

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO
SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica e
applicazioni - LM 40

Dipartimento di Matematica e Informatica



NODI E BILIARDI

Tesi di Laurea in Geometria (S.S.D. MAT03)

Relatore:

Prof. Riccardo Piergallini

Laureando:

Federico Rulli

ANNO ACCADEMICO 2012 - 2013

Indice

Introduzione	3
Capitolo 1. Nozioni introduttive	4
1. Cenni di teoria dei nodi	4
2. Le trecce ed il Teorema di Manturov	12
3. Le traiettorie biliardo	26
Capitolo 2. Ellissi e funzioni ellittiche	31
1. Le proprietà ottiche dell'ellisse	31
2. Le funzioni ellittiche di Jacobi e il Teorema di Poncelet	40
Capitolo 3. Il Teorema di Pecker	44
1. Poligoni di Poncelet completamente irregolari	44
2. Il teorema di Pecker	50
Bibliografia	54

Introduzione

CAPITOLO 1

Nozioni introduttive

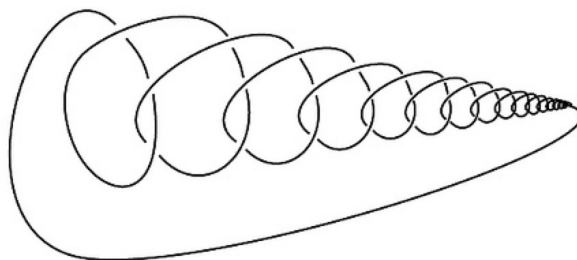
1. Cenni di teoria dei nodi

La teoria dei nodi è una branca della geometria che studia delle particolari varietà immerse unidimensionali dette *nodi*. La definizione precisa di nodo è la seguente:

Definizione 1.1. Sia $\gamma : S^1 \rightarrow R^3$ una mappa continua e iniettiva. L'immagine $K := \gamma(S^1)$ è detta nodo. Qualora γ si possa estendere ad una mappa continua ed iniettiva $\tilde{\gamma} : S^1 \times D^2 \rightarrow R^3$ tale che $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t, 0) \forall t \in S^1$, il nodo si dice *docile*. L'unione finita di più nodi disgiunti prende il nome di nodo a più componenti, in inglese *link*. Un nodo a più componenti si dice *docile* se sono tali le sue componenti.

Si osservi che un nodo ad una componente si può equivalentemente definire come l'immagine di una mappa continua $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow R^3$ iniettiva nell'intervallo semiaperto $[0, 2\pi)$ e tale che $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

Nel seguito ci occuperemo principalmente di nodi docili, che possono essere visti come un modello matematico di ciò che fisicamente si realizza intrecciando una corda e saldandone le estremità. I nodi non docili, infatti, possono presentare caratteristiche patologiche, quali ad esempio dei punti intorno ai quali il nodo perde le proprietà di una varietà topologica. In figura è riportata una proiezione planare di un nodo indocile.



I nodi docili costituiscono varietà topologiche unidimensionali compatte, e come tali sono orientabili. L'orientazione standard associata ad un nodo ad una componente K è quella indotta dall'orientazione positiva di S^1 tramite l'applicazione γ . Con il simbolo $-K$ si denota il nodo K munito dell'orientazione opposta a quella di K . Esempi particolari di nodi docili sono dati dal sostegno di una mappa differenziabile regolare (parleremo in questo caso di *nodo liscio*) oppure da una poligonale chiusa semplice in R^3 con un numero finito di lati (*nodo poligonale*).

Nell'insieme dei nodi sono definite le seguenti relazioni:

Definizione 1.2. *Siano $K, K' \subset R^3$ nodi (ad una o più componenti).*

Se esiste un omeomorfismo $h : R^3 \rightarrow R^3$ tale che $h(K) = K'$, i nodi si dicono equivalenti, e la relazione fra essi si indica con $K \cong K'$.

Se esiste una isotopia ambiente $h_t(x) : R^3 \times [0, 1] \rightarrow R^3$ tale che $h_0 = \text{Id}_{R^3}$, $h_1(K) = K'$, i due nodi si dicono isotopicamente equivalenti, $K \equiv K'$.

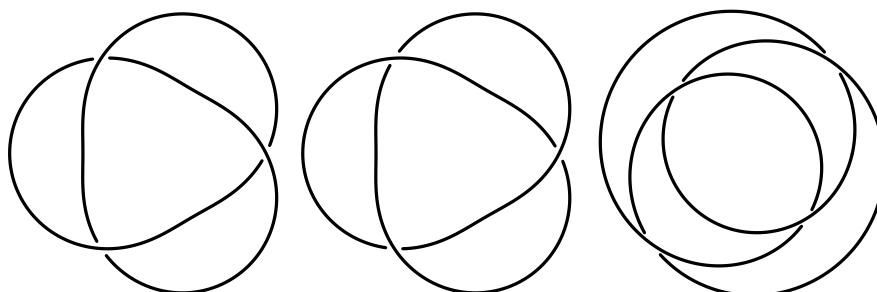
Sulla base di queste relazioni si definiscono i nodi banali:

Definizione 1.3. *Un nodo ad m componenti (eventualmente con $m = 1$ se il nodo è semplice) è denominato banale se è isotopicamente equivalente ad $S^1 \times \{0, \dots, m - 1\} \subset R^3$.*

Si osservi che i nodi banali non sono tutti isotopicamente equivalenti tra loro; è però vero che per ogni valore fissato di m sono isotopicamente equivalenti i nodi banali ad m componenti.

Entrambe le relazioni sono di equivalenza dal punto di vista algebrico (cioè godono delle proprietà riflessiva, transitiva e simmetrica), ma sono distinte fra loro. In particolare osserviamo che l'equivalenza semplice è più debole dell'equivalenza isotopica, dal momento che l'omeomorfismo $h : R^3 \rightarrow R^3$ che porta K in un nodo equivalente K' può non essere isotopo all'identità di R^3 : se h conserva l'orientazione dello spazio, allora h è isotopo all'identità, se invece inverte l'orientazione è isotopo ad una riflessione σ di R^3 rispetto ad un piano. Ne segue che $K \cong K'$ se e solo se vale una delle due equivalenze isotopiche $K \equiv K'$, $\sigma(K) \equiv K'$. Con il simbolo \overline{K} denoteremo il nodo $\sigma(K)$ ottenuto per riflessione; si osservi che la scelta di σ non influisce sulla classe di equivalenza isotopica di \overline{K} , che quindi potremo intendere come una generica immagine riflessa di K .

Un nodo K per cui vale $K \not\equiv \overline{K}$ è detto *asimmetrico* o *chirale*, ed è tale che $[K]_{\equiv} \subset [K]_{\cong}$; più precisamente, la classe di equivalenza semplice è partizionata dalle classi di equivalenza isotopica di K, \overline{K} . Se invece $K \equiv \overline{K}$ il nodo è *simmetrico* o *anfichirale*, e vale $[K]_{\equiv} = [\overline{K}]_{\equiv} = [K]_{\cong}$. Esistono esempi di nodi asimmetrici e simmetrici, come il nodo trifoglio e il nodo a otto. In figura sono riportati, da sinistra a destra, le due forme chirali del nodo trifoglio ed il nodo a otto.



Un nodo K isotopicamente equivalente a $-K$ è detto *invertibile*: si intende cioè che esiste un omeomorfismo di R^3 in sé che mantiene l'orientazione di R^3 , manda K in sé ed inverte l'orientazione di K . I nodi trifoglio ed il nodo a otto sono invertibili, ma esistono esempi di nodi non invertibili, fra i quali il più semplice è classificato come 8_{17} secondo la notazione di Alexander-Briggs.

Con una certa libertà di linguaggio, si può intendere per nodo K sia il sostegno, sia la parametrizzazione, sia la classe di equivalenza isotopica, sia la classe di equivalenza di K (in quest'ultimo caso può essere utile distinguere la forma destrorsa e sinistrorsa del nodo, qualora esso sia chirale), secondo i contesti. Parlando di nodo trifoglio, quindi, possiamo indicare la classe di equivalenza di tutti i nodi trifoglio, eventualmente riservando le nomenclature *trifoglio destro* e *trifoglio sinistro* alle due classi di equivalenza isotopica.

Proposizione 1.4. *Sia $K \subset R^3$ un nodo docile. Allora esistono almeno un nodo liscio ed un nodo poligonale isotopicamente equivalenti a K .*

Questa proposizione implica che ogni classe di equivalenza isotopica di nodi docili può essere rappresentata da un nodo liscio o da un nodo poligonale.

Al fine di raffigurare un nodo docile $K \subset R^3$ in due dimensioni è utile considerare un suo *diagramma liscio*, ovvero l'immagine di una proiezione su $R^2 \times \{0\}$ di una realizzazione liscia di K , che presenti un numero finito di singolarità trasversali doppie, chiamate *incroci* del diagramma. Per ogni nodo liscio è possibile scegliere almeno una direzione di proiezione tale che l'immagine è un diagramma liscio del nodo; con questo intendiamo che esiste un versore $v \in S^2$ tale che $(K + \mathbb{R}v) \cap (R^2 \times \{0\})$ possiede le caratteristiche che definiscono un diagramma liscio. In realtà si può provare, attraverso il Teorema di Morse-Sard, che l'insieme dei versori con questa proprietà è denso in S^2 .

Osserviamo però che l'immagine della proiezione non basta da sola

ad identificare il nodo: ad esempio, un nodo chirale e la sua riflessione rispetto al piano $R^2 \times \{0\}$ non sono isotopicamente equivalenti, ma le loro proiezioni canoniche (cioè secondo il versore $(0, 0, 1)^*$) su $R^2 \times \{0\}$ coincidono. Dunque è necessario che ad ogni incrocio sia associata una informazione su quale arco del nodo debba passare "sotto" all'altro: più precisamente, per ogni incrocio $c \in (K + \mathbb{R}v) \cap (R^2 \times \{0\})$ devono esistere due punti distinti $x, y \in K$ e due numeri reali $\lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{R}$ tali che $x + \lambda_x v = y + \lambda_y v = c$; l'informazione consiste in una delle due disuguaglianze $\lambda_x \geq \lambda_y$. Quando ad ogni incrocio del diagramma è associata una di queste disuguaglianze, è possibile ricostruire il nodo a meno di isotopia. Nella rappresentazione grafica di un diagramma, l'informazione agli incroci viene codificata mostrando una interruzione di uno degli archi, che sarà quello corrispondente al valore minore fra λ_x, λ_y .

Talvolta ci sarà utile fare anche riferimento a diagrammi poligonali, ovvero immagini di proiezioni di nodi poligonali le cui singolarità sono al più punti angolosi o punti doppi (in questo caso la trasversalità dei punti doppi è garantita dal fatto che il diagramma è unione finita di segmenti). Anche qui è necessario che ai diagrammi siano associate delle informazioni agli incroci, in modo da poter determinare il nodo a meno di isotopia.

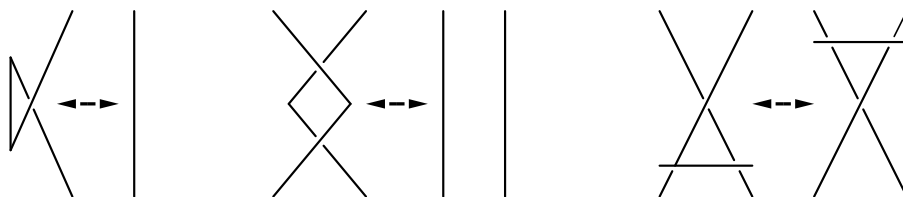
Osservazione 1.5. In generale non è possibile richiedere che un diagramma di un nodo liscio sia privo di singolarità, o che un diagramma di un nodo poligonale sia una spezzata semplice (cioè priva di punti doppi): per il Teorema di Jordan-Schönflies, il complementare di una curva continua, chiusa e semplice in R^2 è omeomorfo ad $R^2 \setminus S^1$. In altre parole, se un nodo ad una componente possiede un diagramma senza punti doppi, allora esso è isotopicamente equivalente a qualche nodo il cui diagramma è S^1 . A sua volta, un nodo di questo tipo è isotopicamente equivalente ad $S^1 \times \{0\}$, cioè è banale. Questo ragionamento si estende anche ai nodi a più componenti: se il diagramma è privo di punti doppi, allora è unione disgiunta di m curve continue,

chiuse e semplici, e il nodo corrispondente è isotopicamente equivalente ad $S^1 \times \{0, \dots, m-1\}$.

