Questo si solleva a

$$t_1 s t_1^{-1} s t_1 s^{-1} t_1^{-1} s^{-1} \stackrel{(P6)}{=} t_1 s t_1^{-1} s s^{-1} t_1^{-1} s^{-1} t_1 = t_1 s t_1^{-2} s^{-1} t_1^{-1} t_1^2.$$

Dalla (P4) si ha che $t_1^2 \in \mathcal{H}_0$, mentre la coniugazione di un elemento di \mathcal{H}_0 con s oppure t_i è determinata dalla (P7) e dalla (P8). Dunque sappiamo qual è il sollevamento di $[\tau_1 * \sigma, s] = 1$. Nel caso generale si ha il commutatore $[(t_i t_{i-1} \dots t_1) * s, (t_j t_{j-1} \dots t_1) * s]$. Se $i > j$, allora per le (P3) e (P5) questo è uguale al coniugato di $[t_1 * s, s]$ con $t_j t_{j-1} \dots t_1 t_i t_{i-1} \dots t_2$. Si osservi che questo è un coniugio tra un elemento di \mathcal{H}_0 con gli elementi t_k , quindi il sollevamento segue dalla (P7) e dalla (P8). Questo conclude la dimostrazione del Teorema 5.4.1. □

5.5 Generatori dello stabilizzatore di uno spigolo e di $\mathcal{M}_{g,1}$

In questa sezione si vogliono identificare i generatori dello stabilizzatore di uno spigolo nonché i generatori di $\mathcal{M}_{g,1}$. Iniziamo col provare che il gruppo $\mathcal{M}_{g,1}$ agisce transitivamente sui vertici di $\mathcal{X}_{g,n}$, quindi vi è un'unica orbita dei vertici, e che \mathcal{H} agisce transitivamente su spigoli incidenti in v_0 , quindi vi è un'unica orbita degli spigoli. Nel seguito con la notazione $\mathcal{G} * \mathcal{I}$ si intende il prodotto libero di due gruppi \mathcal{G} e \mathcal{H} .

Sia \mathcal{S} la nostra superficie e sia \mathcal{D} il disco con $2g$ buchi ottenuti tagliando \mathcal{S} lungo le curve $\alpha_1, \dots, \alpha_g$. Chiaramente \mathcal{D}_0 è omeomorfa ad un qualunque altro disco con $2g$ buchi. In particolare, la scelta di tale omeomorfismo e la sua azione sulle componenti di bordo, fa sì che dato un sistema di taglio qualunque, questo può essere scambiato con un altro sistema di taglio della stessa superficie. Dunque $\mathcal{M}_{g,1}$ agisce transitivamente sullo 0-scheletro $\mathcal{X}_{g,n}^0$.

Sia w un vertice di $\mathcal{X}_{g,n}$ connesso tramite un movimento semplice a v_0 . Allora w deve contenere una curva β che interseca una sola volta una qualche $\alpha_i \in v_0$. Tagliando \mathcal{S} lungo le curve $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta$, otteniamo un disco con $2g-1$ buchi, incluso il bordo dato dalle curve α_i e β . Scegliendo un qualunque altro vertice contenente $\beta' \neq \beta$ tale che $|\alpha_j \cap \beta'| = 1$, per qualche $1 \leq j \leq g$, e tagliando \mathcal{S} lungo le curve $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta'$, otteniamo ancora un disco con $2g-1$ buchi, incluso il bordo dato dalle α_j e β' . I due dischi sono ovviamente omeomorfi. In particolare, esistono omeomorfismi che lasciano invariate le

curve $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ ma scambiano la curva β con un'altra curva che interseca una sola volta una sola α_i . In conclusione, il gruppo \mathcal{H} agisce transitivamente su spigoli incidenti in v_0 .

Chiamiamo v'_0 il sistema di taglio $\langle \beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g \rangle$ e sia e_0 lo spigolo che connette v'_0 e v_0 . Indichiamo poi con \mathcal{H}' lo stabilizzatore di e_0 . Vale

Teorema 5.5.1. *Il gruppo \mathcal{H}' ammette generatori $a_1^2 s, t_1 s t_1, a_2, d_{2,3}, d_{-2,2}, d_{-1,1} d_{-1,2} d_{1,2} a_1^{-2} a_2^{-1}$ e t_2, \dots, t_{g-2} .*

Dimostrazione. Un elemento h di \mathcal{H}' può permutare le curve $\alpha_2, \dots, \alpha_g$ ed invertirne l'orientazione. Preservando l'orientazione di tutta la superficie \mathcal{S} , e quindi preservando i numeri di intersezione algebrica, gli elementi di \mathcal{H}' possono inoltre invertire simultaneamente l'orientazione delle curve α_1 e β_1 . Si verifica facilmente che $a^2 s$ inverte le orientazioni di β_1 e α_1 . Allo stesso modo $t_1 s t_1$ inverte l'orientazione di α_2 e lascia β_1 e α_1 invariate. Gli elementi t_i scambiano le curve $\alpha_2, \dots, \alpha_g$.

