POLIEDRI REGOLARI IN 3 E 4 DIMENSIONI

Indice

0.1 Introduzione 2

1 Poliedri regolari e la loro storia **3**

1.1 La scuola pitagorica 3
1.2 Platone 5
1.3 Euclide 9
1.4 Archimede 12
1.5 Pappo e Diofanto 16
1.6 Il Rinascimento 17
1.7 Keplero 19
1.8 Cartesio ed Eulero 20

2 Teoria dei poliedri **24**

2.1 Premessa 24
2.2 Politopi 25
2.3 Poliedri 26
2.4 Relazioni tra poliedri regolari 29
2.5 Politopi regolari 4-dimensionali 32

0.1 Introduzione

Questa tesi è incentrata sullo studio dei poliedri regolari e sulla loro estensione alla quarta dimensione.
Nel primo capitolo vengono presentati storicamente i cinque corpi regolari, mostrando l'importanza che hanno avuto attraverso i diversi periodi storici e le diverse culture.
Vedremo che i primi studi sui poliedri regolari sono dovuti alla *Scuola pitagorica* e che successiavamente sono stati oggetto di studio da parte di Platone, che li menziona nel *Timeo*, e Euclide che nell'ultimo libro degli *Elementi* si dedica alla costruzione dei cinque solidi regolari.
Vedremo come Archimede si sia interessato a queste particolari figure, anche se, lui si occupa in particolare dei poliedri semi-regolari.
Dopo un periodo di decadenza riguardo alle discipline geometriche, assisteremo ad un risveglio dello studio di queste particolari oggetti durante il Rinascimento con Piero della Francesca e Luca Pacioli suo allievo.
Vedremo anche un notevole interesse da parte di Keplero che utilizzerà i poliedri in astronomia nel tentativo di rappresentare il sistema solare.
Infine vedremo come Cartesio formulò un'importante relazione tra vertici, spigoli e facce di un poliedro che fu dimostrata più tardi da Eulero.
Nel secondo capitolo, invece, andremo a studiare i poliedri da un punto di vista matematico, dando una generalizzazione in dimensioni maggiori di quella tridimensionale e vedremo alcune relazioni che legano un poliedro ad un altro.
Infine andremo a studiare il loro corrispettivo in dimensione quattro.

Capitolo 1

Poliedri regolari e la loro storia

Lo scopo di questo capitolo è quello di dare un'introduzione storica all'argomento che andremo a trattare che è quello dei poliedri regolari, più comunemente chiamati *Solidi Platonici*.
Seguire l'evoluzione storica delle teorie riguradanti questo argomento aiuta lo studio di questi oggetti geometrici fornendoci le basi per arrivare a studiarli in dimensioni maggiori di quella tridimensionale.

1.1 La scuola pitagorica

Il più antico scritto pervenutoci nel quale vengono menzionati i cinque poliedri regolari è il *Timeo* di Platone.
Ed è sia per questo ritrovamento sia per il ruolo fondamentale che giocano nelle teorie elaborate da Platone che tradizionalmente i poliedri regolari vengono chiamati *Solidi Platonici*.
Tuttavia, ci sono delle ragioni che portano a pensare che la scoperta e lo studio dei cinque solidi regolari sia dovuta alla *Scuola pitagorica*.
L'attività in campo matematico della *Scuola pitagorica* è presente negli scritti di Platone, Aristotele e su un passo di Proclo, ma mentre gli scritti dei primi due ci garantiscono soltanto che la scuola pitagorica si è occupata oltre che di filosofia anche di matematica, il *Riassunto* di Proclo entra più nei dettagli.
Nel *Riassunto* si attribuisce alla *Scuola pitagorica* il primato dello studio delle figure cosmiche, ovvero, dei poliedri regolari.
Lo scritto di Proclo non è l'unico indizio che abbiamo per sostenere che la scuola pitagorica conoscesse i solidi regolari.
Infatti, in vari siti archeologici italiani sono stati rinvenuti oggetti aventi forma

di un dodecaedro in pietra databili intorno al VI secolo a.C.
Nulla impedisce di pensare che la scuola pitagorica, venuta a contatto con la civiltà etrusca, abbia avuto il merito di trattare il problema della costruzione del dodecaedro da un punto di vista geometrico.
I pitagorici potrebbero aver costruito i cinque poliedri regolari semplicemente accostando un certo numero di poligoni regolari in modo da ottenere prima di tutto un angolo solido, e poi più angoli solidi dello steso tipo, fino a completare la figura.
I poligoni regolari utilizzati per la costruzione dei solidi platonici sono i triangoli equilateri, i quadrati e i pentagoni regolari, figure geometriche sicuramente conosciute dai pitagorici.
L'esistenza del cubo, dell'ottaedro e del tetraedro non sorprende molto data la particolare semplicità di queste figure.
Diverso è il caso del dodecaedro e dell'icosaedro; la loro scoperta può esser fatta risalire al fatto che nella Magna Grecia si rinvenivano con facilità cristalli di pirite della forma di dodecaedro.

Fig. 1.1: Cristalli di pirite

1.2 Platone

Platone, anche se conosceva molto bene la matematica del suo tempo, non fu un vero ricercatore.
Per lui la matematica ha significato solo in quanto scienza pura, sciolta da ogni utilizzo della pratica, essa è ridotta a pura struttura logica e puri concetti.
Riprendendo le tesi sostenute da Empedocle, il mondo reale trae origine dai quattro elementi fondamentali fuoco, terra, aria, acqua, ai quali Platone associa quattro dei cinque poliedri regolari: al fuoco associa il tetraedro, alla terra il cubo, all'aria l'ottaedro e all'acqua l'icosaedro, mentre il dodecaedro veniva associato da Platone all'immagine del cosmo intero, realizzando la cosiddetta quintessenza.
Quello che Platone vuole fare è spiegare le caratteristiche e il comportamento dei quattro elementi attraverso la configurazione spaziale dei quattro poliedri regolari.
Egli non fa altro che interpretare i fenomeni naturali attraverso la geometria.
Nel *Timeo* oltre ad associare ad ogni elemento fondamentale un poliedro regolare, Platone in alcuni passi del libro mostra la costruzione dei cinque solidi regolari.
Qui di seguito riportiamo i passi del *Timeo* che rigurdano la costruzione di queste particolari figure geometriche:

"*E prima di tutto che fuoco e terra e acqua e aria siano corpi è chiaro ad ognuno.*
Ma ogni specie di corpo ha anche profondità; e la profondità è assolutamente necessario che contenga in sé la natura del piano, e una base di superficie piana si compone di triangoli.
Tutti i triangoli derivano poi da due triangoli, ciascuno dei quali ha un angolo retto e due acuti:
e l'uno (A) di questi triangoli ha da ogni parte una porzione uguale di angolo retto diviso da lati uguali, e l'altro (B) due parti diseguali di angolo retto diviso da lati diseguali." (vedi Fig. 1.2)

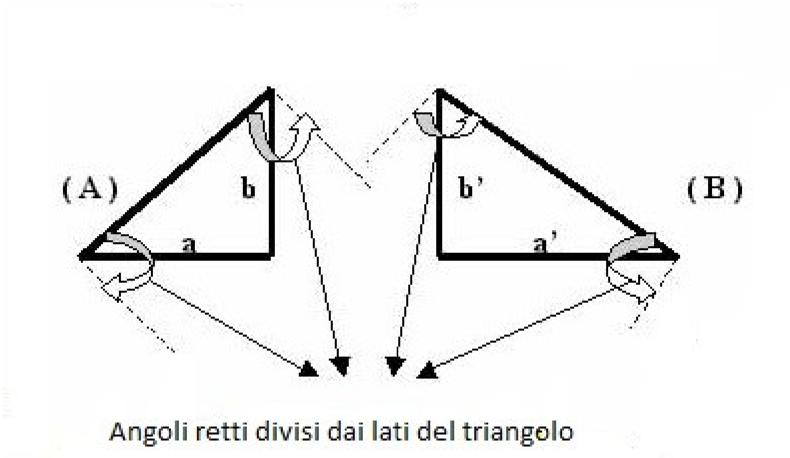


Fig. 1.2

Le porzioni di angolo retto comprese nel triangolo (A) risultano uguali perché i lati a e b sono uguali, dunque (A) è isoscele.
Quelle comprese nel triangolo (B) saranno disuguali perché $a' \neq b'$, dunque (B) è scaleno.
E' chiaro che, mentre dei trinagoli di tipo (A) c'è una sola forma, le forme di (B) sono infinite.

"*Pertanto, di queste forme infinite, dobbiamo scegliere la più bella ...Noi dunque, dei molti triangoli ne poniamo uno come il più bello, quello che ripetuto forma un terzo triangolo che è equilatero*" (è il triangolo rettangolo scaleno con il cateto minore uguale alla metà dell'ipotenusa).

"*Dunque i due triangoli scelti, dei quali sono stati fatti i corpi del fuoco e degli altri elementi siano l'isoscele e quello che ha sempre il quadrato del lato maggiore triplo del quadrato del minore*" (infatti il triangolo che ripetuto dà quello equilatero si comporta in questo modo).

"*Dai triangoli scelti nascono le quattro specie di figure, ma tre da quel solo che ha i lati diseguali e la quarta è formata, essa sola, dal triangolo isoscele... le quattro specie non possono dunque dissolversi le une nelle altre, ma quelle tre si... e questo basti della reciproca trasformazione della specie.*"

In altre parole l'origine geometrica delle specie impedisce alle quattro nature di dissolversi tutte une nelle altre: solo per tre di esse è possibile; la quarta, quella originata dal triangolo isoscele esclusa.

Mostriamo ora come sono definiti i poliedri nelle loro specie:

"*La prima, la più semplice costituita, ha come elemento di essa il triangolo con l'ipotenusa doppia del lato minore; se quattro triangoli equilateri si compongono insieme, formano per ogni tre angoli piani un angolo solido che viene subito dopo il più ottuso degli angoli piani. E di quattro angoli siffatti si compone la prima specie solida che può dividere l'intera sfera in tre parti uguali e simili.*"

Questa prima specie solida è il tetraedro, piramide regolare che ha quattro triangoli equilateri come facce ed è assunto come forma del fuoco.

"*La seconda figura poi si forma degli stessi triangoli, riuniti insieme in otto triangoli equilateri, in modo da fare un angolo solido di quattro angoli piani: e ottenuti sei angoli siffatti, il secondo corpo ha così il componimento.*"

Questa seconda figura, l'ottaedro, è dotata di sei angoli solidi e otto facce triangolari ed è la forma dell'aria.

"*La terza specie è poi formata di cento venti triangoli congiunti insieme e di dodici angoli solidi, compresi ciascuno da cinque triangoli equilateri piani, ed ha venti triangoli equilateri per base.*"

Questa terza figura, quella dell'acqua, è l'icosaedro regolare e poiché ciascuna faccia è un triangolo equilatero composto di sei triangoli rettangoli scaleni, l'icosaedro risulta così composto da 120 elementi, e similmente l'ottaedro da 48 e il tetraedro da 24.
"*E l'uno dei due elementi, dopo aver generato queste figure, aveva cessato l'opera sua*" ossia il triangolo rettangolo scaleno che ha permesso di costruire le tre figure descritte spiega perché fuoco, aria e acqua possono generarsi l'una dall'altra, mentre non potrà essere così per il quarto elemento, la terra, al quale verrà attribuita come base il triangolo rettangolo isoscele.