Di conseguenza, i nodi non banali ammettono solo diagrammi muniti di punti doppi. L'esistenza di nodi non banali si può dedurre in vari modi costruendo degli invarianti isotopici, ovvero degli oggetti o delle proprietà associate ai nodi e che non variano a meno di deformazioni isotopiche del nodo. Una proprietà invariante è la chiralità: dal momento che i nodi banali sono achirali e il nodo trifoglio è chirale, ne segue che il nodo trifoglio è non banale.

Ovviamente, uno stesso nodo può possedere diagrammi fra loro distinti (ciò può dipendere da una diversa scelta della direzione di proiezione, o da diverse realizzazioni del nodo in R^3), tuttavia esiste un criterio che permette di stabilire se due diagrammi rappresentano nodi equivalenti a meno di isotopia.

Definizione 1.6. *I movimenti di Reidemeister sono le seguenti deformazioni di un diagramma:*



Dove si intende che tali deformazioni possono essere effettuate in entrambi i sensi.

Due diagrammi si dicono equivalenti se è possibile passare da uno

all'altro per mezzo di un numero finito di movimenti di Reidemeister.

Alterare un diagramma attraverso un numero finito di movimenti di Reidemeister non cambia la classe di equivalenza isotopica del nodo rappresentato, ovvero diagrammi equivalenti rappresentano nodi isotopicamente equivalenti. Il viceversa continua ad essere vero, ma rappresenta un risultato non banale noto come Teorema di Reidemeister, di cui non riportiamo la dimostrazione.

Teorema 1.7 (di Reidemeister). *Due nodi sono isotopicamente equivalenti se e solo se ammettono diagrammi equivalenti.*

Per terminare questa sezione definiamo una classe di nodi che ci sarà utile nel seguito.

Definizione 1.8. *Fissati due interi $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ con massimo comune divisore $m = \text{MCD}(p, q)$, si definisce il nodo torico $T_{p,q}$ come l'unione di curve parametrizzate da $\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dove ciascuna γ_j è così definita:*

$$\gamma_j(t) = \begin{pmatrix} \left(2 + \cos\left(\frac{pt}{m} + \frac{2qj\pi}{mp}\right) \right) \cos\left(\frac{qt}{m}\right) \\ \left(2 + \cos\left(\frac{pt}{m} + \frac{2qj\pi}{mp}\right) \right) \sin\left(\frac{qt}{m}\right) \\ - \sin\left(\frac{pt}{m}\right) \end{pmatrix}.$$

Per la periodicità e continuità delle funzioni seno e coseno, le varie γ_j parametrizzano effettivamente dei nodi, quindi $T_{p,q}$ è un nodo ad m componenti.

Se p, q sono primi fra loro il sostegno del nodo si riduce alla curva parametrizzata da $\gamma(t) = ((2 + \cos(pt)) \cos(qt), (2 + \cos(pt)) \sin(qt), -\sin(pt))$.

Prendendo $p = 3, q = 2$ si ottiene il nodo trifoglio destro.

Elenchiamo alcune proprietà che accomunano i nodi torici, senza riportarne le dimostrazioni.

- (1) $T_{-p,-q} \equiv -T_{p,q} \equiv T_{p,q}$, cioè i nodi torici sono invertibili;
- (2) $T_{-p,q} \equiv T_{p,-q} \equiv \bar{T}_{p,q} \not\equiv T_{p,q}$ cioè i nodi torici sono chirali;
- (3) $T_{p,q} \equiv T_{q,p}$;

(4) $T_{p,q}$ è banale se e solo se almeno uno degli interi p, q vale ± 1 .

Il nodo torico parametrizzato come nella definizione può essere proiettato in $R^2 \times \{0\}$ secondo la proiezione canonica, dando luogo ad un diagramma liscio di $T_{p,q}$. Inoltre, dal momento che $T_{p,q} \equiv T_{q,p}$ possiamo assumere $|p| \geq |q|$ e costruire la spezzata chiusa di vertici $A_j := \left(\cos\left(\frac{2qj\pi}{p}\right), \sin\left(\frac{2qj\pi}{p}\right) \right)$, $T_j := \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(2p - q)(A_j + A_{j+1})$ e lati $[A_j T_j]$, $[T_j A_{j+1}]$ per $j = 0, \dots, p - 1$. Per p, q primi fra loro, questa spezzata costituisce un diagramma poligonale di $T_{p,q}$, dove si è posto per convenzione $A_p = A_0$. Qualora valga anche $|p| \geq 2|q| + 1$, tale spezzata si riduce alla stella poligonale di lati $[A_j A_{j+1}]$. Per realizzare un diagramma poligonale di un nodo torico a più componenti è necessario unire m spezzate, ognuna ottenuta ruotando $A_0 T_0 A_1 T_1 \dots A_{\frac{p}{m}-1} T_{\frac{p}{m}-1}$ di un angolo $\frac{2qh\pi}{mp}$, $h = 0, \dots, m - 1$.

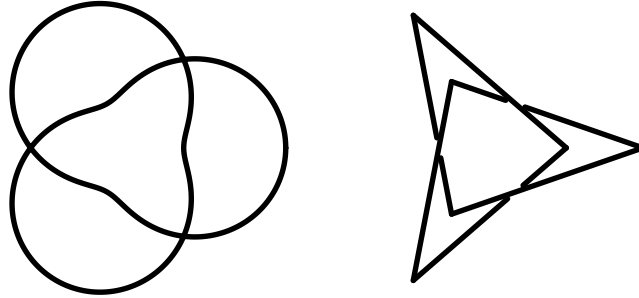


FIGURA 1. A sinistra la proiezione canonica in R^2 del nodo trifoglio destro, $T_{3,2}$. A destra il diagramma poligonale del trifoglio destro costruito in maniera standard: si osservi che non è una stella poligonale, poiché $3 < 2 \times 2$.

Osservazione 1.9. Se p, q sono primi fra loro, il valore q corrisponde all'indice di allacciamento rispetto all'origine di R^2 della spezzata chiusa $A_0 A_1 \dots A_{p-1}$, munita dell'orientazione indotta da quella del nodo torico (e quindi, a monte, dall'orientazione positiva di S^1). Se invece p, q hanno divisori comuni non banali, allora q è la somma degli

indici di allacciamento rispetto all'origine di tutte le componenti del diagramma.

La scrittura $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ verrà utilizzata per indicare la stella poligonale con $|p|$ vertici e indice di allacciamento q , essendo $\text{MCD}(p, q) = 1$, $|p| \geq 2|q| + 1$. Se $\text{MCD}(p, q) = m > 1$, l'abuso di notazione $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ starà ad indicare l'unione di m stelle poligonali ottenute ruotando $\left\{\frac{p/m}{q/m}\right\}$ attorno all'origine. D'ora in poi considereremo sempre p, q positivi.

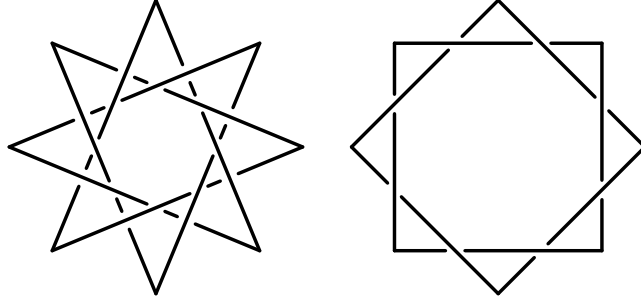


FIGURA 2. A destra il diagramma di $T_{8,-3}$ realizzato dalla stella poligonale $\left\{\frac{8}{3}\right\}$. A sinistra il diagramma di $T_{8,2}$: esso è l'unione di due stelle poligonali della forma $\left\{\frac{4}{1}\right\}$.

2. Le trecce ed il Teorema di Manturov

In questa sezione definiamo degli oggetti affini ai nodi, ovvero le *trecce*, per poi enunciare e dimostrare il Teorema di Manturov, il quale in una delle sue formulazioni afferma che ogni nodo (ad una o più componenti) ammette $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ come diagramma poligonale, per qualche scelta di p, q .

Definizione 1.10. Si dice spazio delle configurazioni di q punti in R^2 l'insieme $\Gamma_q R^2 = \{\{x_0, \dots, x_{q-1}\} : x_j \in R^2, x_j \neq x_h \forall j \neq h\}$.

Questo insieme può essere interpretato come il sottoinsieme di $(R^2)^q$ composto dalle q -ple di punti a due a due distinti, quozientato per l'azione del gruppo simmetrico S_q ; di conseguenza esso è munito di una topologia indotta da quella standard di R^{2q} , ed acquisisce anche una struttura di varietà topologica reale $2q$ -dimensionale.

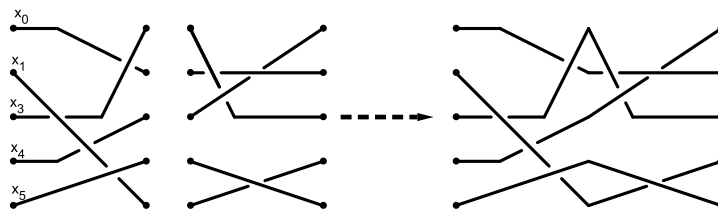
Definizione 1.11. Fissato un punto $\star \in \Gamma_q R^2$, chiamiamo q -treccia di base \star un coppia dello spazio $\Gamma_q R^2$, ovvero un cammino continuo $\beta : [0, 1] \rightarrow \Gamma_q R^2$ tale che $\beta(0) = \beta(1) = \star$, o ancora un elemento $\beta \in \Omega(\Gamma_q R^2, \star)$.

Due trecce β, β' di base \star si dicono equivalenti, $\beta \simeq \beta'$, se esiste una isotopia $H : [0, 1]^2 \rightarrow \Gamma_q R^2$ tale che $H(t, 0) = \beta(t)$, $H(t, 1) = \beta'(t)$ e che $H(0, s) = H(1, s) = \star \forall s$. Le trecce equivalenti alla treccia costante $[0, 1] \rightarrow \star$ sono chiamate banali.

Due trecce β_0, β_1 di base \star possono essere concatenate secondo l'operazione

$$\beta_0 \circ \beta_1(t) := \begin{cases} \beta_0(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta_1(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

la quale mantiene l'equivalenza: se $\beta_0 \simeq \beta'_0, \beta_1 \simeq \beta'_1$, allora $\beta_0 \circ \beta_1 \simeq \beta'_0 \circ \beta'_1$. In questo modo, la concatenazione si può applicare alle classi di equivalenza ponendo $[\beta_0]_{\simeq} \circ [\beta_1]_{\simeq} := [\beta_0 \circ \beta_1]_{\simeq}$. Osserviamo inoltre che per ogni β di base \star , la costruzione $\beta^{-1}(t) := \beta(1 - t)$ dà luogo ad una nuova treccia di base \star che gode della proprietà $\beta \circ \beta^{-1} \simeq \beta^{-1} \circ \beta \simeq \star$, e che quindi chiameremo *treccia inversa di β* . Infine osserviamo che l'operazione di concatenazione non è associativa, poiché le trecce $(\beta_0 \circ \beta_1) \circ \beta_2, \beta_0 \circ (\beta_1 \circ \beta_2)$ pur avendo lo stesso supporto in $\Gamma_q R^2$ non sono parametrizzate allo stesso modo; tuttavia, esse sono equivalenti, quindi l'associatività vale per la concatenazione delle rispettive classi di equivalenza.



Queste considerazioni ci permettono di costruire il *gruppo di treccia di ordine q* : $B_q = (\Omega(\Gamma_q R^2, \star) / \simeq, \circ)$ il cui elemento neutro è la classe delle trecce banali. D'ora in poi indicheremo la concatenazione di due trecce β_0, β_1 semplicemente come $\beta_0\beta_1$.

Data una treccia β costruiamo l'insieme $B = \{(t, x) \in [0, 1] \times R^2 : x \in \beta(t)\}$, che può essere inteso in maniera impropria come il grafico di β e ne restituisce l'aspetto geometrico in R^3 . Anche qui, secondo i contesti, col termine treccia potremo intendere il coppia β , la classe di equivalenza isotopica, o il grafico B .

Definizione 1.12. Una treccia β è detta liscia se è una mappa differenziabile di $[0, 1]$ in $\Gamma_q R^2$ relativamente alle strutture differenziabili standard di $[0, 1], \Gamma_q R^2$; equivalentemente, se il suo grafico B è unione disgiunta finita di sottovarietà differenziabili unidimensionali con bordo in R^3 .

Una treccia β è detta poligonale se il suo grafico B è unione finita di segmenti in R^3 .