Modulo gli omeomorfismi sopra citati, possiamo assumere che h lasci invariate le curve α_i e β . Questo induce un omeomorfismo dalla superficie \mathcal{S} tagliata lungo queste curve, e dal Teorema 5.2.1 il suo mapping class group è generato dagli avvitamamenti rispetto ai bordi e dagli avvitamamenti rispetto curve opportune che separano due bordi dai restanti. L'elemento $d_{1,1} = (a_1^2 s)^2$ è l'avvitamento rispetto al bordo generato dal taglio lungo $\alpha_1 \cup \beta_1$. Il coniugio di a_2 con gli t_j produce un avvitamento rispetto gli altri bordi. Il coniugio di $d_{2,3}$ con $(t_1 s t_1)^{-1}$ equivale all'omeomorfismo $d_{-2,3}$, mentre il coniugio di $d_{-2,3}$ con $(t_2 t_1 s t_1)^{-1}$ è uguale a $d_{-3,-2}$. Ogni $d_{k,k+1}$ può esser ottenuto dagli omeomorfismi appena enunciati tramite il coniugio di uno di questi con qualche t_i , con $i > 1$. È chiaro quindi che ogni curva $\delta_{i,j}$, con $i, j \neq \pm 1$, può essere ottenuta a partire da $d_{2,3}$ e $d_{-2,2}$ tramite il coniugio degli elementi dell'enunciato. Segue che i rispettivi avvitamamenti si possono esprimere come prodotto dei generatori sopra enunciati.

Rimane da verificare la presenza di eventuali avvitamamenti intorno al bordo generato da $\alpha_1 \cup \beta_1$. Consideriamo il disco \mathcal{S}_0 . Tale avvitamento deve essere costruito rispetto ad una curva γ che contiene i bordi ∂_{-1} e ∂_1 , incluso l'arco corrispondente a β_1 , più un altro bordo. Supponiamo che questa curva contiene ∂_{-1} , ∂_1 e ∂_2 . Dal Lemma 5.1.4, l'avvitamento rispetto γ è uguale a $d_{-1,1} d_{-1,2} d_{1,2} a_1^{-2} a_2^{-1}$. Ogni altra curva che separa i bordi ∂_{-1} , ∂_1 e ∂_i dai restanti, con $i > 1$, si ottiene da γ applicando l'omeomorfismo t_i . La curva $\tilde{\gamma}$ che separa ∂_{-1} , ∂_1 e ∂_{-2} dagli altri bordi si ricava da γ applicando $(t_1 s t_1)^{-1}$, mentre una curva che contiene ∂_{-1} , ∂_1 e ∂_i , con $i < -2$, si ottiene da $\tilde{\gamma}$

applicando l'omeomorfismo t_i^{-1} . Concludendo, tutti i generatori di \mathcal{H}' sono prodotti dei generatori dell'enunciato di questo Teorema. \square

Consideriamo ora il prodotto libero $\mathcal{H} * \mathcal{Z}$, dove \mathcal{Z} è il gruppo generato dalle potenze di r . Chiamiamo h -prodotto un elemento di $\mathcal{H} * \mathcal{Z}$ con potenze positive di r , cioè del tipo $h_1 r h_2 r \dots h_k r h_{k+1}$. Chiaramente esiste una mappa $\eta : \mathcal{H} * \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{M}_{g,1}$ che definisce l'azione degli h -prodotti sul complesso $\mathcal{X}_{g,n}$. Dato un cammino $p = (v_0, v_1, \dots, v_k) \subset \mathcal{X}_{g,n}$ che comincia in v_0 , costruiamo un h -prodotto $g = h_1 r h_2 r \dots h_k r h_{k+1}$ tale che $h_1 r h_2 r \dots h_k r h_m(v_0) = v_m$, per ogni $m = 1, \dots, k$. Sappiamo già che esiste $h_1 \in \mathcal{H}$ tale che $h_1(v_0) = v_0$ e $h_1(v'_0) = v_1$. Allora, $h_1 r(v_0) = v_1$. Osserviamo ora che $(h_1 r)^{-1}(v_1) = v_0$ e $(h_1 r)^{-1}(v_2) = v'_1$. Allora, esiste $h_2 \in \mathcal{H}$ tale che $h_2 r(v_0) = v'_1$ e $h_1 r h_2 r(v_0) = v_2$, e così via. Si noti che gli elementi h_i degli h -prodotti che corrispondono ad un cammino p non sono univocamente determinati, in particolar modo l'omeomorfismo h_{k+1} . Segue