"*Ma il triangolo isoscele generò la natura della quarta specie* (questa quarta figura, forma della terra, è il cubo) *componendosi insieme quattro triangoli isosceli con gli angoli retti congiunti nel centro, in modo da formare un tetragono equilatero* (un quadrato): *sei di questi tetragoni equilateri connessi insieme* *compoiono otto angoli solidi, ciascuno dei quali deriva dalla combinazione di tre angoli piani retti. E la figura del corpo risultante diviene cubica, con una base di sei tetragoni equilateri piani.*"

"*Restava una quinta combinazione e il Demiurgo se ne giovò per decorare l'universo.*"

Di questa figura, il dodecaedro, che ha per facce 12 pentagoni regolari, nulla di più si legge nel *Timeo*.
La descrizione dei solidi data da Platone esercitò una grande influenza sul pensiero e sull'attività scientifica e filosofica delle generazioni successive, aprendo la strada ad un susseguirsi di studi finalizzati all'individuazione delle proprietà geometriche dei cinque solidi regolari.

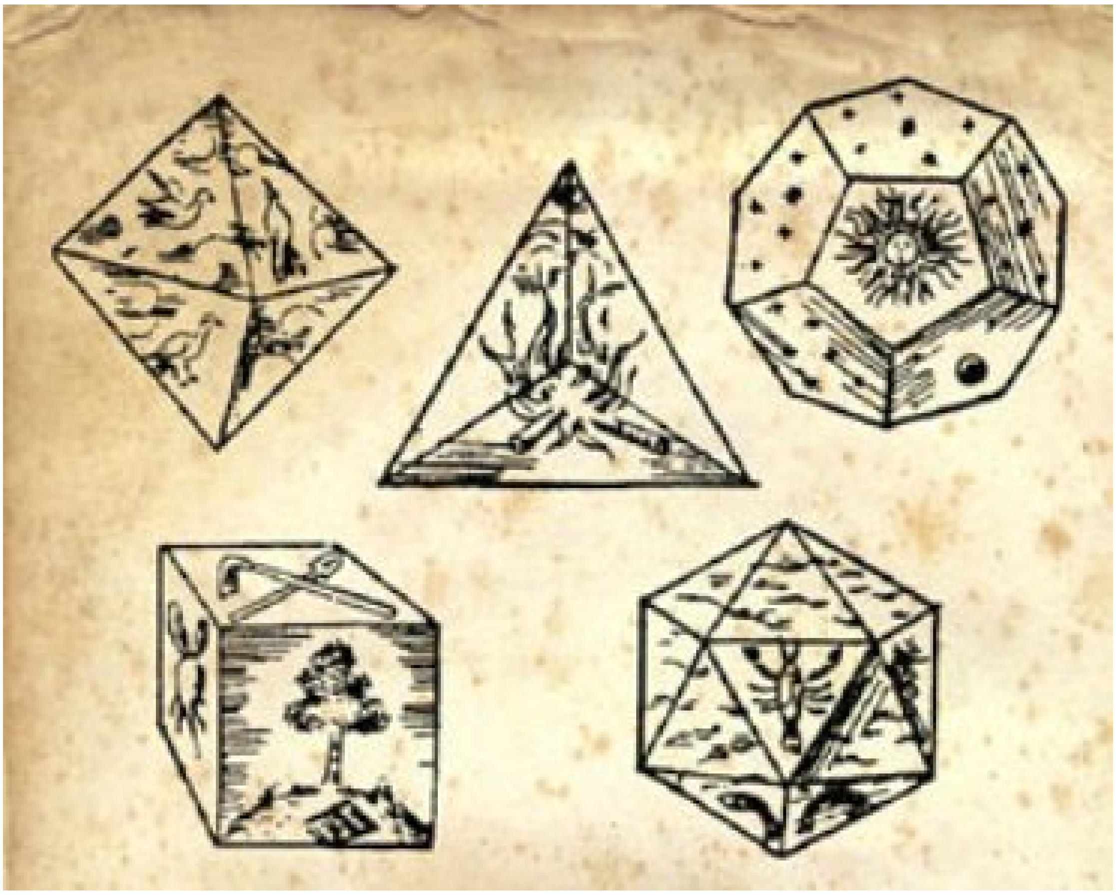


Fig. 1.3: I cinque solidi regolari

1.3 Euclide

Gli *Elementi* di Euclide ci permettono per la prima volta di trattare i cinque solidi platonici da un punto di vista esclusivamente geometrico.
Gli *Elementi* di Euclide sono strutturati in tredici libri: i primi quattro trattano la geometria elementare del piano, il V e il VI parlano della teoria generale delle proporzioni e delle sue applicazioni in geometria piana, il VII, l'VIII e il IX studiano i numeri interi positivi, il X gli irrazionali, gli ultimi tre trattano di geometria dello spazio.
Nel libro XIII troviamo i poliedri regolari, in cui Euclide si propone di inscrivere ciascuno di essi in una sfera di dato diametro e di determinare il rapporto tra lo spigolo del poliedro inscritto e il diametro della sfera circoscritta.
In tal modo le misure tra gli spigoli dei cinque poliedri regolari possono essere espresse mediante uno stesso parametro e quindi sono tra loro confrontabili.
Euclide dopo aver costruito i cinque poliedri regolari conclude gli *Elementi* dimostrando che non vi possono essere altre configurazioni poliedriche regolari al di fuori delle cinque già note.
Questa dimostrazione sfrutta una proprietà, esposta nel libro XI, riguardante gli angoli convessi:

"*Se un angolo solido è compreso da tre angoli piani la somma di due qualunque di essi, presi in qualunque modo, è maggiore dell'angolo rimanente*"
(Elementi, libro XI, prop. 20)

Dimostrazione:
Consideriamo l'angolo solido formato da tre piani α, β e γ, cioè l'angolo triedro nella figura 1.4

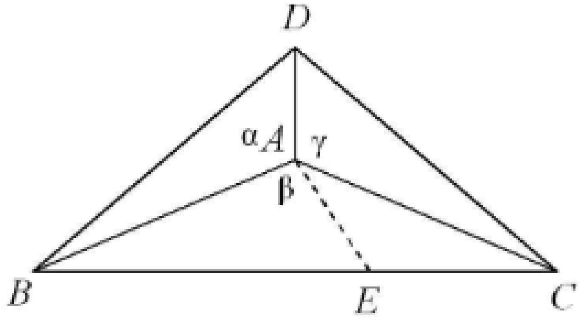


Fig. 1.4: angolo triedro

Euclide osserva che se i tre angoli piani del triedro sono tutti uguali tra loro, la dimostrazione è banale (così come è anche banale nel caso in cui due angoli sono uguali, mentre il terzo no).
Considerando il caso generale in cui i tre angoli piani sono diversi tra loro e poniamo l'angolo appartenente al piano β maggiore degli altri due.
Tracciamo una semiretta uscente da A e giacente sul piano β in modo tale che gli angoli $B\hat{A}E$ e $B\hat{A}D$ siano uguali tra loro.
Fissiamo i punti E e D in modo che risulti $AD = AE$.
Determiniamo i punti B e C conducendo una retta qualunque per E e tracciamo i segmenti BD e CD.
Per costruzione, i triangoli BAD e BAE sono congruenti e quindi $BE = BD$.
Poiché "*in ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente*" (Libro I, prop. 20), con riferimento al triangolo BCD possiamo scrivere la seguente relazione:

$$BD + DC > BC = BE + EC = BD + EC$$

da cui segue:

$$DC > EC$$

Consideriamo ora la coppia di triangoli ADC e ACE: essi hanno due lati congruenti, $AD = AE$, il lato AC in comune, mentre $DC > EC$ e dunque anche $D\hat{A}C > E\hat{A}C$.
Tenendo presente che per costruzione $B\hat{A}D = B\hat{A}E$ abbiamo:

$$D\hat{A}C + B\hat{A}D > E\hat{A}C + B\hat{A}D = E\hat{A}C + B\hat{A}E = B\hat{A}C$$

In modo analogo si procede per dimostrare che per le altre coppie di angoli del triedro la loro somma è maggiore dell'angolo restante.

■

Dimostriamo ora che:

''*Ogni angolo solido è compreso da angoli piani la cui somma è minore di quattro angoli retti*"
(Elementi, libro XI, prop. 20)

Dimostrazione:
La dimostrazione di Euclide si limita solo al caso degli angoli solidi triedri.

La figura a cui dobbiamo far riferimento è analoga a quella della proposizione precedente (Fig. 1.4) dove, però, i punti B, C e D sono ora presi in modo qualsiasi sulle semirette uscenti dal vertice A.
Tracciamo le congiungenti BC, CD e BD e utilizziamo la proposizione precedente riferendola ai tre angoli triedri di vertice rispettivamente B, C e D.
Otteniamo le seguenti disuguaglianze tra angoli:

$$A\hat{B}C + A\hat{B}D > C\hat{B}A$$

$$A\hat{C}B + A\hat{C}D > B\hat{C}D$$

$$A\hat{D}B + A\hat{D}C > B\hat{D}C$$

che, sommate membro a membro, conducono alla seguente disuguaglianza:

$$A\hat{B}C + A\hat{B}D + A\hat{C}B + A\hat{C}D + A\hat{D}B + A\hat{D}C > C\hat{B}A + B\hat{C}D + B\hat{D}C$$

Il secondo membro della disuguaglianza rappresenta la somma degli angoli interni del triangolo BCD e quindi la quantità al primo membro risulta maggiore di due angoli retti.
Se ai nove angoli interni appartenenti ai tre triangoli ABD, ADC e ABD, la cui somma vale in tutto sei angoli retti, sottraiamo i sei angoli al primo membro della disuguaglianza, la cui somma è maggiore di due angoli retti, restando i tre angoli $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, e $C\hat{A}D$, la cui somma risulta minore di quattro angoli retti, cioè:

$$B\hat{A}C + B\hat{A}D + C\hat{A}D < 4 \textit{ angoli retti}$$

■

La somma degli angoli piani che concorrono a formare un angolo solido triedro è minore di quattro angoli retti.
Come conseguenza delle due proposizioni precedenti, Euclide arriva ad enunciare la seguente proposizione:

"*Dico adesso che, oltre alle cinque figure suddette, non può costruirsi nessun'altra figura che sia compresa da poligoni equilateri ed equiangoli, fra loro uguali*"
(Elementi, libro XIII, prop. 18)

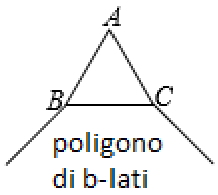
1.4 Archimede

Dopo Euclide, Alessandria continua ad affermarsi come l'indiscusso punto di riferimento di tutta l'attività culturale nel mondo greco.
Al Museo di Alessandria deve la sua formazione un altro illustre matematico: Archimede.
Anche Archimede si occupa di poliedri, ma non di quelli estremamente regolari: egli ricerca quelle forme poliedriche che presentino delle caratteristiche di regolarità, ma non tutte quelle che si riscontrano nei cinque solidi platonici.
Egli richiede la regolarità delle facce, cioè le facce del poliedro devono essere ancora poligoni regolari, ma non pretende che siano tutte dello stesso tipo, inoltre i vertici devono essere tra loro congruenti: ciò significa che le facce devono essere disposte nello stesso ordine intorno ad ogni vertice.
I poliedri che presentano queste caratteristiche sono detti semi-regolari o archimedei.
Tramite l'utilizzo degli angoli è possibile dimostrare il seguente:

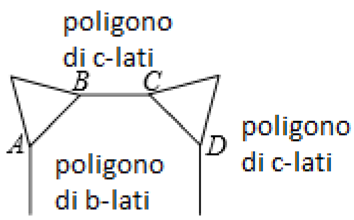
Teorema 1.4.1 I solidi archimedei sono al più tredici.