Proposizione 1.13. Sia $\beta : [0, 1] \rightarrow \Gamma_q R^2$ una treccia di base $\star \in \Gamma_q R^2$. Allora esistono una treccia liscia ed una treccia poligonale di base \star equivalenti a β .

Possiamo scegliere \star in modo che sia contenuto nel disco unitario $B^2 \subset R^2$, e supporre a meno di isotopia che le trecce con base in \star siano

in ogni istante t contenute in B^2 ; in questo modo i grafici delle trecce saranno contenuti nel cilindro $[0, 1] \times B^2$. Sia quindi β una treccia con questa caratteristica; poiché $\beta(0) = \beta(1) = \star$, ha senso quozientare il cilindro $[0, 1] \times B^2$ identificando le sue basi $\{0\} \times B^2, \{1\} \times B^2$ e mantenendo la continuità del grafico della treccia. Il risultato è un toro solido della forma $S^1 \times B^2$ contenente il grafico della treccia in cui sono state identificate le "estremità" $\{0\} \times \star, \{1\} \times \star$. Il toro solido può essere immerso in maniera differenziabile in R^3 , e di conseguenza anche il grafico quozientato, che risulterà essere un nodo detto *chiusura* della treccia. In simboli si scrive $K = \widehat{\beta}$ oppure $K = \widehat{B}$, essendo β la treccia e B il suo grafico.

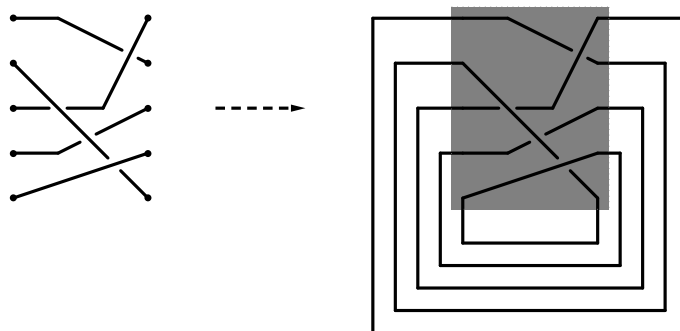


FIGURA 3. Una treccia e un nodo isotopicamente equivalente alla sua chiusura. La costruzione del diagramma del nodo è intesa ad evidenziare la correlazione fra i due oggetti. La zona ombreggiata riproduce la treccia.

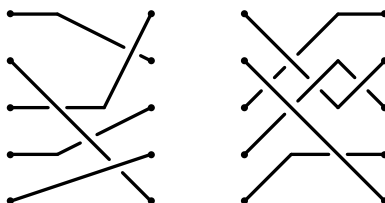
Teorema 1.14 (di Alexander). *Ogni nodo è chiusura di una treccia.*

Come per i nodi, anche per le trecce è utile definire i diagrammi lisci e poligonali proiettando su $R^2 \times \{0\}$ secondo la direzione determinata da un vettore $v \in \{0\} \times S^1$ i grafici di una realizzazione liscia ed una realizzazione poligonale della treccia, rispettando le seguenti clausole:

- (1) la proiezione è iniettiva se ristretta all'insieme $\{0, 1\} \times \star \subset B$;
- (2) l'immagine della proiezione di B è rispettivamente unione finita di varietà unidimensionali con bordo in R^2 con intersezioni di tipo trasversale (per un diagramma liscio) o unione finita di segmenti con intersezioni trasversali (diagramma poligonale).

Ancora per il Teorema di Morse-Sard, l'insieme di versori v ammissibili è denso in $\{0\} \times S^1$. I diagrammi determinano la treccia a meno di equivalenza se e solo se ad ogni incrocio è associata un'informazione su quale arco debba passare sopra l'altro.

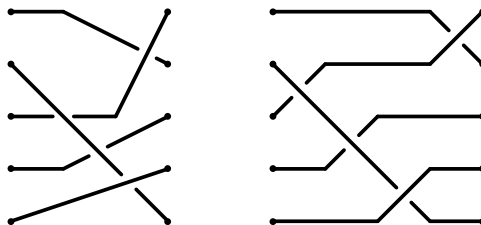
Dall'osservazione dei diagrammi si ricavano molte informazioni riguardo il gruppo di treccia B_q . Innanzi tutto, la treccia β induce una permutazione degli elementi di \star , che ricordiamo essere un insieme di punti della forma $x_0, \dots, x_{q-1} \in R^2$; infatti gli archi che compongono il diagramma hanno estremi iniziali nei punti $(0, x_j)$, e finali nei punti $(1, x_j)$ per $j = 0, \dots, q - 1$. Ad uno specifico x_j è quindi associato in maniera naturale l'estremo opposto dell'arco a cui appartiene, che sarà identificato dall'indice $s(j)$ per una opportuna permutazione $s \in S_q$. L'applicazione che associa $\beta \mapsto s$ è un morfismo suriettivo di gruppi, pertanto B_q possiede un sottogruppo isomorfo ad S_q . Per $q = 1$ il gruppo B_1 contiene solo la treccia banale, dal momento che i soli grafici ammissibili sono composti da un singolo arco senza autointersezioni. Ne segue che $B_1 \cong S_1$. Tuttavia, per $q > 1$ il gruppo B_q cessa di essere isomorfo ad S_q , poiché l'applicazione $\beta \mapsto s$ non è iniettiva; per rendersene conto si considerino due trecce con lo stesso grafico ma diversa informazione agli incroci: ad entrambe è associata la stessa permutazione. In figura sono riportate due trecce non equivalenti di B_5 a cui è associata la stessa permutazione appartenente ad S_5 .



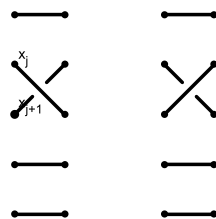
Definizione 1.15. Una treccia di base \star è detta pura se ad essa è associata la permutazione identica degli elementi di \star , ovvero la permutazione banale di S_q .

Le trecce banali sono necessariamente pure; inoltre, la composizione e l'inversione di trecce pure forniscono come risultato altre trecce pure. Di conseguenza il sottoinsieme di B_q composto dalle classi di trecce pure è un sottogruppo, chiamato *gruppo di treccia puro di ordine q* ed indicato con PB_q .

Al fine di fornire una presentazione finita del gruppo di treccia B_q osserviamo che, a meno di equivalenza isotopica, si può assumere che il diagramma di una treccia possieda valori distinti per le ascisse dei suoi incroci, come in figura.



Si vede quindi che la treccia è composizione finita delle trecce fondamentali σ_j, σ_j^{-1} con diagrammi:



La permutazione associata ad entrambe è lo scambio $(j, j+1) \in S_q$ per $j = 0, \dots, q-2$.

Il gruppo B_q è quindi generato da $\sigma_0, \dots, \sigma_{q-2}$, ma non coincide col gruppo libero $\langle \sigma_0, \dots, \sigma_{q-2} \rangle$, poiché presenta delle relazioni non banali, dette di Artin, che ora ricaveremo.

In primo luogo, l'applicazione del terzo movimento di Reidemeister ad un diagramma di treccia mantiene la classe di equivalenza della treccia e genera le relazioni non banali $\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \simeq \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1} \forall j = 0, \dots, q-3$, vedi figura. Gli altri due movimenti di Reidemeister non sono necessari: il primo perché viola la natura della treccia facendo perdere la monotonia degli archi di cui essa è composta; il secondo perché genera le relazioni banali $\sigma_j \sigma_j^{-1} \simeq \sigma_j^{-1} \sigma_j \simeq \star$.

In secondo luogo osserviamo che il gruppo B_q non è abeliano (ad esempio vale $\sigma_j \sigma_{j+1} \not\simeq \sigma_{j+1} \sigma_j$), però alcune coppie di generatori commutano. Se prendiamo due indici j, h tali che $j \leq h-2$, i rispettivi σ_j, σ_h verificano la relazione di commutatività $\sigma_h \sigma_j \simeq \sigma_j \sigma_h$.

Questi due insiemi di relazioni non possono essere ulteriormente ampliati: sapendo che il gruppo simmetrico S_q è generato dagli scambi $s_j = (j, j+1)$, ed ammette la presentazione $\langle s_0, \dots, s_{q-2} \mid s_j^2 = \text{Id} \forall 0 \leq j \leq q-2, s_j s_{j+1} s_j = s_{j+1} s_j s_{j+1} \forall 0 \leq j \leq q-3, s_j s_h = s_h s_j \forall 0 \leq j \leq$

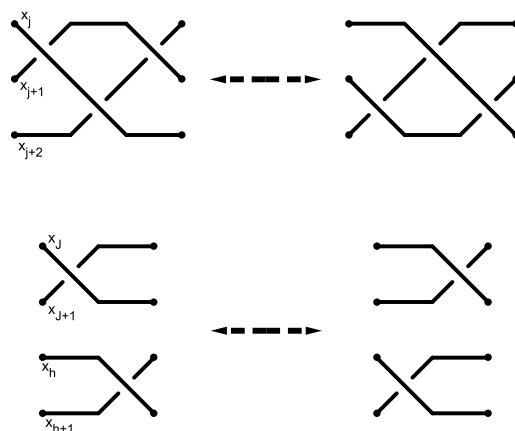
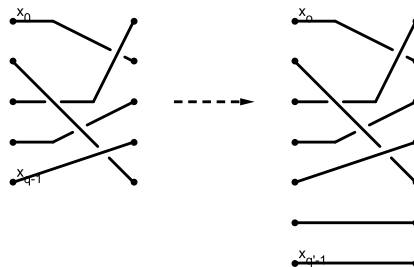


FIGURA 4. Sopra: il terzo movimento di Reidemeister genera la relazione $\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \simeq \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}$. Sotto, l'isotopia di treccia associata alla relazione $\sigma_h \sigma_h \simeq \sigma_h \sigma_j$ per $j \leq h - 2$.

$h - 2 \leq q - 4$), ed è isomorfo ad un sottogruppo di B_q , allora un eventuale ampliamento della presentazione di B_q potrebbe al più contenere qualche relazione della forma $\sigma_j^2 \simeq \star$, ma quest'ultima è equivalente a $\sigma_j \simeq \sigma_j^{-1}$, che nel gruppo di treccia è evidentemente falsa. Rimane così provato che $B_q = \langle \sigma_0, \dots, \sigma_{q-2} \mid \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \simeq \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1} \forall 0 \leq j \leq q - 3, \sigma_j \sigma_h \simeq \sigma_h \sigma_j \forall 0 \leq j \leq h - 2 \leq q - 4 \rangle$.

Osservazione 1.16. Dati due gruppi di treccia $B_q, B_{q'}$ con $q \leq q'$, esiste una immersione naturale di B_q in $B_{q'}$: se $\sigma_0, \dots, \sigma_{q'-2}$ sono i generatori di $B_{q'}$, allora B_q è isomorfo al sottogruppo di $B_{q'}$ generato da $\sigma_0, \dots, \sigma_{q-2}$. L'immersione $\iota : B_q \hookrightarrow B_{q'}$ manda le trecce di B_q in trecce di $B_{q'}$ operando l'aggiunta di $q' - q$ archi che non incrociano la treccia preesistente.



Tale immersione manda la treccia banale di B_q nella treccia banale di $B_{q'}$, inoltre preserva la concatenazione e l'inversione di trecce. Interpretando queste immersioni come inclusioni, si può costruire la catena $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_q \subset B_{q+1} \subset \dots$ e definire il *gruppo di treccia stabile* come il limite $\lim_{q \rightarrow +\infty} B_q$.