Teorema 5.5.2. *I generatori di \mathcal{H} insieme all'omeomorfismo r generano il gruppo $\mathcal{M}_{g,1}$*

Dimostrazione. Sia g un elemento di $\mathcal{M}_{g,1}$. Allora $g(v_0)$ è un vertice di $\mathcal{X}_{g,n}$ e dalla connessione di $\mathcal{X}_{g,n}$, esiste un cammino $p = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ tale che $v_k = g(v_0)$. Sia $g_1 = h_1 r h_2 r \dots h_k r$ l' h -prodotto corrispondente al cammino p . Allora $g_1(v_0) = v_k = g(v_0)$, quindi $\eta(g_1^{-1})g = h_{k+1}$ lascia v_0 invariato ed appartiene al gruppo \mathcal{H} . Segue che $g = \eta(h_1 r h_2 r \dots h_k r h_{k+1})$ appartiene a $\mathcal{M}_{g,1}$. \square

5.6 Il gruppo $\mathcal{M}_{g,1}$

Siamo pronti per dare una presentazione di $\mathcal{M}_{g,1}$. Osserviamo dapprima che un h -prodotto g è un elemento di \mathcal{H} se e solo se il cammino indotto è chiuso. Possiamo moltiplicare g a destra con un elemento opportuno di \mathcal{H} in modo da ottenere un h -prodotto che rappresenta l'identità in $\mathcal{M}_{g,1}$ ed induce lo stesso cammino che induce g .

Teorema 5.6.1. *Il gruppo $\mathcal{M}_{g,1}$ ammette presentazione*

$$\langle a_1, \dots, a_g, s, t_1, \dots, t_{g-1}, r, d_{i,j} \mid (P1) - (P11) \rangle$$

dove i generatori sono gli stessi del gruppo \mathcal{H} insieme ad r , le relazioni (P1) - (P8) sono quelle del Teorema 5.4.1, e le restanti

(P9) r commuta con $a_1^2 s$, $t_1 s t_1$, a_2 , $d_{2,3}$, $d_{-2,2}$, $d_{-1,1} d_{-1,2} d_{1,2} a_1^{-2} a_2^{-1}$ e t_2, \dots, t_{g-1} ,

(P10) $r^2 = s a_1^2$,

(P11) $(k_i r)^3 = (k_i s a_1)^2$ per $i = 1, 2, 3, 4$, $(r k_5 r k_5^{-1})^2 = s a_1^2 k_5 s a_1^2 k_5^{-1}$ e $(r k_6)^5 = (s a_1^2 t_1)^4$, dove

$$k_1 = a_1, \quad k_2 = d_{1,2}, \quad k_3 = d_{1,2} d_{-2,1} d_{-2,2} a_2^{-2} a_1^{-1},$$

$$k_4 = a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} d_{1,2} d_{1,3} d_{2,3}, \quad k_5 = a_2 d_{1,2}^{-1} t_1 \quad e \quad k_6 = a_1 t_1.$$

Le relazioni (P9) - (P11) mostrano che alcuni elementi di $\mathcal{H} * \mathcal{Z}$ appartengono a $\ker \eta$. Con il Teorema 5.6.1 si dimostra che $\mathcal{H} * \mathcal{Z}$ modulo le relazioni (P9) - (P11) è isomorfo a $\mathcal{M}_{g,1}$. Per alleggerire la notazione, in seguito useremo le seguenti notazioni: $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_1$ è il quoziente $(\mathcal{H} * \mathcal{Z}) / (P9)$, $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_2$ indica il gruppo $(\mathcal{H} * \mathcal{Z}) / ((P9), (P10))$, ed infine $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_3$ sta per $(\mathcal{H} * \mathcal{Z}) / ((P9), (P10), (P11))$. Nel caso in cui i quozienti siano diversi da questi, la notazione usata sarà quella classica.

Dimostrazione. La relazione (P9) ci dice che r commuta con i generatori del gruppo \mathcal{H}' . Un elemento h di \mathcal{H}' lascia invariato lo spigolo e_0 ma può invertire l'orientazione delle curve α_1 e β_1 . L'omeomorfismo $r^2 = s a_1^2$ agisce in questo modo sulle curve α_1 e β_1 e commuta con r . Modulo questi elementi possiamo assumere che h lascia fisso un intorno regolare di $\alpha_1 \cup \beta_1$ punto per punto. D'altra parte l'azione di r al di fuori di un intorno di $\alpha_1 \cup \beta_1$ è l'identità, quindi commuta con h .