Dimostrazione:
Un solido archimedeo è un poliedro in cui tutte le facce sono poligoni regolari e la disposizione dei poligoni intorno ad ogni vertice è la stessa.
Così possiamo descrivere ogni solido archimedeo grazie alla sequenza delle figure che si incontrano in un vertice, indicata con $(V_1, ..., V_n)$, la quale elenca in ordine il numero dei lati dei poligoni intorno ad ogni vertice.
Consideriamo, ora, un solido con la sequenza $(V_1, ..., V_n)$, poiché devono esserci almeno 3 poligoni che si incontrano in ogni vertice, abbiamo che $n \geq 3$.
Inoltre, ogni poligono deve avere 3 o più lati, quindi abbiamo che $V_1, ..., V_n \geq 3$.
Almeno uno dei V_i deve essere minore di 6, poiché se indichiamo con α la somma degli angoli che si incontrano in un vertice si verifica che $\alpha \geq 3 \times 120° = 360°$, che è impossibile.
Se $n \geq 6$ allora si verifica che $\alpha \geq 6 \times 60° = 360°$, che è impossibile, perciò deve essere $n < 6$.
Adesso possiamo iniziare la dimostrazione che verrà divisa in tre parti: una per $n = 3$, una per $n = 4$ e una per $n = 5$ rispettivamente.
Parte 1: $n = 3$
Sia la sequenza dei vertici *(a,b,c)* dove $a \leq b \leq c$ e consideriamo i casi $a = 3$, $a = 4$ e $a = 5$ separatamente.

Caso 1: $a = 3$
Per prima cosa dimostriamo che $b = c$. Consideriamo una tipica faccia triangolare ABC.

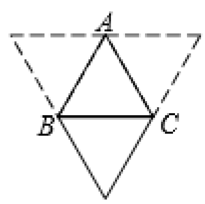


Senza perdita di generalità, sia BC adiacente ad un policono avente b lati, allora entrambi i lati AB e AC devono essere adiacienti a un poligono avente c lati.
Quindi devono esserci due poligoni di c lati attorno al vertice A e questo implica che $b = c$.
Se $b = 3$ otteniamo il tetraedro (3,3,3), se $b \geq 4$, possiamo dimostrare che b deve essere pari.
Consideriamo una tipica faccia avente b lati $ABCD$.

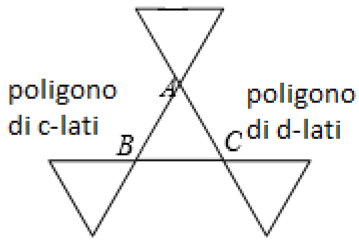


Delle altre due facce al vertice B, una deve essere un triangolo, e l'altra un poligono di c lati.
Senza perdita di generalità, sia AB adiacente ad un triangolo e sia BC adiacente ad un poligono di c lati.
Così i poligoni sui lati di $ABCD$ devono essere alternativamente triangoli e poligoni di c lati, quindi $ABCD$ ha un numero pari di vicini, dimostrando che b è pari.
Se $b \geq 12$, allora si ha che $\alpha \geq 60° + 150° + 150° = 360°$, il che è impossibile.
Quindi gli unici valori possibili di b sono 4, 6, 8 e 10 che ci danno il (3,4,4) che non ci da un solido archimedeo, il tetraedro troncato (3,6,6), il cubo troncato (3,8,8) e il dodecaedro troncato (3,10,10).
Caso 2: $a = 4$
Se $b = 4$ da origine al cubo e all'infinita classe di prismi, (4,4,n), con $n \geq 4$.

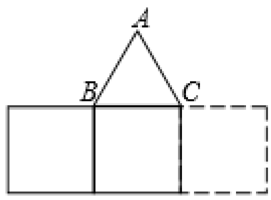
Se $b > 4$, per la stessa ragione di prima, noi possiamo dimostrare che b e c devono essere entrambi pari.
Se $b \geq 8$ abbiamo che $\alpha \geq 90° + 135° + 135° = 360°$ che è nuovamente impossibile, quindi l'unico valore possibile di b è 6.
Se $c \geq 12$ abbiamo che $\alpha \geq 90° + 120° + 150° = 360°$ il che è nuovamente impossibile, quindi gli unici valori di c sono 6, 8, 10 e questi ci danno l'ottaedro troncato (4,6,6), il cubottaedro troncato (4,6,8) e l'icosidodecaedro troncato (4,6,10).
Caso 3: $a = 5$
Per una ragione simile a quella del Caso 1, possiamo dimostrare che $b = c$.
Se $b \geq 7$ abbiamo che $\alpha \geq 108° + 128°\frac{4}{7} + 128°\frac{4}{7} > 360°$ il che è impossibile.
Quindi gli unici valori possibili di b sono 5 e 6 i quali ci danno il dodecaedro (5,5,5) e l'icosaedro troncato (5,6,6).
Parte 2: $n = 4$
Sia la sequenza del vertice una permutazione di (a, b, c, d) dove $a \leq b \leq c \leq d$ e $3 \leq a \leq 5$.
Se $a \geq 4$ abbiamo che $\alpha \geq 4 \times 90° = 360°$ che è impossibile, quindi $a = 3$.
Se $b \geq 5$ abbiamo che $\alpha \geq 60° + 3 \times 108° > 360°$ che è di nuovo impossibile, quindi $b = 3$ o 4.
Consideriamo i due casi separatamente:
Caso 1: $b = 3$
Se $c \geq 6$ allora abbiamo che $\alpha \geq 60° + 60° + 2 \times 120° = 360°$ che è impossibile, quindi i valori possibili di c sono 3, 4 o 5.
Per $c = 3$ abbiamo l'ottaedro (3,3,3,3) e l'infinita classe di antiprismi (3,3,3,n) con $n > 3$.
Per $c = 4$ o 5 la sequenza del vertice è una permutazione di (3,3,c,d) dove $c \leq d$.
Per prima cosa dimostriamo che due triangoli non possono essere vicini ad ogni altro intorno ad un vertice.
Assumendo il contrario, noi supponiamo che la sequenza del vertice sia (3,3,c,d) e consideriamo una tipica faccia triangolare ABC.



Per la nostra assunzione un lato del triangolo ABC è adiacente ad un altro triangolo.
Senza perdita di generalità, sia BC il lato che è adiacente ad un altro triangolo.
Il vertice A deve anche avere due triangoli adiacenti, ad una delle posizioni mostrate dalle linee tratteggiate.
Questo porta o a un vertice B o C essendo adiacente a tre triangoli il che è una contraddizione.
La sequenza deve essere allora (3,c,3,d) dove $c = 4$ o 5 e $c \leq d$.
Dimostriamo ora che $c = d$.
Consideriamo una faccia triangolare ABC:



Senza perdità di generalità sia AB adiacente ad un poligono avente c lati e AC sia adiacente ad un poligono avente d lati, allora il poligono adiacente al lato BC deve essere sia di c lati sia di d lati quindi abbiamo che $c = d$.
Questo ci da il cubottaedro (3,4,3,4) e l'icosidodecaedro (3,5,3,5).
Caso 2: $b = 4$
Se $c \geq 5$ allora $\alpha \geq 60° + 90° + 2 \times 108° > 360°$ che è impossibile, quindi $c = 4$.
Se $d \geq 6$ allora $\alpha \geq 60° + 90° + 90° + 120° = 360°$ che è impossibile, quindi gli unici valori possibili di d sono 4 e 5.
Noi dovremmo dimostrare ora che la sequenza (3,4,4,5) non forma un solido archimedeo.
Consideriamo una tipica faccia triangolare ABC:



Senza perdita di generalità, sia BC il lato che è adiacente ad un quadrato. Al vertice B questo quadrato deve essere adiacente ad un altro quadrato e

quindi il lato AB deve essere adiacente ad un pentagono.
Similarmente al vertice C, questo quadrato deve anche essere adiacente ad un altro quadrato, e quindi AC è adiacente ad un pentagono,allora noi abbiamo due pentagoni intorno al vertice A il che è impossibile, quindi (3,4,4,5) non forma un solido archimedeo.
Questo porta al rombicubottaedro (3,4,4,4) e al rombicosidodecaedro (3,4,5,4).
Parte 3: $n = 5$
Sia la sequenza del vertice qualche permutazione di (a, b, c, d, e) dove $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ e $3 \leq a \leq 5$.
Se $d \geq 4$ allora $\alpha \geq 60° + 60° + 60° + 2 \times 90° = 360°$ che è impossibile, quindi $a = b = c = d = 3$. Se $e \geq 6$ allora $\alpha \geq 60° + 60° + 60° + 60° + 120° = 360°$ che è impossibile, quindi gli unici valori possibili di e sono 3, 4 e 5.
Questi ci danno l'icosaedro (3,3,3,3,3), il cubo camuso (3,3,3,3,4) e il dodecaedro camuso (3,3,3,3,5).

■

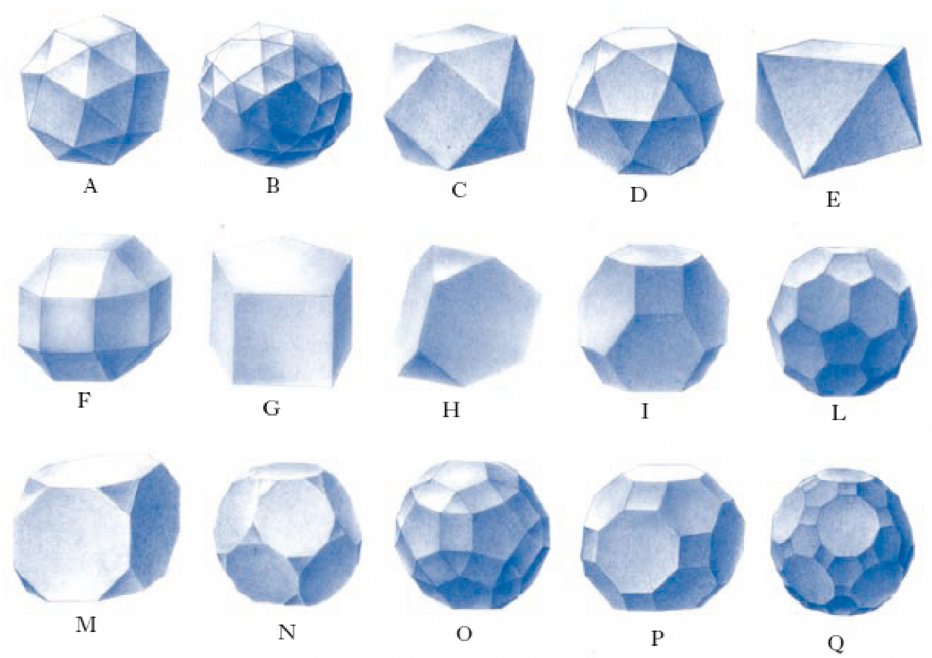


Fig 1.5: Poliedri archimedei

1.5 Pappo e Diofanto

A partire dal II secolo a.C. inizia la decadenza della ricerca scientifica mentre aumenta sempre più l'interesse per le scienze occulte come la magia, l'astrologia e l'alchimia.