Il gruppo di treccia puro PB_q è generato da un insieme finito di trecce pure della forma $b_{j,h} := \sigma_h \sigma_{h-1} \dots \sigma_{j+1} \sigma_j^2 \sigma_{j+1}^{-1} \dots \sigma_{h-1}^{-1} \sigma_h^{-1}$ per $0 \leq j \leq h \leq q-2$. Ciò si può vedere per induzione su q : se $q = 2$, allora gli elementi di PB_2 sono codificati da sequenze composte solamente da σ_0, σ_0^{-1} , ed utilizzando la relazione $\sigma_0 \sigma_0^{-1} = \star$ queste si possono ridurre alla forma σ_0^p con p intero pari (affinché le permutazioni associate siano banali) e ancora alla forma $b_{0,0}^{p/2}$. Per il passo induttivo, si consideri $\beta \in PB_{q+1}$; rimuovendo il $q+1$ -esimo arco del diagramma di β (ciò è lecito perché la treccia è pura, quindi ogni arco forma una componente connessa di $\widehat{\beta}$) si ottiene una treccia $\delta \in B_q$. Allora possiamo scrivere $\beta = \beta \delta^{-1} \delta$, intendendo δ come elemento di $PB_{q+1} \supset PB_q$; per ipotesi induttiva δ è concatenazione dei generatori $b_{j,h}$, ed inoltre $\beta \delta^{-1}$ è tale che la sua restrizione ai primi q archi è la treccia banale. Possiamo quindi assumere che i primi q archi non si incrocino affatto, e che solo il $q+1$ -esimo formi degli incroci con gli altri archi. A questo punto si può esprimere $\beta \delta^{-1}$ in termini di $b_{j,h}$ secondo il seguente procedimento: si scrive la parola corrispondente a $\beta \delta^{-1}$ in modo che ciascun

generatore σ_j compaia con esponente ± 1 (per questo è sufficiente che ogni sottoparola σ_j^p sia espressa come una sequenza di p lettere σ_j per p positivo, o come $-p$ lettere σ_j^{-1} per p negativo) e successivamente si applicano le seguenti sostituzioni:

- (1) se un generatore σ_j compare con esponente ± 1 e corrisponde ad un incrocio dove l'arco $q + 1$ passa al di sopra di un altro arco, allora esso viene rimpiazzato dalla parola $b_{j,q-1}^{\pm 1}$, dove l'esponente ± 1 è scelto coerentemente a quello di σ_j ;
- (2) se un generatore σ_j corrisponde ad un incrocio dove l'arco $q + 1$ passa al di sotto di un altro arco, allora esso viene sostituito con la parola vuota.

La treccia così realizzata è concatenazione dei generatori $b_{j,h}$ ed è equivalente a $\beta\delta^{-1}$, quindi $\beta = \beta\delta^{-1}\delta$ può a sua volta essere scritta in termini di $b_{j,h}$.

Ricordando l'enunciato del Teorema di Alexander, si ha che ogni nodo è associato a qualche treccia di cui è la chiusura, e di conseguenza può essere codificato da una opportuna parola del gruppo B_q . Ad esempio, il nodo torico $T_{p,q}$ è codificato da $\tau_{p,q} := (\sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_{q-3}\sigma_{q-2})^p$, che quindi prende il nome di *parola torica* o *treccia torica*. Una *treccia quasitorica* è invece una concatenazione di parole (eventualmente diverse fra loro) del tipo $\sigma_0^{\pm 1}\sigma_1^{\pm 1} \cdots \sigma_{q-3}^{\pm 1}\sigma_{q-2}^{\pm 1}$, dove ciascun esponente ± 1 è indipendente dagli altri.

Osservazione 1.17. La permutazione associata a $\tau_{p,q}$ è $(0, 1, \dots, q - 2, q - 1)^{-p}$, essendo $(0, 1, \dots, q - 2, q - 1) \in S_q$ la permutazione ciclica sugli elementi $\{0, 1, \dots, q - 2, q - 1\}$.

Osservazione 1.18. La codifica di un nodo K tramite una parola $\beta \in B_q$ non è univoca: in generale è possibile descrivere la stessa classe di equivalenza isotopica di K attraverso diverse parole di B_q , o addirittura attraverso parole appartenenti a diversi gruppi $B_q, B_{q'}$. Il nodo banale può essere descritto da $\star \in B_1$, $\sigma_0 \in B_2$, $\sigma_0\sigma_1 \in B_3$, $\sigma_1\sigma_0 \in B_3$, eccetera. Il minimo valore di q per cui esiste una treccia $\beta \in B_q$ la cui

chiusura è il nodo K è chiamato *indice di intrecciamento* di K . L'unico nodo con indice di intrecciamento uguale ad 1 è il nodo banale ad una componente.

Il seguente teorema espone un criterio necessario e sufficiente affinché due trecce abbiano come chiusure due nodi isotopicamente equivalenti.

Teorema 1.19 (di Markov). *Siano $\beta \in B_q, \beta' \in B_{q'}$ due trecce con $q \leq q'$. Vale $\widehat{\beta} \equiv \widehat{\beta}'$ se e solo se esiste una sequenza finita di trecce $\beta_0 = \beta, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n = \beta'$ tali che ogni β_{j+1} sia ottenuta da β_j tramite una delle seguenti trasformazioni:*

- (1) *isotopia di treccia: $\beta_{j+1} \simeq \beta_j$, ovvero β_{j+1} è ottenuta modificando β_j tramite le relazioni di Artin;*
- (2) *coniugio: $\beta_{j+1} = \delta\beta_j\delta^{-1}$ per qualche δ appartenente allo stesso gruppo di treccia di β_j, β_{j+1} ;*
- (3) *stabilizzazione: per $\beta_j \in B_r, \beta_{j+1} \in B_{r+1}$ vale $\beta_{j+1} = \beta_j\sigma_{r-1}$, essendo σ_{r-1} il generatore di B_{r+1} non appartenente a B_r .*

Ora abbiamo gli strumenti necessari ad enunciare e dimostrare il Teorema di Manturov annunciato all'inizio della sezione.

Teorema 1.20 (di Manturov). *Ogni nodo K ad una o più componenti è realizzabile a meno di equivalenza isotopica come chiusura di una treccia quasitorica.*

Poiché per il Teorema di Alexander ogni nodo è chiusura di una treccia β , bisogna modificare β in una treccia quasitorica la cui chiusura sia isotopicamente equivalente a K . Ci serviremo dei seguenti lemmi.

Lemma 1.21. *L'insieme delle trecce quasitoriche in B_q è un sottogruppo.*

Dimostrazione. Chiaramente la treccia banale è quasitorica (di lunghezza nulla), e la concatenazione di trecce quasitoriche è ancora una treccia quasitorica. Il punto cruciale è mostrare che l'inversa di una treccia quasitorica è equivalente ad una treccia quasitorica. Detta

β la treccia da invertire, avremo $\beta = \delta_0 \delta_1 \cdots \delta_{k-2} \delta_{k-1}$ dove ciascuna δ_j è una treccia quasitorica "breve", intendendo che è della forma $\sigma_0^{\pm 1} \cdots \sigma_{q-2}^{\pm 1}$. È quindi sufficiente mostrare che l'inversa di una treccia quasitorica breve δ è quasitorica. Per fare ciò, estendiamo δ ad una treccia $\eta = \eta_0 \eta_1 \cdots \eta_{q-2} \eta_{q-1}$ dove $\eta_0 := \delta$ e ciascuna η_j è una treccia quasitorica breve. Poiché η è composta da q trecce quasitoriche brevi, la permutazione associata ad η è la potenza q -esima della permutazione ciclica $(0, 1, \dots, q-2, q-1)^{-1} \in S_q$, quindi è banale.

Scegliendo opportunamente $\eta_1, \dots, \eta_{q-1}$ possiamo anche fare in modo che η sia la treccia banale: nel diagramma di δ esiste un unico arco che incrocia esattamente una volta tutti gli altri archi di δ ; chiamiamo a tale arco. Ora scegliamo le informazioni agli incroci di $\eta_1, \dots, \eta_{q-1}$ secondo questo criterio: se l'arco $b \neq a$ passa sopra (rispettivamente, sotto) ad a nel diagramma di δ , allora passa sopra (rispettivamente, sotto) ad a anche nei diagrammi di ciascun $\eta_j, j > 0$. Questa costruzione rende η equivalente alla treccia banale di B_q , e da ciò segue che $\eta_1 \cdots \eta_{q-1}$ è una treccia quasitorica inversa di δ . \square

Lemma 1.22. *Sia $\beta \in B_q$ una treccia pura quasitorica. Allora β è una treccia pura quasitorica in $B_{q+1} \supset B_q$.*

Dimostrazione. Per ipotesi β è quasitorica, quindi la permutazione ad essa associata è della forma $(0, 1, \dots, q-2, q-1)^{-p}$, e quest'ultima è banale se e solo se $p = qr$ per qualche r intero. Costruiamo ora la treccia torica $\tau_{p+r, q+1}$: poiché $p+r$ è multiplo di $q+1$, la treccia è pura e la sua chiusura è un nodo torico a $q+1$ componenti. Eliminando il $q+1$ -esimo arco di $\tau_{p+r, q+1}$ si ottiene, a meno di equivalenza, la treccia $\tau_{p, q}$ (ciò equivale a dire che eliminando una componente dal nodo $T_{p+r, q+1}$ si ottiene $T_{p, q}$ a meno di equivalenza isotopica). Possiamo dunque alterare l'informazione agli incroci di $\tau_{p+r, q+1}$ in modo che i primi q archi riproducano gli incroci del diagramma di β , ed imporre che il $q+1$ -esimo arco passi al di sotto di tutti gli altri. Il risultato è una treccia quasitorica in B_{q+1} equivalente a β . \square

Corollario 1.23. *Sia β una treccia pura quasitorica in B_q . Allora β è quasitorica in ogni $B_{q'} \supset B_q$.*

Dimostrazione. Costruendo la sequenza $B_q \subset B_{q+1} \subset \cdots \subset B_{q'-1} \subset B_{q'}$ si ha che β è quasitorica in ciascun B_j , $\forall q \leq j \leq q'$ e quindi in $B_{q'}$. \square

Lemma 1.24. *Ogni treccia pura è quasitorica.*

Dimostrazione. Il gruppo PB_q è generato dall'insieme delle parole $b_{j,h} = \sigma_h \sigma_{h-1} \cdots \sigma_{j+1} \sigma_j^2 \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{h-1}^{-1} \sigma_h^{-1} = (\sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{h-1}^{-1} \sigma_h^{-1})^{-1} (\sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{h-1}^{-1} \sigma_h^{-1})$, ciascuna delle quali è quasitorica in B_{h-j+2} (eventualmente rinominando gli indici dei vari σ_j ; si osservi anche che $(\sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{h-1}^{-1} \sigma_h^{-1})^{-1}$ è quasitorica perché inversa della treccia quasitorica $(\sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{h-1}^{-1} \sigma_h^{-1})$ e quindi anche in B_q . Di conseguenza ogni treccia pura, essendo concatenazione delle $b_{j,h}$, è a sua volta quasitorica in B_q . \square

Lemma 1.25. *Sia $\beta \in B_q$ una treccia. Allora per qualche $q' \geq q$ esiste una treccia $\beta' \in B_{q'}$ equivalente a β a meno di movimenti di Markov, e tale che la permutazione associata a β' è una potenza della permutazione ciclica $(0, 1, \dots, q' - 2, q' - 1) \in S_{q'}$.*

Dimostrazione. Sia $s \in S_q$ la permutazione associata a β , e si considerino le orbite degli elementi $0, 1, \dots, q - 2, q - 1$ sotto l'azione di s , ovvero i sottoinsiemi di $\{0, 1, \dots, q - 2, q - 1\}$ chiusi rispetto all'azione di s ; la restrizione di s a ciascuna di queste orbite è una permutazione ciclica. Le cardinalità di tali orbite caratterizzano s a meno di coniugio, dal momento che due permutazioni in S_q sono coniugate se e solo se sono esprimibili come prodotti di cicli disgiunti a due a due della stessa lunghezza. Possiamo quindi supporre, a meno di coniugio di s e di β , che s sia della forma $c_0 \circ c_1 \circ \cdots \circ c_{k-1}$ dove i vari c_j sono cicli a due a due disgiunti agenti sulle orbite di s , e che c_0 sia il ciclo di lunghezza minima fra quelli che compongono s , e ancora che $q - 1$ sia contenuto nell'orbita di s relativa a c_0 .

Ora, applicando a β il movimento di stabilizzazione di Markov si ottiene la nuova treccia $\beta\sigma_{q-1} \in B_{q+1}$, la cui permutazione associata è $(q-1, q) \circ s = (q-1, q) \circ c_0 \circ c_1 \circ \dots \circ c_{k-1}$. Poiché il ciclo c_0 contiene $q-1$, la composizione $(q-1, q) \circ c_0$ sarà ancora un ciclo, stavolta di lunghezza $\#c_0 + 1$.