Lemma 5.6.2. *Se due h -prodotti rappresentano lo stesso elemento in $\mathcal{M}_{g,1}$ ed inducono lo stesso cammino, allora sono uguali in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_1$.*

Dimostrazione. Se due h -prodotti $g_1 = h_1 r \dots r h_{k+1}$ e $h_2 = f_1 r \dots r f_{k+1}$ inducono lo stesso cammino $p = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, allora $h_1 r(v_0) = f_1 r(v_0)$. Dunque $h_1^{-1} f_1 r(v_0) = r(v_0)$ e $h_1^{-1} f_1 \in \mathcal{H}'$ commuta con r in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_1$. Nel quoziente $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_1$ si ha

$$f_1 r f_2 = h_1 h_1^{-1} f_1 r f_2 = h_1 r f_2'.$$

Allora g_2 ed un nuovo h -prodotto $h_1 r f_2' r f_3 r \dots r f_{k+1}$ sono uguali in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_1$ ed inducono lo stesso cammino p . Applicando $r^{-1} h_1^{-1}$ ai vertici (v_1, v_2, \dots, v_k) di p otteniamo un cammino più corto che comincia in v_0 ed è indotto dai due h -prodotti più corti $h_2 r \dots r h_{k+1}$ e $f_2' r \dots r f_{k+1}$. La tesi del Lemma 5.6.2 segue per induzione su k .

□

Due cammini distinti possono essere omotopi in $\mathcal{X}_{g,n}^1$. Questo significa che vi sono delle sequenze di vertici del tipo $v_i v_{i+1} v_i$ chiamate *backtracking*.

Lemma 5.6.3. *Se due h -prodotti rappresentano lo stesso elemento in $\mathcal{M}_{g,1}$ ed inducono cammini uguali a meno di backtracking, allora i due h -prodotti sono uguali in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_2$.*

Dimostrazione. Sia un h -prodotto $g = g_i h_{i+1} r h_{i+2} r$, dove g_i è un h -prodotto che induce un cammino più corto p , e il cammino indotto da g ha un backtracking alla fine: $g_i(v_0) = v_i$, $g_i h_{i+1} r(v_0) = v_{i+1}$ e $g_i h_{i+1} r h_{i+2} r(v_0) = v_i$. Chiaramente l' h -prodotto $g_i h_{i+1} r r$ induce lo stesso cammino. In particolare $g_i h_{i+1} r^2(v_0) = v_i$, quindi esiste $h' \in \mathcal{H}$ tale che $\eta(g_i h_{i+1} r^2 h') = \eta(g_i h_{i+1} r h_{i+2} r)$. Dal Lemma 5.6.2 gli h -prodotti coincidono in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_1$. Ma in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})/(P10)$, l'elemento $g_i h_{i+1} r^2 h'$ è uguale ad un h -prodotto più corto che induce il cammino p . La tesi del Lemma 5.6.3 segue per induzione sul numero di backtracking.

□

Le relazioni in (P11) corrispondono ai cammini descritti nelle formule (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.3). Le sei relazioni corrispondono a sei cammini particolari. Scegliamo i seguenti h -prodotti

$$g_i = (k_i r)^3 \quad \text{per } i = 1, 2, 3, 4, \quad g_5 = (r k_5 r k_5^{-1})^2 \quad \text{e} \quad g_6 = (r k_6)^5$$

i quali compaiono nelle rispettive relazioni in (P11). Per $i = 1, 2, 3, 4, 6$ siano γ_i le curve in Figura 5.5 rappresentate sul disco \mathcal{S}_0 . La curva γ_5 è β_2 .

Per $i = 1, 2, 3, 4$ gli omeomorfismi k_i lasciano α_i invariata. Inoltre $k_i r(\alpha_1) = \gamma_i$, $k_i r(\gamma_i) = \beta_1$ e $k_i r(\beta_1) = \alpha_1$. Segue che gli h -prodotti g_i rappresentano cammini del tipo

$$p_i = (\langle \alpha_1 \rangle \rightarrow \langle \gamma_i \rangle \rightarrow \langle \beta_1 \rangle \rightarrow \langle \alpha_1 \rangle).$$

Allo stesso modo, per $i = 5, 6$ gli h -prodotti g_i rappresentano i cammini

$$p_5 = (\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \rightarrow \langle \beta_1, \alpha_2 \rangle \rightarrow \langle \beta_1, \gamma_5 \rangle \rightarrow \langle \alpha_1, \gamma_5 \rangle \rightarrow \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle),$$

$$p_6 = (\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \rightarrow \langle \beta_1, \alpha_2 \rangle \rightarrow \langle \beta_1, \varepsilon_1 \rangle \rightarrow \langle \gamma_6, \varepsilon_1 \rangle \rightarrow \langle \gamma_6, \alpha_1 \rangle \rightarrow \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle).$$

Siccome gli g_i rappresentano cammini chiusi, questi sono uguali in $\mathcal{M}_{g,1}$ a qualche $h_i \in \mathcal{H}$. Allora l'elemento $V_i = g_i h_i^{-1}$ induce anch'esso il cammino p_i ed è l'identità in $\mathcal{M}_{g,1}$. Da provare che h_i è uguale in \mathcal{H} al termine di destra rispettivo nella relazione (P11), quindi $V_i = 1$ in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_3$.