Verso il III secolo d.C. abbiamo una riscoperta e una rinascita della matematica con gli studi di Pappo e di Diofanto.
Pappo affronta il problema dei poliedri inscritti in una sfera in modo nuovo, attraverso la ricerca delle sezioni circolari della sfera contenenti i vertici dei poliedri, fornendo dimostrazioni alternative e generalizzazioni ai teoremi fino ad allora dimostrati.
Diofanto e Pappo segnano una breve ripresa della matematica, ma con essi si conclude la fase creativa della matematica ellenistica.
La civiltà alessandrina si conclude definitivamente intorno al 600 d.C. quando gli arabi conquistano l'Egitto.
L'algebra avanza e cresce grazie all'influenza del mondo arabo, mentre la fase creativa della geometria si arresta e si dovrà aspettare il Rinascimento per avere una ripresa attraverso l'elaborazione delle idee e dei risultati degli antichi, ma con un atteggiamento nuovo e liberato dai vincoli del pensiero greco.

1.6 Il Rinascimento

Dopo un periodo in cui lo studio della geometria non ha manifestato un grandissimo interesse, si osserva nel Rinascimento una ripresa degli studi della geometria dovuta soprattutto agli artisti, che considerano questa disciplina indispensabile nella realizzazione di un'opera d'arte.
L'arte rinascimentale, infatti, si avvicina al metodo scientifico, al contrario di quella medievale, e gli "artisti" non sono più semplici osservatori della natura ma matematici e scienziati, basti ricordare Leonardo da Vinci.
Sono i pittori fiorentini che all'inizio del Quattrocento riscoprono la prospettiva come modo di rappresentare sul quadro gli oggetti reali secondo i principi scientifici dell'ottica geometrica.
Piero della Francesca è considerato colui che ha dato una coerente base teorica alla prospettiva centrale.
Secondo Piero è la matematica che può fornirci gli strumenti per capire e rappresentare nei dipinti la realtà, attraverso le armonie geometriche e proporzioni.
Nel suo trattato "*De quinque corporibus regularibus*", sostiene che il mondo è pieno di corpi complessi o senza una particolare forma, ma ognuno di essi può essere ridotto ai cinque poliedri regolari che rappresentano la forma eterna, l'eterna perfezione.
Vengono quindi riconsiderati i cinque poliedri regolari a distanza di secoli come

modello di perfezione geometrica.
Il suo trattato riprende la costruzione euclidea dei poliedri inscritti nella sfera: assegnando un determinato valore al diametro egli calcola il corrispondente valore dello spigolo, della superficie e del volume del poliedro inscritto e viceversa; inoltre affronta anche un altro tipo di problema, quello riguardante l'inscrizione di un poliedro in un altro poliedro.
Del "*De quinque corporibus regularibus*" esiste una versione in volgare "*De divina proportione*" di Luca Pacioli, allievo di Piero della Francesca.
Luca Pacioli ha costruito dei modellini di legno dei poliedri e le tavole di Leonardo costituiscono quindi l'equivalente grafico delle sculture lignee di Pacioli.
Stiamo assistendo ad un processo di visualizzazione della geometria euclidea che conduce le forme astratte dei solidi platonici ad incarnarsi in concrete forme materiali, scolpite in legno o disegnate in prospettiva.

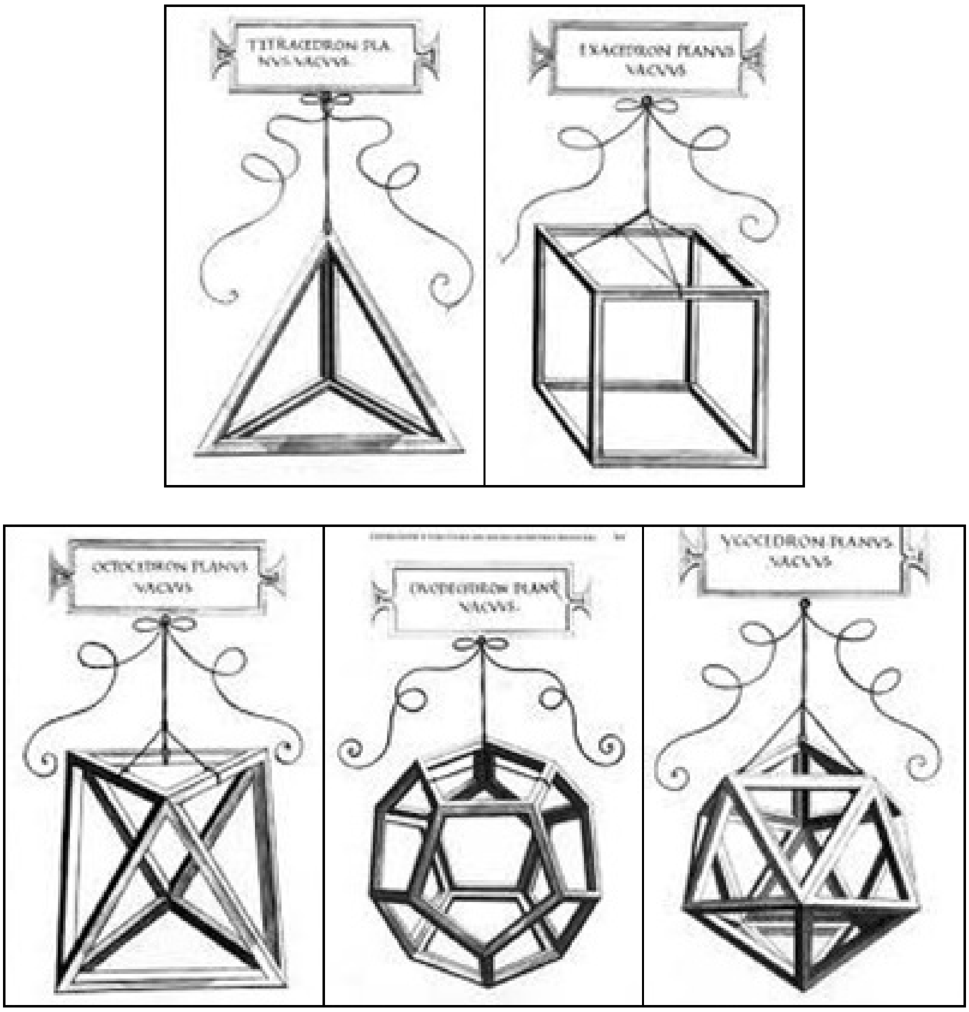


Fig. 1.6: Le tavole di Leonardo

1.7 Keplero

Nel Rinascimento lo scopo della scienza e dell'arte è quello di studiare il mondo della natura e la sua rappresentazione in termini razionali.
Per gli scienziati del quattrocento e per quelli fino al seicento, Dio ha creato l'universo secondo un disegno matematico, occuparsi di scienza quindi permette di avvicinarsi al progetto divino, a Dio.
Di questa mentalità fa parte Keplero il quale era convinto che l'universo è ordinato secondo un piano matematico.
Nella sua opera "*Mysterium Cosmographicum*" ritroviamo i solidi regolari, ancora una volta utilizzati per spiegare i fenomeni naturali.
Nell'opera afferma che Dio nel creare tenne presenti i cinque corpi regolari della geometria, già conosciuti ai tempi dei pitagorici e di Platone, e che ha fissato in accordo con le loro dimensioni il numero dei cieli, le loro proporzioni, le relazioni dei loro movimenti.
Keplero vuole spiegare le orbite dei pianeti del sistema solare usando le cinque figure platoniche.
A quell'epoca si conoscevano solo sei pianeti: Mercurio, Venere, Terra, Marte Giove e Saturno.
Keplero nel realizzare il suo modello di sistema solare, mette in relazione il raggio dell'orbita intorno al sole di ciascun pianeta con lo spigolo di uno dei cinque poliedri regolari.
Egli traccia una sfera di centro il Sole e il cui raggio coincida con quello dell'orbita di Saturno, nella quale vi inscrive un cubo e in questo un'altra sfera il cui raggio, secondo Keplero, viene a coincidere esattamente con il raggio dell'orbita di Giove.
Nella sfera di Giove vi inscrive un tetraedro che a sua volta circoscrive una sfera il cui raggio è quello dell'orbita di Marte.
Nella sfera di Marte inscrive il dodecaedro che è circoscritto alla sfera della Terra, quindi inscrive nella sfera della terra l'icosaedro che determina la sfera di Venere.
Infine nella sfera di Venere inscrive l'ottaedro che è circoscritto alla sfera di Mercurio.
In questo modello abbiamo la successione pianeta-poliedro: Saturno, cubo, Giove, tetraedro, Marte, dodecaedro, Terra, icosaedro, Venere, ottaedro, Mercurio.
Keplero, però, si rese conto che il suo modello planetario non era corretto perché non rispondeva ai risultati dell'osservazione e così abbandonò la sua ipotesi.

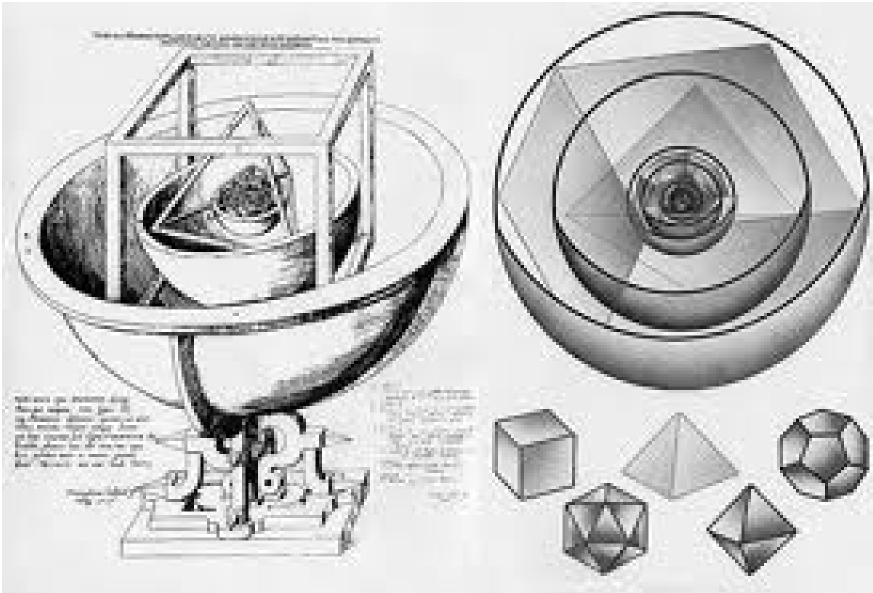


Fig. 1.7: Modello planetario di Keplero

1.8 Cartesio ed Eulero

Verso la metà del secolo scorso è stata ritrovata una copia del trattato "*De solidorum elementis*" di Cartesio in cui si formulano diverse considerazioni che permettono di esprimere una relazione tra vertici, spigoli e facce, ma egli non si accorse dell'importante risultato che avrebbe potuto raggiungere mettendo in relazione alcuni asserti che aveva dimostrato.
Solo un secolo dopo, Eulero, seguendo un'altra via scopre e dimostra la relazione che prende il nome di:

Teorema 1.8.1 (Formula di Eulero) Sia P un poliedro. Se indichiamo con V il numero dei vertici di P, con S il numero degli spigoli e con F il numero delle facce allora vale la relazione:

$$V + F - S = 2$$

Dimostrazione
Supponiamo che P sia ottenuto attraverso la seguente costruzione: si parte da una sua faccia e si procede aggiungendone una alla volta in ogni fase in modo che ogni nuova faccia che si aggiunge abbia solo lati adiacenti in comune con quelle inserite precedentemente.