Iterando più volte questi due movimenti di Markov, possiamo ottenere una permutazione s i cui cicli sono tutti della stessa lunghezza $\ell := \max\{\#c_0, \dots, \#c_{k-1}\}$. Se scegliamo $q' := k\ell$ e $s' := (0, 1, \dots, k\ell - 2, k\ell - 1)^k$ si può osservare che s' è composizione di k cicli di lunghezza ℓ , e quindi è coniugata ad s ; anche quest'ultimo passaggio da s ad s' si realizza per mezzo di un movimento di Markov sulla treccia β , che dà luogo alla treccia β' che soddisfa la tesi. \square

Lemma 1.26. *Sia $\beta \in B_q$ una treccia la cui permutazione associata è una potenza della permutazione ciclica $(1, 2, \dots, q-2, q-1)$. Allora β è quasitorica.*

Dimostrazione. Detta s la permutazione associata a β , sarà $s = (0, 1, \dots, q-2, q-1)^p$ per qualche p naturale. Allora la treccia $\beta' := \beta\tau_{p,q}$ è associata alla permutazione banale, cioè è pura. Avendo provato che le trecce pure sono quasitoriche, ne segue che $\beta = \beta'\tau_{p,q}^{-1}$ è quasitorica. \square

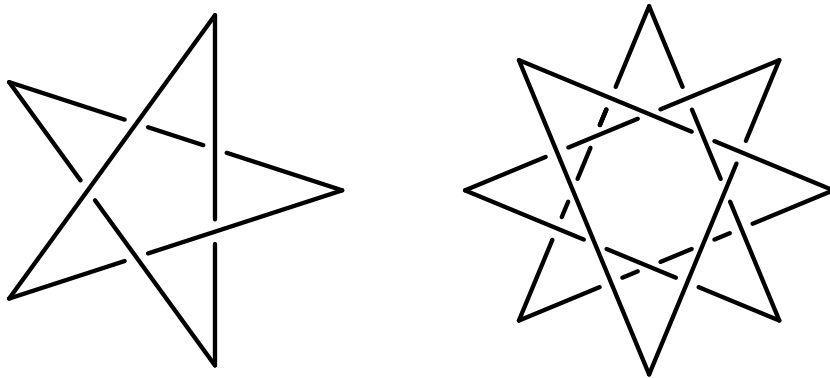
Dimostrazione. [del teorema di Manturov] Per il Teorema di Alexander esiste una treccia β la cui chiusura è isotopicamente equivalente al nodo K . Per i lemmi precedenti β è equivalente a meno di isotopia e di movimenti di Markov ad una treccia quasitorica, diciamo β' . Per il teorema di Markov vale $\widehat{\beta'} \equiv \widehat{\beta} \equiv K$. \square

In sostanza, il Teorema di Manturov asserisce che per ogni nodo K si può realizzare un diagramma analogo a quello di un nodo torico, eventualmente modificando solo l'informazione agli incroci. Inoltre, poiché l'insieme delle trecce quasitoriche in B_q è un gruppo, esistono trecce quasitoriche banali arbitrariamente lunghe, pertanto il numero p

di trecce quasitoriche brevi che compongono K può essere preso grande a piacere, ad esempio $p \geq q + 1$; quindi possiamo supporre che il diagramma del nodo sia la stella poligonale $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$.

Un'altra condizione che possiamo imporre è che sia p dispari: anche qui, è sufficiente concatenare una treccia quasitorica banale breve qualora il valore iniziale di p sia pari.

La figura mostra il nodo trifoglio realizzato come chiusura della treccia quasitorica $\sigma_0^4 \sigma_0^{-1} \in B_2$ (la treccia quasitorica σ_0^3 è stata concatenata alla parola banale $\sigma_0 \sigma_0^{-1}$ al fine di avere $p = 5 \geq 2q + 1 = 2 \times 2 + 1$) e il nodo a otto come chiusura di $(\sigma_0 \sigma_1^{-1})^2 (\sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1^{-1} \sigma_0^{-1} \sigma_1^{-1})^2 \in B_3$, dove sono state usate due copie della parola banale $\sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1^{-1} \sigma_0^{-1} \sigma_1^{-1}$ allo stesso scopo.



3. Le traiettorie biliardo

Dato un sottoinsieme $D \subset R^n$ limitato, chiuso regolare e connesso (relativamente alla topologia standard di R^n) con bordo ∂D regolare a pezzi, consideriamo la traiettoria di un punto materiale che si muove in D in maniera rettilinea uniforme con velocità unitaria; quando tale traiettoria incontra ∂D in un punto regolare, l'oggetto viene deviato secondo la legge degli specchi, ovvero secondo una riflessione rispetto alla normale a ∂D . La traccia di tale moto è chiamata *traiettoria biliardo* o *orbita*, e consiste in una curva parametrizzata α definita su

un intervallo aperto (che supporremo massimale rispetto all'inclusione) $I \subset \mathbb{R}, I \ni 0$ a valori in D a cui sono associati una successione strettamente crescente $T = \{t_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset I, T \not\equiv 0$ e un insieme di vettori $V = \{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset S^{n-1}$ con queste proprietà:

- (1) $\alpha(t) \in \partial D \Leftrightarrow \exists j$ tale che $t = t_j$;
- (2) $\alpha(t_j)$ è un punto regolare di ∂D per ogni j ;
- (3) $\alpha_{[t_j, t_{j+1}]}(t) = \alpha(t_j) + (t - t_j)v_j$;
- (4) detto n_j il versore normale a ∂D entrante in $\alpha(t_j)$, esiste $\lambda_j > 0$ tale che $v_j - v_{j-1} = \lambda_j n_j$.

Si osservi che dalla quarta clausola discende che la traccia di α interseca trasversalmente ∂D in un insieme numerabile di punti regolari di ∂D , infatti $\langle v_{j-1}, n_j \rangle = -\lambda_j < 0$, $\langle v_j, n_j \rangle = \lambda_j > 0 \forall j \in \mathbb{Z}$. Tali punti $\alpha(t_j)$ costituiscono i *vertici* della traiettoria, che spesso indicheremo con A_j . Le immagini $\alpha([t_j, t_{j+1}])$, in quanto segmenti rettilinei, prendono il nome di *lati* della traiettoria. Il sostegno di $\alpha(t)$ per valori $t \geq 0$ è detto *orbita futura*, mentre per $t \leq 0$ si parla di *orbita passata*.

A questo punto è lecito chiedersi se, dato un biliardo $D \subset R^n$ con le caratteristiche sopra citate, esistano una posizione ed una direzione iniziali $\alpha(0), \alpha'(0)$ tali che la traiettoria sia ben definita. Le condizioni affinché ciò avvenga è che i punti $\alpha(t_j)$ siano regolari in ∂D per ogni j , e che la traiettoria non intersechi ∂D tangenzialmente. Il prossimo risultato mostra come l'insieme delle coppie posizione-direzione non ammissibili sia a misura nulla in un opportuno spazio.

Teorema 1.27. *Sia $D \subset R^n$ limitato, chiuso regolare, connesso e con bordo regolare a pezzi. Allora l'insieme P delle coppie (p, v) tali che la traiettoria con condizioni iniziali $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$ non sia ben definita è a misura nulla in $D^\circ \times S^{n-1}$.*

Dimostrazione. Poiché ∂D è regolare a pezzi, l'insieme Σ dei suoi punti singolari è una unione finita di varietà con bordo $(n-2)$ -dimensionali. Per ogni $x \in \partial D \setminus \Sigma$ consideriamo l'insieme $B_x = \{(p, v) : p \in$

$(T_x \partial D \setminus \{x\}) \cap D^\circ, v = \frac{x-p}{\|x-p\|}$, che costituisce una sottovarietà $(n-1)$ -dimensionale di $D^\circ \times S^{n-1}$. Il fibrato B costituito dall'unione $\bigcup_{x \in \partial D \setminus \Sigma} B_x$ è una sottovarietà di dimensione $2n-2$, e quindi è a misura nulla in $D^\circ \times S^{n-1}$ (il quale ha dimensione $2n-1$).

Ora, per $x \in \Sigma$ costruiamo la sottovarietà n -dimensionale $C_x = \{(p, v) : p \in D^\circ \setminus \{x\}, v = \frac{x-p}{\|x-p\|}\}$ e l'unione $C = \bigcup_{x \in \Sigma} C_x$. Essendo Σ una unione finita di varietà $n-2$ -dimensionali che chiameremo $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{k-1}$, l'insieme C risulta essere unione finita dei fibrati $(2n-2)$ -dimensionali $\bigcup_{x \in \Sigma_0} C_x, \dots, \bigcup_{x \in \Sigma_{k-1}} C_x$, e come tale ha misura nulla in $D^\circ \times S^{n-1}$.

L'unione $P_0 = B \cup C$ è l'insieme delle coppie (p, v) non ammissibili la cui traiettoria raggiunge ∂D tangenzialmente o in un punto singolare senza avere precedentemente subito urti. Osserviamo che P_0 è a sua volta una unione finita di sottovarietà $(2n-2)$ -dimensionali (poiché B, C sono tali) e conseguentemente la sua misura è nulla in $D^\circ \times S^{n-1}$.

Per ogni $x \in \partial D \setminus \Sigma$ sia $r_x : R^n \rightarrow R^n$ la riflessione rispetto alla retta normale condotta in x a ∂D . A partire da P_0 costruiamo iterativamente la successione di insiemi P_j :

$$P'_j = P_j \cap ((\partial D \setminus \Sigma) \times S^{n-1})$$

$$P_{j+1} = \bigcup_{(x,w) \in P'_j} \{(p, v) : v = r_x(w), p \in D^\circ \cap (x + \mathbb{R}w)\}.$$

Proviamo per induzione che ciascun P_j è unione finita di sottovarietà immerse $(2n-2)$ -dimensionali di $D^\circ \times S^{n-1}$. Per $j=0$ tale asserzione è già verificata, essendo $P_0 = B \cup C$ unione finita di sottovarietà. Per quanto riguarda il passo induttivo, supponiamo che P_j sia unione finita di sottovarietà immerse $(2n-2)$ -dimensionali per un certo valore dell'indice j . Chiamiamo $\partial D_0, \dots, \partial D_{\ell-1}$ le componenti connesse di $\partial D \setminus \Sigma$, che come tali sono sottovarietà lisce di R^n ; di conseguenza, ciascuna delle funzioni $\partial D_h \rightarrow S^{n-1}$ che associa ad $x \in \partial D_h$ il versore normale n_x è di classe C^∞ . Possiamo allora spezzare P'_j come unione $\bigcup_{h=0}^{\ell-1} P'_{j,h} = \bigcup_{h=0}^{\ell-1} P_j \cap (\partial D_h \times S^{n-1})$ e quindi

$P_{j+1} = \bigcup_{h=0}^{\ell-1} \bigcup_{(x,w) \in P'_{j,h}} \{(p, v) : v = r_x(w), p \in D^\circ \cap (x + \mathbb{R}w)\}$, ottenendo, grazie all'ipotesi induttiva, una decomposizione di P_{j+1} in unione finita di sottovarietà immerse $(2n - 2)$ -dimensionali. In particolare, ogni P_j ha misura nulla in $D^\circ \times S^{n-1}$.

Questi P_j vanno interpretati come gli insiemi di coppie la cui traiettoria associata incontra ∂D tangenzialmente o in un punto singolare dopo esattamente j urti contro $\partial D \setminus \Sigma$. L'insieme di tutte le coppie (p, v) non ammissibili è allora l'unione $P = \bigcup_{j=0}^{\infty} P_j$, la quale essendo numerabile è anche a misura nulla in $D^\circ \times S^{n-1}$. \square

Se una traiettoria biliardo è periodica semplice, allora essa costituisce un nodo ad una componente: a prova di ciò è sufficiente costruire la mappa quoziente $\gamma = \alpha / \sim : S^1 \rightarrow D$, essendo τ il periodo di α , e \sim la relazione d'equivalenza su \mathbb{R} definita da $t \sim u \Leftrightarrow t \equiv u \pmod{\tau}$. Tale γ parametrizza il nodo.

I nodi realizzabili come traiettorie biliardo in $D \subset R^3$ prendono il nome di *nodi biliardo*. Con *nodo biliardo a più componenti* indicheremo l'unione disgiunta di più nodi biliardo realizzati nel medesimo biliardo D .

Relativamente a questi oggetti sorge il quesito su quali tipi di nodo sia possibile realizzare utilizzando un determinato biliardo $D \subset R^3$. Daniel Pecker ha dimostrato in [7] un risultato notevole:

Teorema 1.28. *Sia D un cilindro retto tridimensionale la cui base è delimitata da un'ellisse di eccentricità positiva. Allora ogni nodo docile (ad una o più componenti) si realizza a meno di isotopia come nodo biliardo (ad una o più componenti) in D .*

I risultati dei primi due capitoli di questa tesi sono necessari a raggiungere l'enunciato di Pecker.