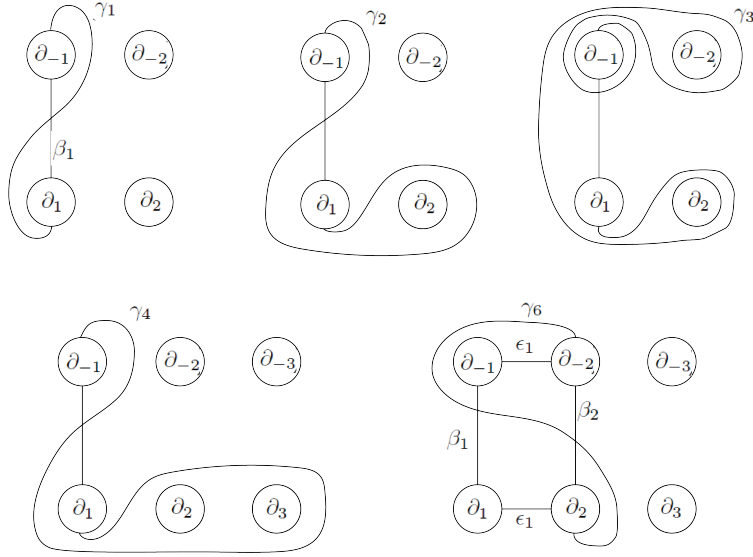


Figura 5.5: Curve γ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 6$

Sappiamo già per il Teorema 2.3.1 che ogni cammino chiuso in $\mathcal{X}_{g,n}$ è somma dei cammini descritti nelle formule (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.3). Alcuni di questi sono rappresentati dai cammini $p_1 - p_6$. Diremo che un cammino chiuso è *coniugato a p_i* se è de tipo $q_1 q_2 q_1^{-1}$, dove q_1 parte da v_0 e q_2 è l'immagine di p_i tramite l'azione di un qualche elemento di $\mathcal{M}_{g,1}$. Da provare che

Lemma 5.6.4. *Ogni cammino chiuso è somma di cammini coniugati ad uno dei $p_1 - p_6$ o i loro inversi.*

Per una dimostrazione si rimanda a [14], sez. 3, p. 444 - 448. All'inizio si applica la *riduzione di Harer*, consultabile anche in [4], per i cammini del tipo (1.2.1), mentre poi si vanno a studiare cammini del tipo (1.2.2) e (1.2.3). I cammini p_i con $i = 1, 2, 3, 4$ rappresentano cammini triangolari, p_5 un cammino quadrato e p_6 un cammino pentagonale.

Possiamo completare la dimostrazione del Teorema 5.6.1. Sia $W \in \mathcal{H} * \mathcal{Z}$ tale che $\eta(W) = 1$. Da provare che $W = 1$ nel quoziente $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_3$. Modulo (P10) possiamo scrivere W come un h -prodotto g che induce un cammino chiuso g . Dal Teorema 2.3.1 il cammino p si può scrivere come somma di cammini coniugati ai cammini (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.3). Dal Lemma 5.6.4 p è somma di cammini coniugati ai cammini $p_1 - p_6$ e ai loro inversi modulo backtracking. Allora possiamo scrivere

$$p = \prod q_i f_i (p_{j_i}^{\pm 1}) q_i^{-1}$$

per qualche $f_i \in \mathcal{M}_{g,1}$, modulo backtracking. Ogni cammino $q_i f_i(p_{j_i}^{\pm 1}) q_i^{-1}$ si può rappresentare con un h -prodotto g_i . Siccome i cammini sono chiusi, si ha $\eta(g_i) \in \mathcal{H}$. Possiamo dunque assumere che $\eta(g_i) = 1$, per ogni i . Il prodotto $\prod g_i$ rappresenta il cammino $p = \prod q_i f_i(p_{j_i}^{\pm 1}) q_i^{-1}$. Dai Lemmi 5.6.2 e 5.6.3, W è uguale a $\prod g_i$ in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_2$. Rimane da dimostrare che $g_i = 1$ in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_3$ per ogni i . Sia $k = j_i$ e sia $q_i f_i(p_k) q_i^{-1}$ il cammino indotto da g_i . Sia u_i un h -prodotto che rappresenta q_i . Allora $u_i(v_0) = f_i(v_0)$ è il primo vertice di $f_i(p_k)$, quindi $\eta(u_i)^{-1} f_i = h_i \in \mathcal{H}$. Ricordiamo che p_k può essere rappresentato da un h -prodotto V_k che è uguale all'identità in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_3$. Allora l' h -prodotto $u_i h_i V_k$ rappresenta $q_i f_i(p_k)$ ed esiste un h -prodotto $u_i h_i V_k w_i$ tale che $\eta(u_i h_i V_k w_i) = 1$ e $u_i h_i V_k w_i$ rappresenta $q_i f_i(p_k) q_i^{-1}$. Chiaramente $u_i h_i w_i$ rappresenta il cammino $q_1 q_1^{-1}$, il quale è omotopicamente nullo per il backtracking. Dai Lemmi 5.6.2 e 5.6.3, l' h -prodotto g_i è uguale a $u_i h_i V_k w_i$ in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_2$, $u_i h_i V_k w_i$ è uguale a $u_i h_i w_i$ in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_3$ e $u_i h_i w_i = 1$ in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_2$. Il cammino inverso a p_k è rappresentato da un altro h -prodotto V'_k , da cui $V_k V'_k$ rappresenta un cammino contraibile per il backtracking. Allora $V_k V'_k = 1$ in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_2$, e $V_k = 1$ in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_3$, e quindi anche $V'_k = 1$ in $(\mathcal{H} * \mathcal{Z})_3$. Questo conclude la dimostrazione del Teorema 5.6.1. \square