Ad ogni passo del procedimento denotiamo con ϕ il numero $V + F - S - 1$.
Per una sola faccia si ha $\phi = 0$ perché $F = 1$ e supponiamo che la singola faccia sia un poligono di l lati, abbiamo che $V = l$, $S = l$ e quindi

$$\phi = V + F - S - 1 = l + 1 - l - 1 = 0$$

Procedendo per induzione sul numero di facce inserite, dimostriamo che finché il poliedro non è stato completato, si ha $\phi = 0$.
Supponiamo che ciò sia vero ad un dato passo della costruzione in cui restano da inserire almeno due facce.
Aggiungiamo una nuova faccia avente p lati, di cui q consecutivi siano in comune con le precedenti; pertanto $q+1$ vertici della nuova faccia appartengono alle precedenti facce.
Abbiamo quindi aggiunto una nuova faccia, $p-q$ nuovi spigoli e $p-q-1$ nuovi vertici.
Denotando con ϕ' la quantità corrispondente di ϕ relativa alla nuova configurazione, si ha per ipotesi induttiva

$$\phi' = \phi + (p - q - 1) - (p - q) + 1 = 0$$

Come asserito.
Osserviamo che quando si aggiunge l'ultima faccia non si modifica né il numero dei vertici né quello degli spigoli, mentre il numero delle facce aumenta di uno quindi per P si ha $\phi = 1$, cioè la tesi.

$\blacksquare$

L'intenzione di Eulero era quella di trovare una classificazione soddisfacente per le figure dello spazio in analogia con quelle del piano, ma costatato che un poliedro non può essere classificato solo in base al numero di facce, ricorre anche a spigoli e vertici.
Nel paragrafo 1.3 abbiamo visto come Euclide prova che i solidi platonici sono cinque basando il suo ragionamento sugli angoloidi.
Grazie alla "Formula di Eurelo" possiamo ora dimostrare in modo diverso da come fece Euclide il seguente:

Teorema 1.8.2 I solidi platonici sono al più cinque.

Dimostrazione
Sia dato un poliedro con F facce, ognuna delle quali è un poligono regolare con p lati, e nel quale ad ogni vertice si incontrano q spigoli, i quali sono in totale S.
Moltiplicando il numero dei lati di ogni faccia per il numero delle facce del poligono si ottiene il doppio della totalità degli spigoli (ogni spigolo viene contato due volte, una sulla prima faccia e una sulla faccia attaccata alla prima tramite quello spigolo):

$$pF = 2S$$

Inoltre, la totalità degli spigoli moltiplicata per due equivale al numero dei vertici V moltiplicati per il numero q di spigoli che si incontrano in essi, perché ogni spigolo collega tra loro due vertici:

$$qV = 2S$$

Quindi si ottiene

$$F = \frac{2S}{p}$$

$$V = \frac{2S}{q}$$

E sostituendo questi valori nella Formula di Eulero

$$V + F - S = 2 = \frac{2S}{q} + \frac{2S}{p} - S = 2$$

E dividendo per $2S$ si arriva a

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{S}$$

Poiché un poligono deve avere almeno tre lati ed almeno tre lati devono incontrarsi nel vertice di ciascuno degli angoloidi di un poliedro, devo avere che $p, q \geq 3$. Inoltre non possono essere entrambi pari a 4 poiché in tal caso il primo membro dell'equazione sarebbe uguale a 0, mentre $\frac{1}{S}$ è positivo. Se p e q fossero poi contemporaneamente maggiori di 4, S dovrebbe essere negativo; questa possibilità è quindi esclusa, ed almeno uno deve essere 3. Se $p = 3$, si ha

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{1}{S} \rightarrow \frac{1}{q} - \frac{1}{6} = \frac{1}{S}$$

Quindi q può essere solo 3, 4 o 5, casi che corrispondono rispettivamente al tetraedro, all'ottaedro e all'icosaedro. Allo stesso modo, se $q = 3$, p può assumere solo i valori 3, 4 o 5. Il 3 può essere scartato perché l'abbiamo considerato nel caso precedente; restano 4 e 5 che corrispondono al cubo e al dodecaedro.

■

Da quel momento in poi l'interesse matematico e scientifico per i solidi platonici non è venuto meno e si è cercato di trovare i poliedri regolari nelle forme della natura mantenendo viva l'idea di Platone.

Capitolo 2

Teoria dei poliedri

Dopo aver introdotto storicamente nel capitolo precedente i solidi platonici ed aver dimostrato che sono in tutto cinque, nel capitolo seguente forniremo una serie di concetti e definizioni allo scopo di definire in modo preciso e dettagliato il concetto di poliedro e del suo corrispettivo in dimensione quattro.

2.1 Premessa

Prima di tutto è importante definire lo spazio su cui andremo a lavorare.
Intanto, precisiamo cosa si intende per spazio di dimensione n.
I punti di una retta (spazio 1-dimensionale) sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali; i punti del piano, (spazio 2-dimensionale) sono in corrispondenza con le coppie di numeri reali; i punti dello spazio ordinario tridimensionale sono in corrispondenza biunivoca con le terne di numeri reali.
Per analogia, ad una quaterna di numeri reali si può associare un punto dello spazio a 4 dimensioni.
Più in generale una n-upla di numeri reali $(x_1, x_2, ..., x_n)$ rappresenta un punto dello spazio di dimensione n.
Prendiamo allora in considerazione lo spazio vettoriale R^n in cui per ogni coppia di vettori $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ è assegnato il seguente prodotto scalare definito positivo:

$$xy = x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

$$x_i, y_i \in R, \; per \; i = 1, ..., n$$

In questo spazio possiamo definire la *norma* e la *distanza Euclidea* come segue:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Uno spazio di questo tipo viene detto *spazio euclideo* n-dimensionale.

2.2 Politopi

Sia R^n il nostro spazio euclideo n-dimensionale.

Definizione 2.2.1 Un insieme $C \subset R^n$ è convesso se per ogni x ed y in C, anche il segmento $[x, y]$ è contenuto in C.

Definizione 2.2.3 Per ogni insieme $S \subset R^n$ l'involucro convesso di S, denotato con $conv(S)$, è l'insieme convesso più piccolo che contiene S.

Ad esempio, l'involucro convesso di due punti distinti è il segmento; l'involucro convesso di tre punti, non tutti allineati, è un triangolo; l'involucro convesso di quattro punti, non tutti complanari, è un tetraedro.
In generale se S è una raccolta di $k+1$ punti, non tutti sullo stesso iperpiano k-dimensionale, allora $conv(S)$ è chiamato $k-simplesso$.

Definizione 2.2.4 Quando un insieme S è finito, chiamiamo $P = conv(S)$ *politopo.* La dimensione di P è la dimensione del sottospazio affine più piccolo $H \subset R^n$ che contiene P. Chiamiamo H *intervallo affine di P.*

Negli esempi precedenti, l'intervallo ha dimensione uno, il triangolo dimensione due ed il tetraedro ha dimensione tre.

Nella definizione 2.2.4 abbiamo chiamato politopo l'involucro convesso di un insieme finito di punti.
A seconda della dimensione in cui ci troviamo i politopi vengono chiamati nel modo seguente:

- *Poligoni* in dimensione 2;
- *Poliedri* in dimensione 3;

- *Politopi* in dimensione n, con $n > 3$

2.3 Poliedri

Sia R^3 il nostro spazio euclideo tridimensionale.

Definizione 2.3.1 L'involucro convesso di un numero finito di punti, non complanari, prende il nome di poliedro. Si può anche definire in modo equivalente come l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi che sia anche limitata.

Definizione 2.3.2 Sia $P \subset R^3$ un poliedro. Se h è un piano di R^3 tale che P sia contenuto in uno dei due semispazi definiti da h, allora abbiamo le seguenti possibilità:

- $h \bigcap P$ è un punto, che si dice *vertice* di P;
- $h \bigcap P$ è un segmento, che si dice *spigolo* di P;
- $h \bigcap P$ è un poligono, che si dice $faccia$ di P.

Definizione 2.3.3 Dati un poligono convesso di un numero $n \geq 3$ qualsiasi di lati e un punto V esterno al suo piano, si chiama *angoloide* di vertice V la figura formata da tutte le semirette di origine V che passano per i diversi punti del dato poligono.

Definizione 2.3.4 Un poliedro si dice *regolare* se le sue facce sono poligoni regolari ed uguali e se tutti gli angoloidi sono uguali.

Possiamo fornire anche la definizione equivalente:

Definizione 2.3.5 Un poliedro si dice *regolare* se tutte le sue facce sono poligoni regolari e in ogni vertice si incontrano lo stesso numero di facce.

Le definizione che andremo a dare adesso saranno molto utili perchè ci permetteranno di estendere a dimensioni superiori il concetto di regolarità:

Definizione 2.3.6 Dato un vertice V di un poliedro, si dice *stella* relativa al vertice V la poligonale i cui lati sono i segmenti che uniscono i secondi estremi degli spigoli aventi V come vertice.

Definizione 2.3.7 Si dice *figura al vertice* V la poligonale i cui lati sono i segmenti che uniscono i punti medi degli spigoli aventi V come vertice.

Detto questo possiamo dare la seguente definizione di regolarità:

Definizione 2.3.8 Un poliedro si dice *regolare* se le sue facce sono regolari e le sue stelle (oppure figure al vertice) sono poligoni regolari.

Dalla definizione 2.3.8 segue che possiamo classificare i poliedri regolari in base al numero di lati di una faccia e al numero di lati che possiede una sua stella. Detto questo possiamo dare la seguente:

Definizione 2.3.9 Per indicare un poliedro regolare possiamo utilizzare i *Simboli di Schläfli*. Un poliedro sarà indicato con $\{p,q\}$, dove p indica il numero dei lati di una faccia e q indica il numero di facce che si incontrano in ogni vertice (oppure il numero di lati di una stella o di una figura al vertice).

Dalla definizione 2.3.9 segue che possiamo indicare i cinque poliedri regolari nel seguente modo:

Tetraedro: {3,3} poiché le sue facce sono triangoli equilateri e le sue stelle sono anch'esse triangoli equilateri;

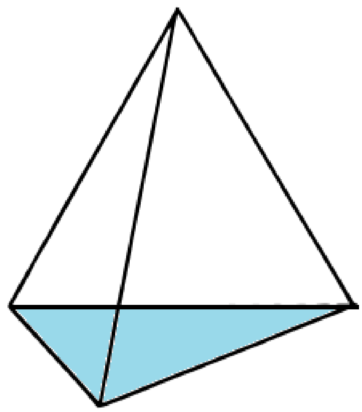


Fig. 2.1: stella di un tetraedro

Ottaedro: {3,4} poiché le sue facce triangoli equilateri e le sue stelle sono quadrati;

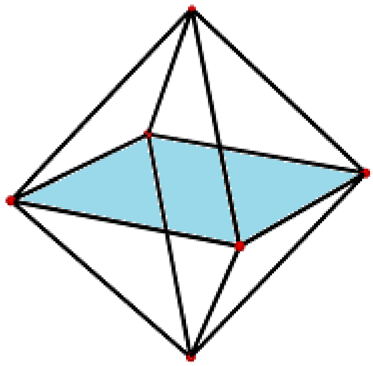


Fig. 2.2: stella di un ottaedro

Cubo: $\{4{,}3\}$ poiché le sue facce sono quadrati e le sue stelle sono triangoli equilateri.