Osservazione 1.29. Un generico cilindro retto è un solido della forma $B \times [0, h] \subset R^3$ con $B \subset R^2$ chiuso regolare, ∂B regolare a pezzi,

$h > 0$. Ne segue che anche ∂D è regolare a pezzi, e che le traiettorie ben definite $\alpha : I \rightarrow D$, eccetto quelle i cui lati sono ortogonali alla base B , possono essere proiettate su di essa mantenendo le caratteristiche che definiscono una traiettoria biliardo, a meno di riparametrizzazione. Detta $\pi : R^3 \rightarrow R^2$ la proiezione canonica, proviamo che $\beta(t) := \pi \circ \alpha(\frac{t}{c}) : cI \rightarrow B$ è una traiettoria biliardo per una opportuna scelta di $c > 0$. Affinché le direzioni v_j associate all'orbita di α non siano ortogonali a B è sufficiente che una sola di esse, ad esempio v_0 , soddisfi tale condizione, e cioè sia della forma $v_0 = w + \pi(v_0)$ con $w \neq (0, 0, \pm 1)$; conseguentemente, il versore v_1 sarà dato da $v_1 = w + \pi(v_1)$ qualora $\alpha(t_1) \in \partial B \times]0, h[$ o da $v_1 = -w + \pi(v_1)$ se $\alpha(t_1) \in B^\circ \times \{0, h\}$. Lo stesso ragionamento si può applicare a v_{-1} , ed induttivamente si vede che ogni v_j è della forma $\pm w + \pi(v_j)$, quindi non ortogonale a B . I vari $\pi(v_j)$ sono vettori non nulli di norma $\sqrt{1 - \|w\|^2}$, e il loro insieme contiene le direzioni ammesse da β , dal momento che $\pi \circ \alpha_{[t_j, t_{j+1}]}(t) = \pi \circ \alpha(t_j) + (t - t_j)\pi(v_j)$. Notiamo inoltre che $\alpha(t_j) \in \partial B \times (0, h) \Leftrightarrow \pi \circ \alpha(t_j) \in \partial B$, mentre per $\alpha(t_j) \in B^\circ \times \{0, h\}$ si ha $\pi(v_{j-1}) = \pi(v_j)$, dunque possiamo definire $c = \sqrt{1 - \|w\|^2}$ e gli insiemi $J := \{j \in \mathbb{Z} : \alpha(t_j) \in \partial B \times (0, h)\}$, $T' := \{ct_j : j \in J\}$, $V' := \{\frac{\pi(v_j)}{c} \in S^2 : j \in J\}$. Grazie a questa scelta di c si ha che $\beta(t)$ soddisfa le prime tre clausole che definiscono una traiettoria biliardo in B relativamente agli insiemi T', V' . Resta da provare che anche la quarta clausola è rispettata: preso $j \in J$ abbiamo $v_j - v_{j-1} = \lambda_j n_j \Rightarrow \pi(v_j) - \pi(v_{j-1}) = \lambda_j \pi(n_j)$, dove $\pi(n_j)$ coincide con n_j ed è il versore normale a $\partial B \subset R^2$ nel punto $\pi \circ \alpha(t_j)$, e infine $\frac{\pi(v_{j-1})}{c} - \frac{\pi(v_j)}{c} = \frac{\lambda_j}{c} n_j$, essendo $\frac{\pi(v_{j-1})}{c}$, $\frac{\pi(v_j)}{c}$ elementi di V' . Resta provato che $\beta(t)$ determina una traiettoria biliardo in B .

Di conseguenza, lo studio delle traiettorie in un cilindro D (che qui abbiamo supposto tridimensionale) richiede di classificare le traiettorie ammissibili rispetto alla sua base bidimensionale B . Nel prossimo capitolo si studierà in particolare il caso di B delimitata da una ellisse.

CAPITOLO 2

Ellissi e funzioni ellittiche

1. Le proprietà ottiche dell'ellisse

Le ellissi, essendo curve prive di singolarità che delimitano porzioni di piano strettamente convesse, danno luogo a biliardi particolarmente regolari. Infatti, qualsiasi traiettoria $\alpha(t)$ con dati iniziali $(\alpha(0), \alpha'(0)) \in B^\circ \times S^2$ è ben definita: in una forma più forte della proposizione 1.27, l'insieme delle coppie posizione-direzione per cui la traiettoria non è ben definita è vuoto. Per rendersene conto, basti ripercorrere i passi della dimostrazione del teorema 1.27 aggiungendo le ipotesi di D strettamente convesso e con bordo liscio.

Il caso più semplice che si possa affrontare è quello di un biliardo delimitato da una ellisse ad eccentricità nulla, ovvero da una circonferenza. La classificazione delle orbite all'interno di biliardi circolari è piuttosto povera; in primo luogo, osserviamo che tutte le circonferenze in R^2 sono equivalenti a meno di omotetia, e quindi tale classificazione si può esaurire considerando il solo biliardo delimitato dalla circonferenza unitaria S^1 , cioè disco unitario $B^2 = \{x \in R^2 : \|x\| \leq 1\}$.

Teorema 2.1. *Per ogni traiettoria in B^2 , la lunghezza dei lati è costante e determina la traiettoria a meno di rotazione di B^2 attorno all'origine.*

Dimostrazione. Data una traiettoria con vertici A_j , consideriamo due lati consecutivi $[A_0A_1], [A_1A_2]$. La riflessione che porta la retta A_0A_1 in quella A_1A_2 è una simmetria di B^2 che fissa A_1 , per cui l'immagine riflessa di A_0 appartiene ancora a S^1 , è distinta da A_1 , e giace sulla retta A_1A_2 ; in definitiva, coincide con A_2 . Ciò significa che i lati $[A_0A_1], [A_1A_2]$ sono isometricamente equivalenti. Induttivamente si

vede che tutti i lati della traiettoria sono congruenti al segmento $[A_0A_1]$; come corollario segue che il dominio I di della parametrizzazione può essere esteso a tutto l'insieme \mathbb{R} , poiché se supponiamo che $|[A_0A_1]| = \ell > 0$, allora devono valere le inclusioni $I \supset [t_0, t_1], I \supset [t_0 - \ell, t_0 + \ell], \dots, I \supset [t_0 - j\ell, t_1 + j\ell]$ per ogni j naturale, ed infine $I \supset \mathbb{R}$.

Siano ora date due traiettorie biliardo in B^2 i cui vertici sono etichettati rispettivamente con A_j, A'_j tali che $|[A_0A_1]| = |[A'_0A'_1]|$. Esistono due rotazioni ϱ_0, ϱ_1 di B^2 attorno all'origine che portano rispettivamente A'_0, A'_1 a coincidere con A_0 ; di queste rotazioni, almeno una (ed eventualmente entrambe, qualora i segmenti $[A_0A_1], [A'_0A'_1]$ siano diametri di B^2) sovrappone l'intero lato $[A'_0A'_1]$ ad $[A_0A_1]$. Sia ϱ tale rotazione. Se $\varrho = \varrho_0$, segue che $\varrho_0(A'_1) = A_1$ e quindi $\varrho_0(A'_j) = A_j \forall j \in \mathbb{Z}$, dal momento che le isometrie conservano la misura degli angoli; se invece è $\varrho = \varrho_1$, abbiamo $\varrho_1(A'_0) = A_1$ e $\varrho_1(A'_j) = A_{1-j}$, ancora per la stessa ragione. In definitiva, le traiettorie di vertici $A_j, \varrho(A'_j)$ coincidono. \square

Le orbite non contenenti il centro di S^1 presentano la proprietà di avere tutti i loro lati tangenti ad una curva C , detta *caustica*, che prende la forma di una circonferenza concentrica ad S^1 . In altre parole, se $[A_0A_1]$ è tangente ad una circonferenza C concentrica ad S^1 , tali saranno tutti gli altri lati della traiettoria: infatti la riflessione che porta $[A_0A_1]$ in $[A_1A_2]$ è anche una simmetria di C , per cui il punto di tangenza $[A_0A_1] \cap C$ ha come immagine $[A_1A_2] \cap C$, che sarà a sua volta punto di tangenza fra $[A_1A_2]$ e C . Allo stesso modo si vede che tutti i restanti lati sono tangenti a C .

Osserviamo anche che se una traiettoria in B^2 è chiusa ed ammette caustica C , allora tutte le traiettorie tangenti a C sono a loro volta chiuse. Questo è vero perché due orbite inscritte in S^1 e tangenti a C debbono avere i lati della stessa lunghezza, e per la proposizione precedente, coincidono a meno di una rotazione che conserva S^1 e C . Questo fatto è un'istanza particolarmente semplice del Teorema di chiusura di Poncelet, che fa riferimento ad una coppia generica di coniche.

Teorema 2.2 (di chiusura di Poncelet, o porismo di Poncelet). *Date*

due coniche contenute in R^2 , se esiste una poligonale chiusa i cui vertici giacciono sulla prima conica e i cui lati sono tangenti alla seconda, allora esistono infiniti archi poligonali con queste caratteristiche, ognuno con un vertice in corrispondenza di un punto qualsiasi della prima conica.

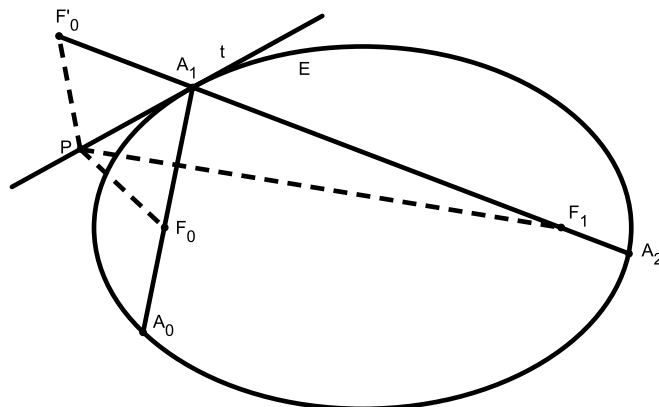
La dimostrazione che ne verrà fornita riguarderà in particolare due ellissi coassiali (essendo questo il caso utile alla proposizione di Pecker), ma può essere estesa ad una coppia di coniche qualsiasi. Prima di procedere in questo senso, andiamo ad analizzare le proprietà elementari delle traiettorie in un biliardo ellittico. Da questo punto in poi useremo una notazione semplificata per indicare la lunghezza di un segmento $[A_0A_1]$, la quale sarà denotata da A_0A_1 anziché $|[A_0A_1]|$.

Lemma 2.3. *Sia B un biliardo delimitato da una ellisse E con eccentricità positiva e fuochi F_0, F_1 . Se una traiettoria in B contiene uno dei fuochi, allora ogni lato della traiettoria contiene alternativamente F_0, F_1 .*

Dimostrazione. È sufficiente provare che se un lato, ad esempio $[A_0A_1]$, contiene F_0 , allora i lati ad esso consecutivi $[A_{-1}A_0], [A_1A_2]$ contengono F_1 . Sia t la retta tangente ad E in A_1 , e sia F'_0 il punto ottenuto riflettendo F_0 rispetto a t . Se P è un punto su tale retta, distinto da A_1 , allora deve essere esterno alla ellisse, da cui segue questa catena di disuguaglianze: $F'_0P + PF_1 = F_0P + PF_1 > F_0A_1 + A_1F_1 = F'_0A_1 + A_1F_1$. Questo implica che A_1 è il punto di intersezione fra la retta tangente e il segmento F'_0F_1 ; se per assurdo tale punto di intersezione fosse un certo P distinto da A_1 , allora sussisterebbe la disuguaglianza $F'_0F_1 = F'_0P + PF_1 > F'_0A_1 + A_1F_1$, che contrasta con la disuguaglianza triangolare $F'_0F_1 \leq F'_0A_1 + A_1F_1$.

Valgono allora le uguaglianze fra angoli (che s'intendono acuti) $\widehat{A_2A_1t} = \widehat{A_0A_1t}$ (per costruzione della traiettoria biliardo) $= \widehat{F_0A_1t} = \widehat{F'_0A_1t} = \widehat{F_1A_1t}$ (per allineamento dei punti F'_0, A_1, F_1) $\Rightarrow \widehat{A_2A_1t} = \widehat{F_1A_1t}$, e i punti A_1, F_1, A_2 sono allineati. Una analoga costruzione prova che $[A_2A_3]$ passa per F_0 , e così tutti i lati $[A_jA_{j+1}]$ conterranno per

F_0 se j è pari, F_1 se j è dispari.



□

Conseguenza di questo lemma è la non esistenza della caustica per le traiettorie che contengono i fuochi, essendo i lati della traiettoria concorrenti in due punti. Vediamo invece come la caustica si possa costruire qualora la traiettoria non contenga i fuochi.