5.7 Il gruppo $\mathcal{M}_{g,0}$

In questa sezione si vuole dare una presentazione del mapping class group $\mathcal{M}_{g,0}$ di una superficie chiusa $\mathcal{S}_{g,0}$. Vogliamo provare il seguente

Teorema 5.7.1. *Il gruppo $\mathcal{M}_{g,0}$ per $g > 1$ ammette presentazione con generatori e relazioni del gruppo $\mathcal{M}_{g,1}$ presenti nel Teorema 5.6.1, con l'aggiunta della relazione*

$$(M_4) [b_1 a_1 e_1 a_2 \dots a_{g-1} e_{g-1} a_g a_g e_{g-1} a_{g-1} \dots a_2 e_1 a_1 b_1, d_g] = 1, \text{ dove}$$

$$d_i = (b_2 a_2 e_1 b_1^{-1} t_2 t_3 \dots t_{i-1}) d_{i-1} (b_2 a_2 e_1 b_1^{-1} t_2 t_3 \dots t_{i-1})^{-1},$$

per $i = 3, 4, \dots, g$.

Prima di procedere con la dimostrazione abbiamo bisogno delle seguenti osservazioni. Diamo alcune relazioni ausiliarie che seguono dalle (M1) - (M3). Ad esempio, dalla relazione di treccia $aba = bab$ si possono derivare $a * b = b^{-1} * a$, $a * (b^2) = b^{-1} * (a^2)$, oppure $(ab) * a = b$. Se

vogliamo provare che $[a, b] = 1$, si prova in genere che $a * b = b$. Informalmente la relazione $aba = bab$ ci dice che il termine a può “saltare” ba a destra e diventare b . Da “salti” a destra consecutivi si può provare che $a_1(e_1a_1a_2e_1e_2a_2) = (e_1a_1a_2e_1e_2a_2)e_2$. Si può provare anche che $e_1a_1a_2e_1e_2a_2 = e_1a_2e_2a_1e_1a_2$ e $(b_1a_1e_1a_2) * b_2 = (b_2^{-1}a_2^{-1}e_1^{-1}a_1^{-1}) * b_1$. Nel seguito diremo che alcune relazioni seguono da (J), da “jump”, se seguono facilmente con la tecnica appena mostrata.

Dimostrazione. Possiamo vedere $\mathcal{S}_{g,0}$ come la superficie ottenuta a partire da $\mathcal{S}_{g,1}$ incollando al bordo ∂ un disco D con centro p . Si hanno due sequenze esatte

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}_{g,0,1} \longrightarrow 1 \quad (5.7.1)$$

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{S}_{g,0,1}, p) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{M}_{g,0,1} \xrightarrow{e_*} \mathcal{M}_{g,0,0} \longrightarrow 1 \quad (5.7.2)$$

Nella sequenza (5.7.1) l'avvitamento di Dehn T_∂ appartiene a $\ker \varphi$. Dobbiamo provare che T_∂ genera $\ker \varphi$. Quando tagliamo la superficie lungo le curve $\beta_1, \alpha_1, \varepsilon_1, \alpha_2, \dots, \varepsilon_{g-1}, \alpha_g$ otteniamo un cilindro N che ha ∂ come uno dei bordi. Se $h \in \ker \varphi$, allora h manda ogni curva $\gamma \in \{\beta_1, \alpha_1, \varepsilon_1, \alpha_2, \dots, \varepsilon_{g-1}, \alpha_g\}$ in $h(\gamma)$ isotopa a γ in \mathcal{S}_0 tramite un'isotopia fissa in p . Allora γ e $h(\gamma)$ formano un bigono disgiunto da p , e quindi possiamo assumere disgiunto da D . Segue che h è isotopo in $\mathcal{S}_{g,1}$ ad un omeomorfismo h' che agisce identicamente sulle curve $\beta_1, \alpha_1, \varepsilon_1, \alpha_2, \dots, \varepsilon_{g-1}, \alpha_g$. Dunque possiamo vedere h' come un omeomorfismo del cilindro N in sé stesso. Segue che h' è isotopo ad una potenza di T_∂ , e di conseguenza lo è anche h .