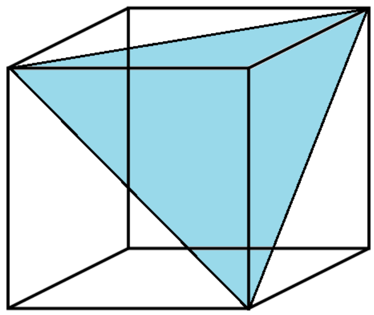


Fig. 2.3: stella di un cubo

Icosaedro: $\{3{,}5\}$ poiché le sue facce sono triangoli e le sue stelle sono pentagoni regolari;

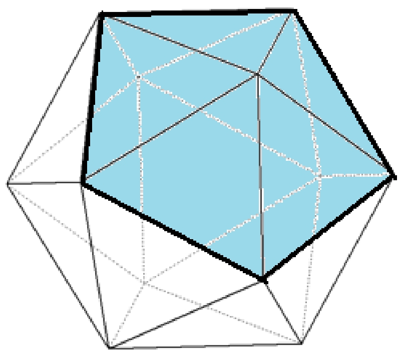


Fig. 2.4: stella di un icosaedro

Dodecaedro: $\{5{,}3\}$ poichè le sue facce sono pentagoni e le sue stelle sono triangoli equilateri.

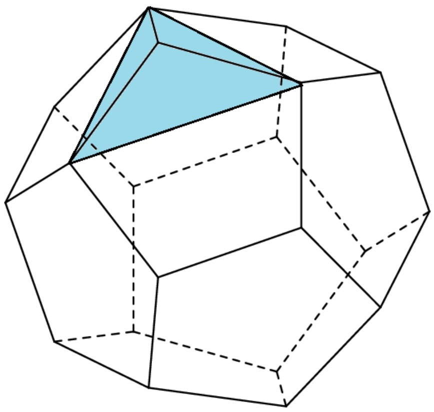


Fig. 2.5: stella di un dodecaedro

2.4 Relazioni tra poliedri regolari

Tra i poliedri regolari esistono delle relazioni particolari che mettono in corrispondenza un poliedro con un altro.
Possiamo dire che si possono trovare due distinti tetraedri dentro un cubo, intendendo con questo che i vertici dei tetraedri sono un sottoinsieme dei vertici del cubo.

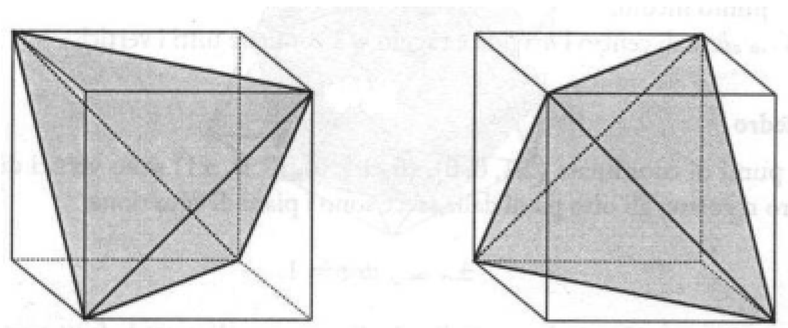


Fig. 2.6: relazione tra tetraedro e cubo

Inoltre possiamo dire che esistono cinque diverti cubi dentro il dodecaedro, e lo spigolo di ognuno di questi cubi risulta essere una diagonale della faccia del dodecaedro.
Quindi su ogni faccia del dodecaedro arrivano cinque spigoli uno per ognuno dei cinque cubi e formano su questa faccia la stella a cinque punte costituita dalle diagonali del pentagono regolare.
Inoltre il ogni vertice del dodecaedro arrivano due cubi.

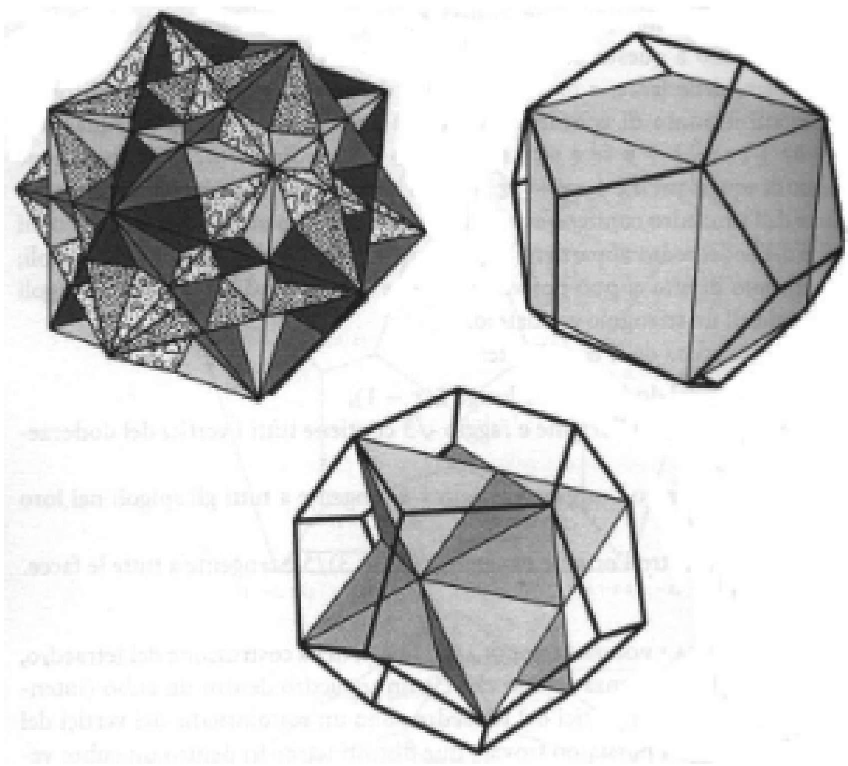


Fig. 2.7: relazione tra dodecaedro e cubo

Quindi ci sono anche dieci tetraedri dentro un dodecaedro.
Inoltre esiste un ottaedro intorno all'icosaedro, nel senso che i piani delle facce dell'ottaedro costituiscono un sottoinsieme dei piani delle facce dell'icosaedro. In realtà ci sono cinque distinti ottaedri intorno all'icosaedro.

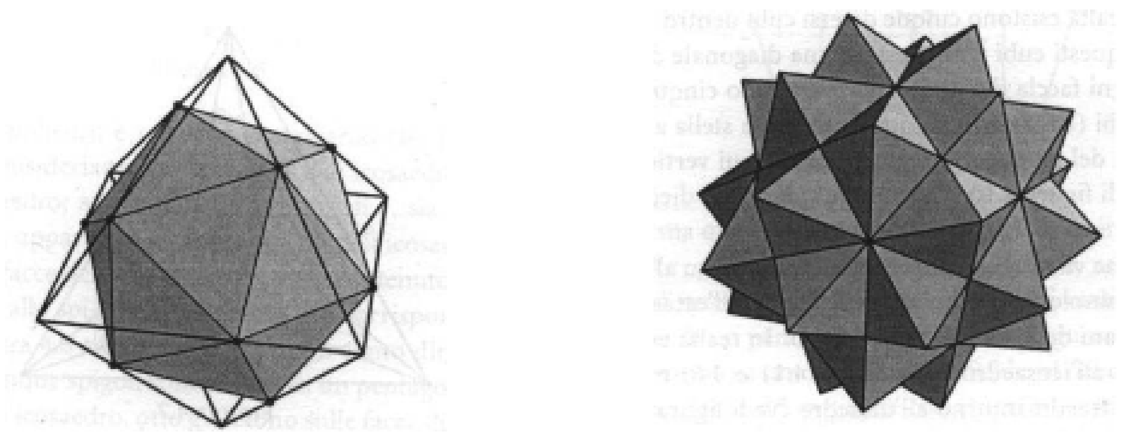


Fig. 2.8: relazione tra ottaedro e icosaedro

Inoltre esistono due distinti tetraedri intorno all'ottaedro e ci saranno quindi anche dieci tetraedri intorno ad un icosaedro.

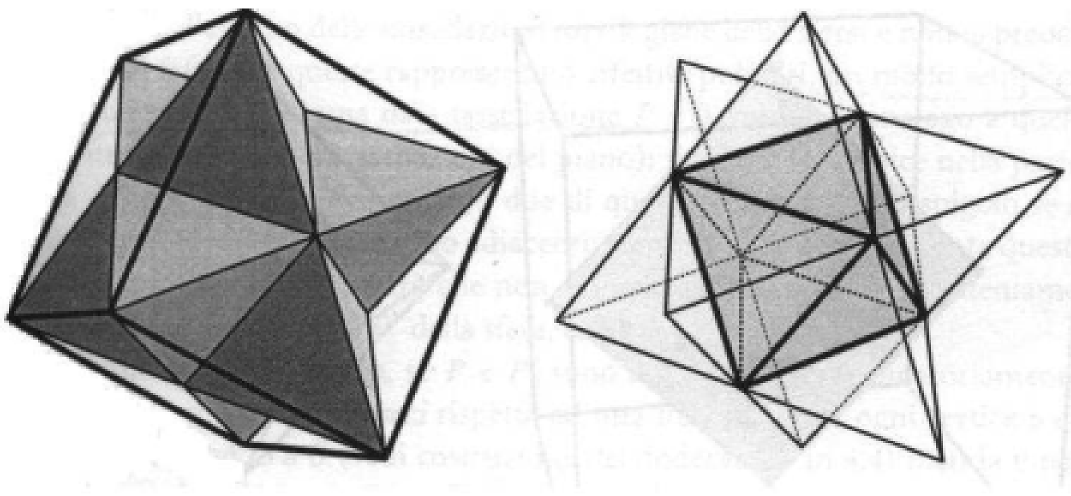


Fig. 2.9: relazione tra tetraedro e ottaedro

Un'altra relazione che emerge tra i poliedri regolari è la Dualità:

- I centri delle facce di un cubo sono vertici di un ottaedro e viceversa i centri delle facce di un ottaedro sono i vertici di un cubo
- I centri delle facce di un icosaedro sono vertici di un dodecaedro e viceversa i centri delle facce di un dodecaedro sono vertici di un icosaedro
- Per quanto riguarda il tetraedro i centri delle sue facce sono vertici di un altro tetraedro

Quindi vale che:

- Il cubo è il duale dell'ottaedro e viceversa;
- Il dodecaedro è il duale dell'icosaedro e viceversa;
- il tetraedro è il duale di se stesso.