Lemma 2.4. *Sia B un biliardo delimitato da una ellisse E con eccentricità positiva e fuochi F_0, F_1 , e sia data una traiettoria in B non contenente i fuochi. Possono darsi due casi:*

- (1) *se la traiettoria interseca il segmento aperto (F_0F_1) , allora tutti i lati incidono (F_0F_1) e giacciono su rette tangenti o asintotiche ad una iperbole confocale ad E ;*
- (2) *se un lato non interseca il segmento $[F_0F_1]$, allora tutti i lati sono disgiunti da $[F_0F_1]$ e tangenti ad una ellisse confocale ad E .*

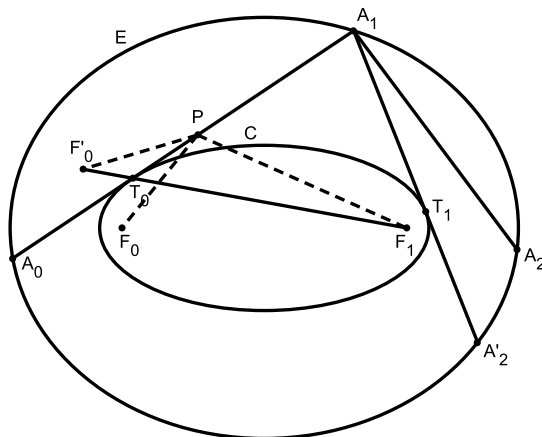
Dimostrazione. Sia $[A_0A_1]$ un lato della traiettoria incidente con (F_0F_1) ; osserviamo che (A_0A_1) è contenuto nella parte interna dell'angolo $\widehat{F_0A_1F_1}$. Per il lemma 2.3 si ha che la riflessione rispetto alla normale ad E in A_1 porta la retta F_0A_1 in F_1A_1 , e quindi l'angolo $\widehat{F_0A_1F_1}$ in se stesso. Poiché (A_0A_1) è contenuto in $\text{Int } \widehat{F_0A_1F_1}$, la sua immagine ed il lato aperto (A_1A_2) sono a loro volta contenuti in

Int $\widehat{F_0A_1F_1}$, e di conseguenza $[A_1A_2]$ interseca (F_0F_1) . Induttivamente, ogni lato della traiettoria incide (F_0F_1) .

Viceversa, sia $[A_0A_1]$ un lato che non interseca $[F_0F_1]$; allora anche $[A_1A_2]$ è disgiunto da $[F_0F_1]$, perché se per assurdo $[A_1A_2]$ incidesse (F_0F_1) allora avremmo che ogni lato (compreso quindi $[A_0A_1]$) lo inciderebbe; e se $[A_1A_2]$ contenesse uno dei fuochi, ogni lato conterrebbe un fuoco. Di conseguenza tutti i lati della traiettoria sono disgiunti da $[F_0F_1]$.

Costruiamo ora la caustica nel caso di una traiettoria che non interseca il segmento focale, definendo innanzi tutto il punto F'_0 come l'immagine riflessa di F_0 rispetto alla retta A_0A_1 , e T_0 come l'intersezione fra $[A_0A_1]$ e $[F'_0F_1]$. Prendiamo quindi C come l'ellisse di fuochi F_0, F_1 passante per T_0 , e proviamo che in effetti è la caustica per la traiettoria considerata. Grazie a questa costruzione, C e la retta A_0A_1 sono tangenti, poiché se si prende un generico punto P distinto da T_0 su tale retta allora deve sussistere la disuguaglianza triangolare stretta $F'_0P + PF_1 > F'_0F_1$, da cui $F_0P + PF_1 > F_0T_0 + T_0F_1$, e quindi P è esterno alla ellisse. Proviamo ora che C è tangente anche agli altri lati della traiettoria. Sia $A_1A'_2$ la seconda retta tangente a C per A_1 (la prima retta tangente è A_0A_1) con $A'_2 \in E$, sia T_1 il punto di tangenza, e sia F'_1 il punto ottenuto dalla riflessione di F_1 rispetto ad $A_1A'_2$; per il lemma 2.3, i punti F_0, T_1, F'_1 sono allineati. Esaminiamo i triangoli $F'_0A_1F_1, F_0A_1F'_1$: i loro lati sono a due a due congruenti, poiché i segmenti $[F'_0A_1], [F'_1A_1]$ sono ottenuti tramite riflessione di $[F_0A_1], [F_1A_1]$, ed inoltre vale $F'_0F_1 = F_0T_0 + T_0F_1 = F_0T_1 + T_1F_1 = F_0F'_1$. I triangoli considerati sono quindi congruenti, e danno luogo alla coppia di angoli $\widehat{F'_0A_1F_1} \cong \widehat{F_0A_1F'_1}$. Ne segue che $\widehat{A_0A_1F_0} \cong \widehat{A'_2A_1F_1}$, e quindi la riflessione che porta la retta F_0A_1 a sovrapporsi ad F_1A_1 (ovvero la riflessione rispetto alla normale ad E in A_1 , come segue dal lemma 2.3) porta anche A_0A_1 in $A_1A'_2$. Ma la retta A_1A_2 è per costruzione ottenuta dalla riflessione di A_0A_1 rispetto alla normale, dunque deve essere $A_1A_2 \equiv A_1A'_2$ e infine $[A_1A_2] \equiv [A_1A'_2]$. Con questo è provato

che $[A_1A_2]$ è tangente in T_1 alla caustica C .



L'analogo risultato per le traiettorie che intersecano internamente il segmento focale si produce definendo la caustica come l'iperbole di fuochi F_0, F_1 passante per il punto T_0 dato dall'intersezione fra la retta A_0A_1 e la retta $F_0'F_1$, essendo F_0' il riflesso di F_0 rispetto ad A_0A_1 ; qualora A_0A_1 sia parallela ad $F_0'F_1$, si prende A_0A_1 come asintoto dell'iperbole. Il caso in cui esiste T_0 si può trattare con lo stesso metodo utilizzato per la caustica ellittica, purché si tenga conto che anche per le iperboli vale la proprietà per cui, data una retta tangente alla curva, il punto di tangenza è allineato con un fuoco e con il riflesso del secondo fuoco rispetto alla retta. Se invece A_0A_1 è asintoto di C , una simile analisi prova che la traiettoria possiede quattro lati, di cui due lati giacenti sugli asintoti e due tangenti ai vertici di C . \square

Osservazione 2.5. Due lati consecutivi $[A_0A_1], [A_1A_2]$ di una traiettoria biliardo coincidono se e solo se entrambi giacciono sulla normale condotta in A_1 al bordo del biliardo. Se il biliardo è ellittico i lati sono anche tangenti alla caustica C , quindi coincidono se e solo se esiste ed è unica la tangente condotta in A_1 a C , cioè quando $A_1 \in C$. Questo caso si verifica solo quando C è una iperbole, dal momento che due ellissi confocali sono sempre disgiunte. Ciò dimostra che le traiettorie in un biliardo ellittico formano spezzate non semplici se e solo se intersecano

il segmento focale e possiedono un vertice in un punto di intersezione di $E \cap C$.

Incidentalmente, questa è anche una dimostrazione del fatto che una ellisse ed una iperbole confocali si intersecano ortogonalmente.

Corollario 2.6. *Siano date una ellisse E , una conica confocale C ed una poligonale (eventualmente aperta) i cui vertici giacciono su E e i cui lati giacciono su rette tangenti a C . Allora tale poligonale è una traiettoria rispetto al biliardo delimitato da E .*

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui C sia una ellisse contenuta nel biliardo delimitato da E . Detti $[A_0A_1], [A_1A_2]$ due lati consecutivi della poligonale, si ha che essi non intersecano il segmento focale di E poiché sono tangenti alla ellisse confocale C . In particolare, questi due segmenti non giacciono sulla normale in A_1 ad E . Sia $A_1A'_2$ la retta ottenuta per riflessione di A_0A_1 rispetto a tale normale: per il lemma 2.4 e per l'osservazione 2.5 si ha che $A_1A'_2$ è tangente a C e distinta da A_0A_1 , e quindi coincide con A_1A_2 . Di conseguenza la spezzata $A_0A_1A_2$ è contenuta in una traiettoria biliardo. \square

Al fine di costruire i nodi biliardo nel cilindro di base ellittica B ci serviremo di traiettorie chiuse semplici in B . È facile vedere che le traiettorie di questo tipo non possono contenere i fuochi della ellisse (infatti l'unica traiettoria chiusa che contiene almeno un fuoco giace interamente sull'asse focale, e non è una traiettoria semplice), quindi ha senso definire l'indice di allacciamento rispetto ad uno dei fuochi, ad esempio F_0 .

Se la traiettoria chiusa interseca il segmento focale aperto (F_0F_1) , allora tutti i lati sono incidenti a (F_0F_1) , e di conseguenza l'intera traiettoria è contenuta in $R^2 \setminus s_0$, essendo s_0 la semiretta chiusa staccata da F_0 sull'asse focale e non contenente F_1 . Poiché $R^2 \setminus s_0$ è un insieme semplicemente connesso che non contiene F_0 , l'indice di allacciamento della traiettoria rispetto ad F_0 è nullo.

Ammettendo invece che i lati siano disgiunti da $[F_0F_1]$, è possibile

costruire diverse traiettorie chiuse semplici con indice di allacciamento positivo.

Teorema 2.7. *Sia B un biliardo delimitato da una ellisse E , e siano p, q interi positivi primi fra loro tali che $p \geq 2q+1$. Allora esiste almeno una traiettoria chiusa semplice in B che ammette p vertici distinti e indice di allacciamento rispetto a ciascun fuoco uguale a q .*

La dimostrazione si basa su questo risultato intermedio:

Lemma 2.8. *Siano A_0, A_2 punti (eventualmente coincidenti) su una ellisse E . Se la funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}, f(X) = A_0X + XA_2$ assume un massimo locale in $A_1 \in E$, allora A_1 è distinto da A_0, A_2 e dà luogo ad una spezzata $A_0A_1A_2$ contenuta in una traiettoria biliardo.*

Dimostrazione. In primo luogo, vediamo che A_0, A_2 non possono costituire massimi locali per la funzione f : infatti per ogni $X \in E$ vale la disuguaglianza triangolare $A_0X + XA_2 \geq A_0A_2$, con il segno di uguaglianza se e solo se X coincide con A_0 o A_2 , essendo questi punti gli unici elementi di intersezione di E col segmento (eventualmente degenerare ad un singolo punto) $[A_0A_2]$. Di conseguenza i punti di massimo per la funzione f , quale ad esempio A_1 , devono essere distinti da A_0, A_2 . Questi punti di massimo esistono grazie al teorema di Weierstrass, essendo E un insieme compatto ed f una funzione continua da E in \mathbb{R} . Osserviamo inoltre che f è differenziabile nella sottovarietà liscia $E \setminus \{A_0, A_2\}$.

Queste considerazioni ci permettono di concludere che un punto di massimo A_1 ammette in E un intorno in cui la funzione f è differenziabile. Supponiamo allora che un tale intorno sia un arco parametrizzato da $X(t) : J \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ tale che $J \ni 0, X(0) = A_1$; ciò significa che la funzione $f \circ X(t) : J \rightarrow \mathbb{R}$ assume la forma $\|X(t) - A_0\| + \|X(t) - A_2\|$ e possiede un massimo locale in $t = 0$. Per il teorema dei punti stazionari di Fermat sarà $\frac{d}{dt} f \circ X(t)|_{t=0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\langle X(t) - A_0, X(t) - A_0 \rangle} + \sqrt{\langle X(t) - A_2, X(t) - A_2 \rangle} \right) \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \frac{\langle X(0) - A_0, X'(0) \rangle}{\|X(0) - A_0\|} + \frac{\langle X(0) - A_2, X'(0) \rangle}{\|X(0) - A_2\|} = 0 \Rightarrow \left\langle \left(\frac{A_1 - A_0}{\|A_1 - A_0\|} + \frac{A_1 - A_2}{\|A_1 - A_2\|} \right), X'(0) \right\rangle$.

Il vettore $X'(0)$ è tangente ad E in A_1 , quindi la somma di versori $\frac{A_1-A_0}{\|A_1-A_0\|} + \frac{A_1-A_2}{\|A_1-A_2\|}$ è parallela alla normale ad E in A_1 , per cui A_1 è vertice di una traiettoria biliardo passante per A_0, A_1, A_2 . \square

L'enunciato del teorema si può generalizzare sostituendo ad E una qualsiasi curva differenziabile chiusa, e prendendo A_0, A_2 due punti generici, non necessariamente appartenenti alla curva stessa. Di ciò ci possiamo rendere convinti osservando che la dimostrazione non fa uso delle ipotesi sulla forma ellittica di E e sulla appartenenza di A_0, A_2 ad E .