La sequenza (5.7.2) viene introdotta in [2], Teorema 4.3. Tale teorema dimostra che il gruppo $\ker e_*$ è generato dagli spin del tipo $T_{\gamma'}T_\gamma^{-1}$, dove γ e γ' sono curve semplici e non separanti tali che sono bordo di un cilindro in $\mathcal{S}_{g,0,1}$ e contengono il punto p . Ricordiamo che gli spin $h_{c,z}$ introdotti nella sez. 4.1, possono essere visti come il prodotto di due avvitamenti di Dehn lungo curve opportune. La composizione $e_*\varphi$ è un omomorfismo suriettivo da $\mathcal{M}_{g,1}$ al gruppo $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g,0,0}$. Il suo kernel è generato dagli spin del tipo $T_{\gamma'}T_\gamma^{-1}$, con γ e γ' curve semplici e non separanti di $\mathcal{S}_{g,1}$ che sono bordo di un cilindro in cui ∂ è uno dei bordi. È sufficiente considerare uno spin map $T_{\delta'_g}T_{\delta_g}^{-1}$, dove δ_g e δ'_g sono le curve in Figura 5.6. T_{δ_g} è uguale a d_g nella relazione (M4).

Sia $w = b_1a_1e_1a_2 \dots a_{g-1}e_{g-1}a_1^2e_{g-1}a_{g-1} \dots a_2e_1a_1b_1$. Si verifica facilmente che $w(\delta_g) = \delta'_g$. Dal Lemma 5.1.2, la relazione (M4) è equivalente, modulo le relazioni in $\mathcal{M}_{g,1}$, a $T_{\delta_g} = T_{\delta'_g}$. Da questo segue che \mathcal{M}_g ha presentazione con relazioni (M1) - (M4) e la relazione $T_\partial = 1$. Dobbiamo provare che l'ultima relazione segue dalle altre.

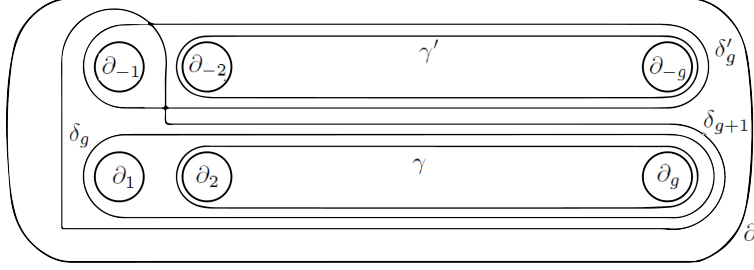


Figura 5.6: Curve δ_g , δ'_g , δ_{g+1} , γ e γ'

Sia $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_{g,1}/(M4)$. Siano d_g , d'_g , d_{g+1} , c e c' gli avvritamenti di Dehn lungo le curve δ_g , δ'_g , δ_{g+1} , γ e γ' rispettivamente. Ogni elemento di $\mathcal{M}_{g,1}$ è un elemento anche di \mathcal{M}' . La notazione usata per entrambi sarà la stessa. D'ora in poi tutti i simboli usati indicano elementi di \mathcal{M}' . Vogliamo provare che $T_{\partial} = 1$. Tutte le relazioni del Lemma 5.1.3 valgono in \mathcal{M}' . In particolare, dalle relazioni (iii) e (v) si ha

$$\begin{aligned}
T_{\partial} &= (a_g e_{g-1} a_{g-1} \dots e_1 a_1 b_1 d_g)^{2g+2} = \\
&= (a_g e_{g-1} a_{g-1} \dots e_1 a_1)^{2g} (b_1 a_1 \dots a_g a_g \dots a_1 b_1) (d_g b_1 a_1 \dots a_g a_g \dots a_1 b_1 d_g), \\
d_g d'_g &= (a_g e_{g-1} a_{g-1} \dots e_1 a_1)^{2g} = \\
&= (a_g e_{g-1} a_{g-1} \dots e_2 a_2)^{2g-2} (e_1 a_2 \dots a_g a_g \dots a_2 e_1) (a_1 e_1 a_2 \dots a_g a_g \dots a_2 e_1 a_1), \\
(a_g e_{g-1} a_{g-1} \dots e_2 a_2)^{2g-2} &= c c', \\
(d_g b_1 a_1)^4 &= c d_{g+1}.
\end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che $c' d_{g+1}^{-1}$ e $d'_g d_g^{-1}$ sono degli spin, quindi $c' = d_{g+1}$ e $d_g = d'_g$. Allora