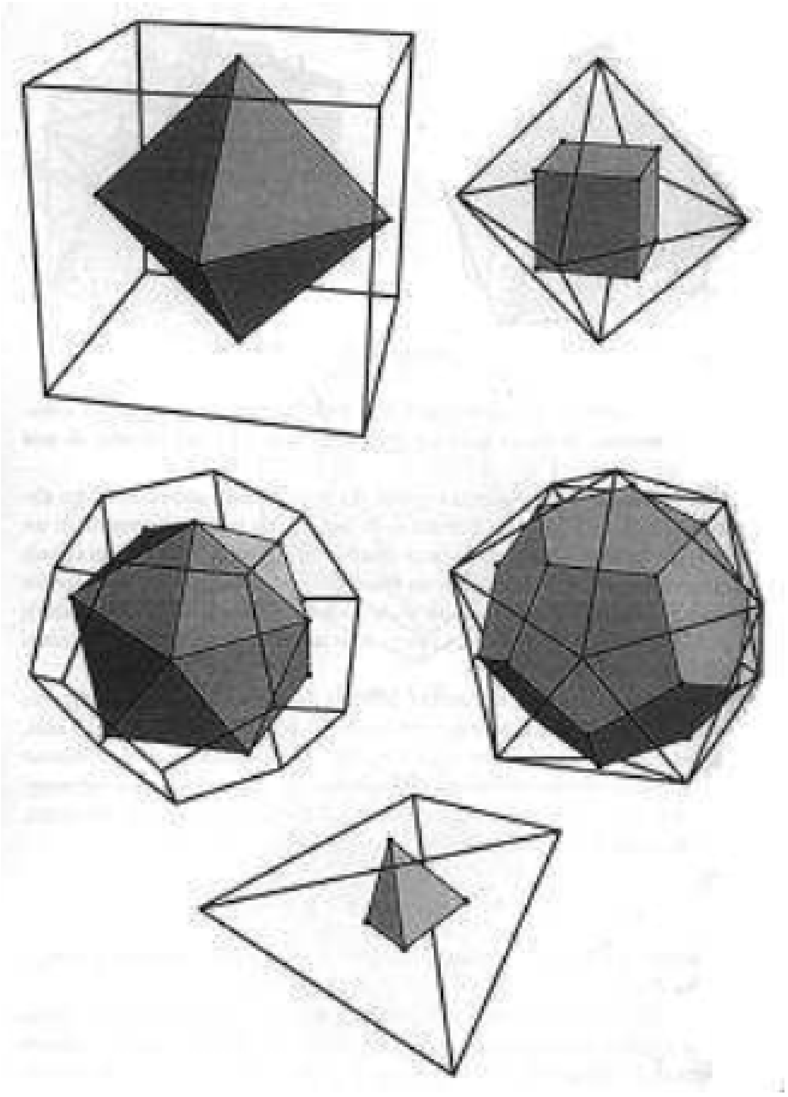


Fig. 2.10: dualità tra i poliedri regolari

In sintesi, possiamo dare la seguente:

Definizione 2.4.1 Sia P un poliedro regolare. Formiamo il poligono duale P' prendendo l'involucro convesso dei centri delle facce di P.

2.5 Politopi regolari 4-dimensionali

Passiamo ora a considerare i politopi in dimensione 4 che sono un'estensione dei poliedri.

Sia R^4 il nostro spazio euclideo quadrimensionale.

Definizione 2.5.1 Un politopo 4-dimensionale è l'involucro convesso di un numero finito di punti.

Un politopo 4-dimensionale possiede C celle di dimensione 3 che sono poliedri, F celle piane dette facce, S celle unidimensionali dette spigoli ed V vertici che sono i punti estremi.
Tali numeri sono legati tra loro dalla relazione di Eulero:

$$V + F = S + C$$

I politopi di cui ci andremo a interessare sono quelli regolari, quindi possiamo dare la seguente:

Definizione 2.5.2 Un politopo 4-dimensionale si dice *regolare* se le sue celle che compongono il contorno sono poliedri regolari e le sue stelle (o figure al vertice) sono poliedri regolari.

Risulta interessante andare a vedere la costruzione di alcuni politopi 4-dimensionali.

Qui di seguito mostriamo le costruzioni di alcuni di loro:

1. Se si parte da un segmento di vertici $[A, B]$ e si considera un punto C esterno alla retta che contiene il segmento, unendo i tre punti A, B, C si ottiene un triangolo;

2. se si uniscono i vertici del triangolo $conv(A, B, C)$ con un punto D esterno al piano su cui giace si ottiene un tetraedro;

3. se si uniscono i vertici del tetraedro $conv(A, B, C, D)$ con un punto E esterno al poliedro nella 4^a dimensione si ottiene un politopo e se si fa in modo che tutti gli spigoli siano uguali si ottiene il *5-celle*, detto anche *4-simplesso*, che si indica con α_4.

Quindi il *5-celle* possiede:

- $V = 5$ ossia i 4 vertici *A,B,C,D* del tetraedro iniziale e il punto aggiunto E;

- $S = 10$ ossia i 6 spigoli del tetraedro iniziale e i 4 ottenuti congiungendo E con i 4 vertici del tetraedro iniziale;

- $F = 10$ ossia le 4 facce del tetraedro iniziale e le 6 facce ottenute considerando i triangoli che hanno un vertice in E e come base uno dei 6 spigoli del tetraedro;

- $C = 5$ ossia il tetraedro iniziale $conv(A, B, C, D)$ e i 4 tetraedri che hanno come vertice E e come base una faccia del tetraedro iniziale.

La stella del *5-celle* è un tetraedro.

Iniziamo un'altra costruzione servendoci ancora di un segmento, ma mentre nel caso precedente dovevamo aggiungere un punto, ora ne aggiungeremo due da parti opposte.

1. Inizialmente abbiamo il segmento $[A, B]$ e consideriamo due punti C, D da parti opposte alla retta contenente il segmento, facendo in modo che il quadrilatero sia un quadrato (con al suo interno il segmento iniziale);

2. poi si uniscono i vertici del quadrato $conv(A, B, C, D)$ con due punti E, F situati da parti opposte al suo piano, facendo in modo che le otto facce siano tutte triangoli equilateri e si ottiene un ottaedro (contenente al suo interno il quadrato iniziale);

3. infine in dimensione 4 si uniscono i vertici dell'ottaedro con due opportuni punti G, H da parti opposte allo spazio che lo contiene, si ottiene un politopo che come contorno ha 16 celle tutte tetraedri regolari, 8 di vertice G ed 8 di vertice H aventi come basi le facce dell'ottaedro, ossia si ottiene un *16-celle*, detto anche *cocubo* 4-dimensionale, che si indica con β_4 e in cui l'ottaedro servito per la costruzione rimane all'interno.

Quindi il *16-celle* possiede:

- S=8;

- C=16;

- F=32 perchè i 16 tetraedri hanno 6 facce e ogni faccia è comune a due tetraedri ad esempio $conv(A, B, C)$ è comune a $conv(A, B, C, G)$ e $conv(A, B, C, H)$ perciò $16 \times 16 : 2$ sono le facce;

- infine per calcolare gli spigoli possiamo usare la formula di Eulero:

$$S = V + F - C = 24.$$

La stella di un *16-celle* è un ottaedro.

Per la generalizzazione del cubo si procede per traslazioni:

1. Traslando un punto A lungo una retta si ottiene un segmento $[A, A']$;
2. traslando un segmento $[A, B]$ lungo una direzione ortogonale si ottiene un quadrato di vertici *A, B , B', A'* che ha come contorno il segmento iniziale $[A, B]$, il segmento finale $[A', B']$ e i due segmenti che collegano *A, A'* e *B, B'*.
3. traslando un quadrato secondo una direzione ortogonale al suo piano otteniamo un cubo che ha come facce, il quadrato iniziale, il quadrato finale e 4 quadrati di raccordo.
4. traslando un cubo secondo una direzione ortogonale allo spazio che lo contiene otteniamo l'*8-celle* o *ipercubo* 4-dimensionale, che si indica con γ_4 e ha sul contorno come poliedri: il cubo iniziale, quello finale e i 6 cubi di raccordo.

Quindi l'*8-celle* possiede:

- V=16;
- C=8;
- S=32 perchè gli spigoli dei cubi iniziali e finali hanno ciascuno 12 spigoli e ogni vertice del cubo iniziale traslando genera uno spigolo in più, ossia gli spigoli sono $12 + 12 + 8$;
- infine per calcolare le facce possiamo usare la formula di Eulero:

$$F = S + C - V = 24.$$

Questi politopi per costruzione hanno celle e stelle (o figure al vertice) regolari, si tratta quindi di politopi regolari.

Anche per i politopi 4-dimensionali si usano i *simboli di schläfli.*
In generale se le facce bidimensionali sono dei $\{p\}$ e le stelle dei $\{q, r\}$ viene indicato con $\{p, q, r\}$.
Il *5-celle* ha come celle dei tetraedri per cui le facce sono dei {3} e come stelle ancora dei tetraedri quindi ha come simbolo {3,3,3}.

Il *16-celle* ha come celle dei tetraedri per cui le facce sono dei {3} e come stelle degli ottaedri quindi ha come simbolo {3,3,4}.
L'*8-celle* ha come celle dei cubi per cui le facce sono dei {4} e come stelle dei tetraedri quindi ha come simbolo {4,3,3}.

In generale possiamo dare la seguente:

Definizione 2.5.2 Un politopo si dice regolare se le sue celle sono regolari e le sue stelle (o figure al vertice) sono regolari.

Definizione 2.5.3 Consideriamo un politopo P di dimensione n, lo indichiamo con:

$$\{r_1, r_2, ..., r_{n-1}\}$$

Se r_1 è il numero dei lati delle facce bidimensionali di P e se $\{r_2, ..., r_{n-1}\}$ è il simbolo della stella di P.

Ad ogni poligono regolare è assocciato il cerchio circostritto passante per i suoi vertici, ad ogni poliedro regolare è associata la sfera circoscritta passante per i suoi vertici, analogamente ad ogni politopo regolare P è associata l'ipersfera circoscritta passante per i suoi vertici.
Detto questo possiamo dare la seguente:

Definizione 2.5.4 (Relazione fondamentale per i politopi regolari) Detta l la lunghezza di uno spigolo di P ed r il raggio della sua ipersfera circoscritta il numero:

$$\varrho(P) = \frac{l^2}{4r^2}$$

è oggetto della relazione fondamentale.
Se indichiamo con $Et(P)$ la stella del politopo P, la relazione sarà la seguente:
Sia P un politopo regolare n-dimensionale $\{r_1, ..., r_{n-1}\}$, $Et(P)$ la stella riferita ad un generico vertice, allora $\varrho(P)$ e $\varrho(Et(P))$ sono legati dalla relazione:

$$\varrho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\varrho(Et(P))}$$

o equivalentemente

$$\varrho(r_1, ..., r_{n-1}) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\varrho(r_2, ..., r_{n-1})}$$

La relazione fondamentale introdotta dalla definizione 2.5.4 verrà utilizzata per dimostrare il seguente:

Teorema 2.5.5 (Schläfli) A meno di similitudini, gli unici politopi convessi regolari n-dimensionali che esistono sono quelli rappresentati dai seguenti simboli:

- $n = 2$ $\{r_1\}$ per qualunque intero $r_1 \geq 3$;
- $n = 3$ {3,3}, {3,4}, {4,3}, {3,5}, {5,3};
- $n = 4$ {3,3,3}, {3,3,4}, {4,3,3}, {3,4,3}, {3,3,5}, {5,3,3};
- $n \geq 5$ {3,...,3}, {3,...,3,4}, {4,3,...,3}.

Dimostrazione:
Proviamo che i simboli sono quelli dell'enunciato, nel caso $n = 2$ e $n = 3$. Poiché $r_1 \geq 3$ (lati di una faccia) risulta $\cos^2 \frac{\pi}{r_1} \geq \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$ ma poiché $\varrho(P) = \varrho(r_1, r_2, ..., r_{n-1})$ è una quantità positiva per definizione, abbiamo che:

$$\varrho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\varrho(r_2, ..., r_{n-1})}$$

perciò deve essere:

$$\varrho(r_2, ..., r_{n-1}) > \cos^2 \frac{\pi}{r_1} \geq \frac{1}{4}$$

I politopi regolari e le stelle di politopi regolari, devono quindi soddisfare la doppia condizione:

$$\varrho(r_1, r_2, ..., r_{n-1}) > 0$$
$$\varrho(r_2, .., r_{n-1}) > \frac{1}{4}.$$

Esaminiamo il caso $n = 2$
Dato il poligono $\{r_1\}$, presi due vertici consecutivi x, x' e indicato con o il centro della circonferenza circoscritta di raggio r, l'angolo xx' vale $\frac{2\pi}{r_1}$.