$$\begin{aligned}
(a_g e_{g-1} a_{g-1} \dots e_2 a_2)^{2g-2} &= (d_g b_1 a_1)^4, \\
d_g^2 &= (a_g e_{g-1} a_{g-1} \dots e_2 a_2)^{2g-2} (e_1 a_2 \dots a_g a_g \dots a_2 e_1) (a_1 e_1 a_2 \dots a_g a_g \dots a_2 e_1 a_1),
\end{aligned}$$

quindi

$$(a_1 e_1 a_2 \dots a_g a_g \dots a_2 e_1 a_1) = (e_1 a_2 \dots a_g a_g \dots a_2 e_1)^{-1} (d_g b_1 a_1)^{-4} d_g^2.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
T_{\partial} &= (a_g e_{g-1} a_{g-1} \dots e_1 a_1)^{2g} (b_1 a_1 \dots a_g a_g \dots a_1 b_1) (d_g b_1 a_1 \dots a_g a_g \dots a_1 b_1 d_g) = \\
&= d_g^2 b_1 (a_1 e_1 a_2 \dots a_g a_g \dots a_2 e_1 a_1) b_1 (d_g b_1 a_1 \dots a_g a_g \dots a_1 b_1 d_g) = \\
&= d_g^2 b_1 (e_1 a_2 \dots a_g a_g \dots a_2 e_1)^{-1} (d_g b_1 a_1)^{-4} d_g^2 b_1 (d_g b_1 a_1 \dots a_g a_g \dots a_1 b_1 d_g).
\end{aligned}$$

Osserviamo che il termine $(d_g b_1 a_1 \dots a_g a_g \dots a_1 b_1 d_g)$ commuta con d_g per la relazione (M4). Tramite la tecnica (J) si può provare che $(d_g b_1 a_1 \dots a_g a_g \dots a_1 b_1 d_g)$ commuta con b_1 e a_1 . In conclusione

$$\begin{aligned}
T_{\partial} &= \\
&= d_g^2 b_1 (e_1 a_2 \dots a_g a_g \dots a_2 e_1)^{-1} (d_g b_1 a_1)^{-1} (d_g b_1 a_1 \dots a_g a_g \dots a_1 b_1 d_g) \cdot \\
&\cdot (d_g b_1 a_1)^{-3} d_g^2 b_1 = \\
&= d_g^2 b_1 a_1 b_1 d_g (a_1^{-1} b_1^{-1} d_g^{-1})^3 d_g^2 b_1 = 1 \text{ dalla (J)}.
\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione del Teorema 5.7.1.

□

Bibliografia

- [1] S. Benvenuti and R. Piergallini, *The complex of pant decompositions of a surface*, Topology Appl. 156 (2008), 399-419.
- [2] J. S. Birman, *Braids, links and mapping class groups*, Annals of Math. Studies 82, Princeton Univ. Press 1974
- [3] B. Gray, *Homotopy theory, An introduction to Algebraic Topology*, Pure and applied mathematics series 64, Academic Press 1975.
- [4] J. L. Harer, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. 72 (1983) 221-239
- [5] J. L. Harer, *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces*, Annals of Mathematics, 121 (1985), 215-249.
- [6] W. J. Harvey, *Boundary structure for the modular group*, Riemann surfaces and related topics: proc. 1978 Stony Brook Conf., Princeton University Press (1978), 245-251.
- [7] W. J. Harvey, *Geometric structure of surface mapping class groups*, Homological group theory Proc. Sympos., Durham (1977) Cambridge Univ. Press, Cambridge 1979, 255-269.
- [8] J. Hass and P. Scott, *Intersections of curves on surfaces*, Israel J. Math. 51 (1985) 90-120.
- [9] A. Hatcher and W. P. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Topology 19 (1980) 3, 221-237.
- [10] N. V. Ivanov, *Complexes of curves and the Teichmüller modular group*, Uspekhi Mat. Nauk 42, No. 3 (1987), 49-91.
- [11] D. Johnson, *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology*, Proc. Amer. Math. Soc. 75 (1979), 119-125.

- [12] A. Putman, *A note on the connectivity of certain complexes associated to surfaces*, Enseignement Mathématique (2) 54 (2008), no. 3-4, 287-301.
- [13] W. P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, Princeton Lectures 2002.
- [14] B. Wajnryb, *An elementary approach to the mapping class group of a surface*, Geometry & Topology, 3 (1999) 405-466.
- [15] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate texts in mathematics (61), Springer-Verlag 1978.