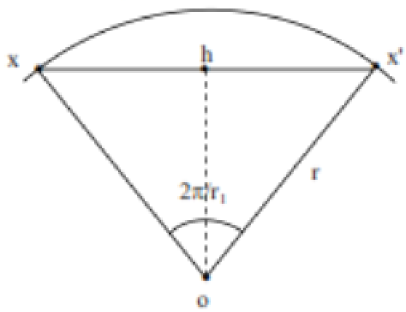


Fig. 2.11

Detto h il punto di intersezione della bisettrice di tale angolo con il lato xx' di lunghezza l nel triangolo $conv(o,h,x)$ si ha $\frac{l}{2} = r \sin\frac{\pi}{r_1}$ da cui $\frac{l}{2r} = \sin\frac{\pi}{r_1}$.
La relazione fondamentale si può allora scrivere

$$\varrho(r_1) = \frac{l^2}{4r^2} = \sin^2\frac{\pi}{r_1}$$

. Quindi:

- $r_1 = 3$
$$\varrho(3) = \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} > \frac{1}{4};$$
- $r_1 = 4$
$$\varrho(4) = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4};$$
- $r_1 = 5$
$$\varrho(5) = \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{8}(5-\sqrt{5}) > \frac{1}{4};$$
- $r_1 = 6$
$$\varrho(6) = \sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}.$$

Qualsiasi sia il numero dei lati $\varrho(r_1)$ è sempre maggiore di zero, per cui esistono infiniti poligoni regolari, ma solo i poligoni con al più 5 lati possono essere stelle di poliedri.

Esaminiamo il caso $n = 3$.
Sia P un poliedro di simbolo $\{r_1, r_2\}$, il secondo parametro r_2 può assumere solo i valori 3, 4 e 5 per quanto visto nel caso bidimensionale.

Sia $r_2 = 3$, $\varrho(Et(P)) = \varrho(3) = \frac{3}{4}$.

Calcoliamo ora $\varrho(r_1, 3)$.

- Se $r_1 = 3$
$$\varrho(3,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3} > \frac{1}{4};$$

- Se $r_1 = 4$
$$\varrho(4,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4};$$

- $r_1 = 5$
$$\varrho(5,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}(3+\sqrt{5}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6} > 0;$$

- $r_1 = 6$
$$\varrho(6,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{6}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 0.$$

Pertanto esitono solo 3 poliedri con stelle triangolari: il tetraedro, il cubo e il dodecaedro e soltanto i primi due {3,3} e {4,3} sono stelle di politopi regolari di dimensione 4.

Consideriamo ora $r_2 = 4$, $\varrho(Et(P)) = \varrho(4) = \frac{1}{2}$.

Calcoliamo ora $\varrho(r_1, 4)$.

- $r_1 = 3$
$$\varrho(3,4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4};$$

- $r_1 = 4$
$$\varrho(4,4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

Quindi otteniamo l'ottaedro {3,4} ed esso può essere stella di politopi regolari di dimensione 4.

Consideriamo ora $r_2 = 5$, $\varrho(Et(P)) = \varrho(5) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$.

Calcoliamo ora $\varrho(r_1, 5)$.

- Se $r_1 = 3$
$$\varrho(3,5) = 1 - \frac{8\cos^2 \frac{\pi}{3}}{5-\sqrt{5}} = 1 - \frac{2}{5-\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{4};$$

- Se $r_1 = 4$

$$\varrho(4,5) = 1 - \frac{8\cos^2\frac{\pi}{4}}{5-\sqrt{5}} = 1 - \frac{4}{5-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5} < 0;$$

Solo {3,5} è un politopo regolare, l'icosaedro, e può essere stella di politopi di dimensione 4.
Abbiamo quindi ritrovato una proprietà nota anche per vie elementari.
Gli unici poliedri regolari sono: tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro e dodecaedro.
Procedendo alle stesso modo si può provare che:

- $\varrho(3,3,3) = \frac{5}{8}$;
- $\varrho(4,3,3) = \frac{1}{4}$;
- $\varrho(3,3,4) = \frac{1}{2}$;
- $\varrho(3,4,3) = \frac{1}{4}$;
- $\varrho(3,3,5) = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$;
- $\varrho(5,3,3) = \frac{7-3\sqrt{5}}{16}$.

Quindi in dimensione 4 possono esistere 6 politopi regolari i cui simboli sono:

- {3,3,3} il *5-celle*

Fig.2.12: 5-celle

- {4,3,3} l'*8-celle*

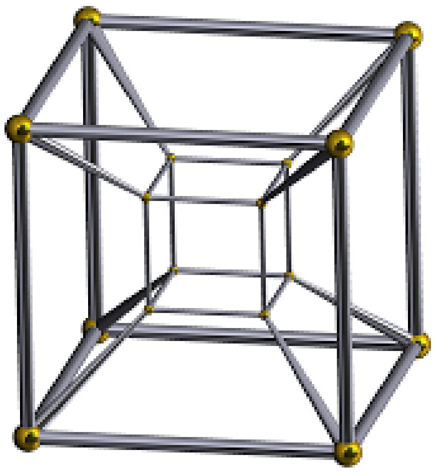


Fig.2.13: 8-celle

- {3,3,4} il *16-celle*

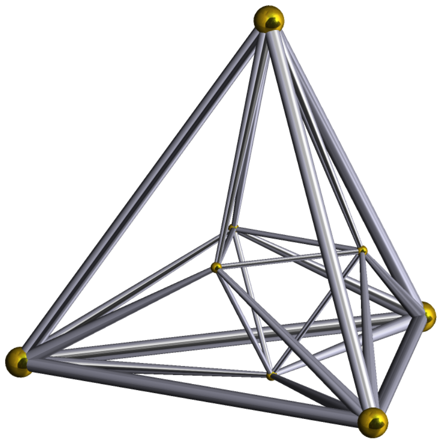


Fig.2.14: 16-celle

- {3,4,3} il *24-celle*

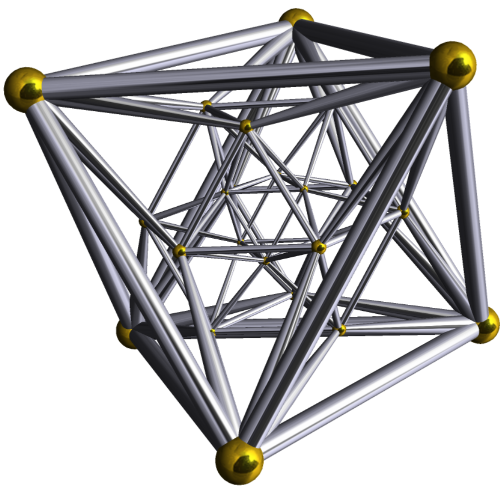


Fig.2.15: 24-celle

- {3,3,5} il *600-celle*

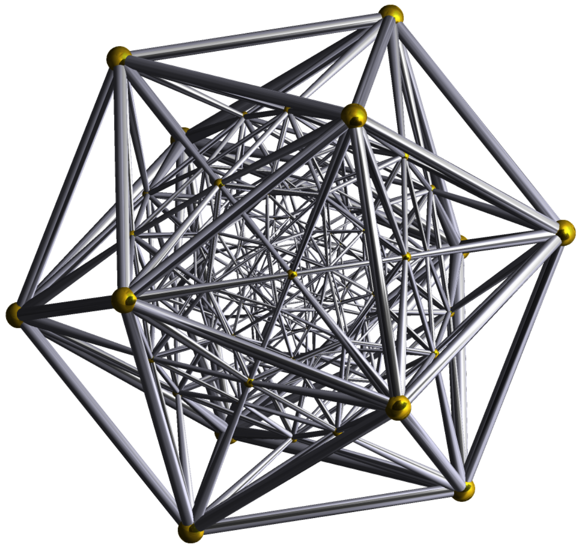


Fig.2.16.: 600-celle

- {5,3,3} il *120-celle*

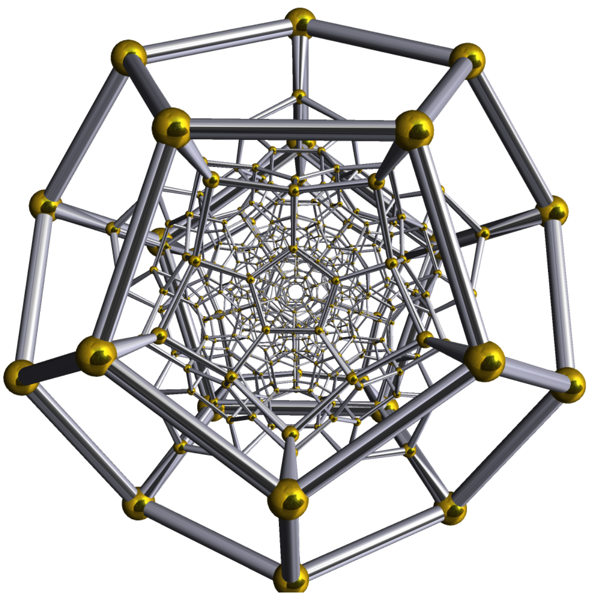


Fig.2.18: 120-celle

Per $n \geq 5$, si dimostra per induzione che:

$$\varrho(3, ..., 3, 3) = \frac{n+1}{2n}$$

$$\varrho(4,3,...,3) = \frac{1}{n}$$

$$\varrho(3,...,3,4) = \frac{1}{2}$$

Quindi esistono solo tre politopi n-dimensionali:

- α_n {3,...,3,3}
- β_n {3,...,3,4}
- γ_n {4,3,...,3}

e di questi solo il simplesso {3,...,3,3} e il cocubo {3,...,3,4} possono essere stelle di politopi regolari.

■

Abbiamo nuovamente provato, utilizzando un altro metodo, che i poliedri regolari sono al più cinque.
Siamo anche riusciti a provare che i politopi regolari in dimensione 4 sono al più sei.
In sintesi, abbiamo mostrato quali sono i poliedri regolari e le relazioni che intercorrono tra di loro, abbiamo esteso il concetto di poliedro a dimensioni $n > 3$ andando ad analizzare soprattutto i politopi in dimensione 4, ottenendo i risultati sopra elencati.

Bibliografia

[1] H.S.M. COXETER, *Regular Polytopes*, Methuen and Co. Ltd, London, 1948;

[2] M. BERGER, *Geometry* I, Cedic and Fernand Nathan, Paris, 1997;

[3] M. BERGER, *Geometry* II, Cedic and Fernand Nathan, Paris, 1997;

[4] A. FRAJESE, L. MACCIONI, *Gli Elementi di Euclide*, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1970;

[5] T. BOAG, C.BOBERG, L.HUGHES, *On Archimedean Solids*, 1979;

[6] A. ZUCCO, *Poligoni, Poliedri e Politopi regolari*, Matematicamente.it, 2009;

[7] G.FERRARESE, *Cenni di storia sui poliedri regolari*,Università degli studi di torino;