Utilizzando questo lemma, proviamo ora il teorema 2.7.

Dimostrazione. Sia $A_0 \in E$ fissato. Costruiamo l'insieme compatto $\Theta = \{(\theta_0, \dots, \theta_{p-1}) \in [0, \pi]^p : \sum_{j=0}^{p-1} \theta_j = 2q\pi\}$, e ad ogni suo elemento associamo la p -pla di punti A_0, \dots, A_{p-1} descritta dalle relazioni $\widehat{A_j F_0 A_{j+1}} = \theta_j, 0 \leq j \leq p-1$, tenendo conto che ciascun $\widehat{A_j F_0 A_{j+1}}$ deve essere orientato in maniera positiva (cioè la retta $F_0 A_j$ deve essere ruotata dell'angolo θ_j in senso antiorario per essere sovrapposta ad $F_0 A_{j+1}$). Per semplicità poniamo anche $A_p = A_0$, secondo l'usuale convenzione. La funzione $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}, f(\theta_1, \dots, \theta_p) := \sum_{j=0}^{p-1} A_j A_{j+1}$ è continua sul compatto Θ , quindi per il teorema di Weierstrass assume massimo. Grazie al lemma 2.8, ciascuna terna di punti A_{j-1}, A_j, A_{j+1} è non degenera e dà luogo ad una spezzata contenuta in una traiettoria biliardo. Concatenando queste spezzate si ha il poligono $A_0 A_1 \dots A_{p-1} A_0$, che a sua volta è una traiettoria biliardo con p vertici giacenti su E . Questa orbita non interseca internamente il segmento focale, altrimenti il suo indice di allacciamento rispetto ad F_0 sarebbe nullo, in contrasto con la costruzione secondo cui $\sum_{j=0}^{p-1} \theta_j = 2q\pi$; inoltre non contiene i fuochi, perché nel caso in cui ogni lato contenesse un singolo fuoco l'orbita non sarebbe chiusa, mentre se i lati passassero per entrambi i fuochi avremmo $\theta_j = \pi \forall j \Rightarrow p\pi = \sum_{j=0}^{p-1} \theta_j = 2q\pi$, che è assurdo per l'ipotesi $p \geq 2q+1$. Di conseguenza, la traiettoria è disgiunta da $[F_0 F_1]$ e il suo indice di allacciamento rispetto ad F_0 è uguale a q . Infine, i vertici distinti della traiettoria sono esattamente p , perché se esistesse

$0 < p' < p$ tale che $A_{p'} = A_0$ allora ne conseguirebbe che:

$$(1) A_j = A_{j+p'} \quad \forall j \text{ e quindi } p = p'r \text{ per qualche intero } r > 1;$$

$$(2) \sum_{j=0}^{p'-1} \theta_j = 2q'\pi \text{ per qualche intero positivo } q';$$

da cui $2q\pi = \sum_{j=0}^{p-1} \theta_j = 2 \sum_{j=0}^{p'-1} \theta_j = 2q'r\pi \Rightarrow q = q'r$ e quindi p, q possiedono il divisore comune $r > 1$, che è assurdo avendo supposto p, q primi fra loro. \square

Quest'ultimo risultato ci permette quindi di costruire traiettorie con un numero di vertici ed indice di allacciamento fissati (purché rispettino le condizioni $p \geq 2q + 1$, $\text{MCD}(p, q) = 1$). Una tale traiettoria è isotopicamente equivalente alla stella poligonale $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$.

2. Le funzioni ellittiche di Jacobi e il Teorema di Poncelet

Definizione 2.9. Sia $0 < k < 1$ un parametro fissato, o modulo ellittico; si definisce la funzione amplitudine di Jacobi come l'inversa rispetto a φ dell'integrale ellittico

$$z = F(\varphi, k) := \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$$

Essa viene indicata come $\varphi = \text{am}(z, k)$, o più brevemente come $\varphi = \text{am}(z)$.

Definizione 2.10. Si dicono seno amplitudine, coseno amplitudine, delta amplitudine le funzioni $\text{sn}(z, k) := \sin(\text{am}(z, k))$, $\text{cn}(z, k) := \cos(\text{am}(z, k))$, $\text{dn}(z, k) := \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(z, k)}$, chiamate collettivamente funzioni ellittiche di Jacobi. Anche in questo caso si possono usare le notazioni abbreviate $\text{sn}(z)$, $\text{cn}(z)$, $\text{dn}(z)$.

Le funzioni ellittiche possono essere estese a funzioni meromorfe (vedi [1]), e possiedono due periodi, di cui uno reale ed uno immaginario puro; essi sono sottomultipli interi delle quantità $4K(k) := F(2\pi, k)$ e $4iK'(k) := 4iK(\sqrt{1 - k^2}) = F(2\pi, \sqrt{1 - k^2})$ (in particolare vale $2\pi = \text{am}(4K(k))$ per ogni valore del modulo ellittico k). I valori esatti dei periodi sono $4K, 2iK'$ per il seno amplitudine, $4K, 4iK'$ per il coseno amplitudine, e $2K, 4iK'$ per la delta amplitudine.

In quanto funzioni meromorfe periodiche, le funzioni ellittiche devono necessariamente presentare poli al finito: se per assurdo questi poli non esistessero, le funzioni sarebbero olomorfe in tutto \mathbb{C} e limitate, quindi costanti per il teorema di Liouville. L'insieme dei poli è lo stesso per tutte e tre le funzioni, ed è composto dai punti della forma iK' (mod $2K, 2iK'$).

Se ristrette agli intervalli reali $[-K, K]$, $[0, 2K]$, $[0, 2K]$ rispettivamente, le funzioni ellittiche sono invertibili con inverse $\operatorname{arcsn}(z, k)$, $\operatorname{arccn}(z, k)$, $\operatorname{arcdn}(z, k)$. Valgono le seguenti formule di addizione:

$$\begin{aligned} c \operatorname{sn}(x + y) &= \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y + \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y} \\ \operatorname{cn}(x + y) &= \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} y - \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}. \end{aligned}$$

Per calcolare i valori di queste funzioni su argomenti complessi è quindi sufficiente utilizzare le formule di addizione e tenere presenti le relazioni

$$\operatorname{sn}(iz, k) = i \frac{\operatorname{sn}(z, \sqrt{1 - k^2})}{\operatorname{cn}(z, \sqrt{1 - k^2})}, \operatorname{cn}(iz) = \frac{1}{\operatorname{cn}(z, \sqrt{1 - k^2})}$$

per $z \in \mathbb{R}$.

Infine, vale la seguente formula dovuta a Jacobi:

$$\sin(\operatorname{am}(x + y) + \operatorname{am}(x - y)) = \frac{2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} y}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}$$

Lemma 2.11. *Siano E, C ellissi coassiali parametrizzate da $A(z) = (a \operatorname{cn}(z), b \operatorname{sn}(z))$ e da $T(z) = (\operatorname{cn} z, \operatorname{sn} z)$, sotto le condizioni $a > b > 1, k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 1}}$. Allora la retta tangente a C in $T(z)$ interseca E nei punti $A(z - \operatorname{arccn} \frac{1}{a})$ ed $A(z + \operatorname{arccn} \frac{1}{a})$*

Dimostrazione. La retta tangente a C nel punto $T(z)$ ha equazione $x \operatorname{cn} z + y \operatorname{sn} z - 1 = 0$; è sufficiente provare che le coordinate dei punti $A(z \pm \operatorname{arccn} \frac{1}{a})$ soddisfano questa equazione per provare che essi appartengono alla retta. Poniamo $u := \operatorname{arccn} \frac{1}{a}$, da cui

$\operatorname{cn} u = \frac{1}{a}$, $\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{b}{a}$; inseriamo questi valori nell'espressione $a \operatorname{cn}(z \pm u) \operatorname{cn} z + b \operatorname{sn}(z \pm u) \operatorname{sn} z - 1 = 0$, ottenendo grazie alle formule di addizione:

$$a \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} u \mp \operatorname{sn} z \operatorname{sn} u \operatorname{dn} z \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 u} \operatorname{cn} z + \\ + b \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \pm \operatorname{sn} u \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 u} \operatorname{sn} z - 1 = 0$$

che vogliamo mostrare essere una identità. Dopo aver eliminato il minimo comune denominatore, l'uguaglianza diviene:

$$\operatorname{cn}^2 z \mp b \operatorname{sn} z \operatorname{sn} u \operatorname{dn} z \operatorname{cn} z + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sn}^2 z \pm b \operatorname{sn} u \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z \operatorname{sn} z - 1 + \\ + k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 u = 0 \\ \operatorname{cn}^2 z + \operatorname{sn}^2 z \operatorname{dn}^2 u - 1 + k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 u = 0 \\ \operatorname{cn}^2 z + \operatorname{sn}^2 z (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) - 1 + k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 u = 0 \\ \operatorname{cn}^2 z + \operatorname{sn}^2 z - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 u - 1 + k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 u = 0 \\ \operatorname{cn}^2 z + \operatorname{sn}^2 z - 1 = 0 \\ \cos^2(\operatorname{am} z) + \sin^2(\operatorname{am} z) - 1 = 0$$

che sussiste per ogni valore di z . \square

Osservazione 2.12. A meno di affinità di R^2 , ogni coppia di ellissi coassiali disgiunte può essere espressa nella stessa forma di E, C così come appaiono nel lemma. Conseguentemente, per ogni coppia di ellissi coassiali disgiunte parametrizzate da $A(z) = (a \operatorname{cn} z, b \operatorname{sn} z)$, $T(z) = (a' \operatorname{cn} z, b' \operatorname{sn} z)$ esiste $u > 0$ tale che la retta tangente a C in $T(z)$ interseca E in $A(z \pm u)$.

Ora possiamo passare alla dimostrazione del teorema di Poncelet nel caso di una coppia di ellissi coassiali.

Dimostrazione. Siano E, C ellissi coassiali tali che esista una poligonale di Poncelet chiusa inscritta in E e circoscritta a C . Detti $A_0, \dots, A_{p-1} \in E$ i vertici della poligonale (secondo l'usuale convenzione $A_p = A_0$) e $T_j = C \cap [A_j A_{j+1}]$ i punti di tangenza, esiste

$u > 0$ tale che la tangente a C in $T_0 = T(z_0)$ interseca E nei punti $A_0 = A(z_0 - u)$, $A_1 = A(z_0 + u)$. Dunque il successivo punto di tangenza T_1 è parametrizzato da $T(z_0 + 2u)$, e il vertice A_2 da $A(z_0 + 3u)$; induttivamente, si ha $T_j = T(z_0 + 2ju)$, $A_j = A(z_0 + (2j - 1)u)$. Poichè la poligonale è chiusa, dev'essere $A_p = A_0 \Leftrightarrow A(z_0 - u + 2pu) = A(z_0 - u) \Leftrightarrow \text{am}(z_0 - u + 2pu) = \text{am}(z_0 - u) + 2q\pi$ per qualche intero positivo q (incidentalmente, si può osservare che esso uguaglia l'indice di allacciamento della poligonale rispetto a qualsiasi punto interno a C , ad esempio uno dei fuochi). Quest'ultima condizione si traduce in $\text{am}(z_0 - u + 2pu) = \text{am}(z_0 - u) + 2q\pi = \text{am}(z_0 - u + 4qK) \Leftrightarrow 2pu = 4qK \Leftrightarrow u = \frac{2qK}{p}$.

Se ora consideriamo una poligonale che parte da un vertice generico $A'_0 = A(z'_0 - u) \in C$, abbiamo nuovamente $A'_p = A(z'_0 - u + 2pu) = A(z'_0 - u + 4qK) = A(z'_0 - u) = A'_0$, quindi la spezzata si chiude dopo p passi e costituisce una poligonale di Poncelet. \square

Chiaramente questa proposizione si applica anche al caso più particolare di due ellissi E, C confocali, le cui poligonali di Poncelet sono anche traiettorie biliardo relativamente al biliardo delimitato da E . Possiamo quindi enunciare il Teorema di Poncelet in una forma più ristretta: date in R^2 due ellissi confocali E, C , se esiste una traiettoria biliardo chiusa con vertici in E e lati tangenti a C , allora esistono infinite traiettorie di questo tipo, ognuna con un vertice in corrispondenza di un punto qualsiasi di E . Per brevità chiameremo *traiettorie di Poncelet* questi particolari oggetti, i quali presentano caratteristiche sia delle poligonali di Poncelet sia delle traiettorie biliardo.

Nel prossimo capitolo dimostreremo alcuni risultati volti a trovare, in questa infinità di poligonali, almeno una traiettoria con delle particolari caratteristiche di irregolarità che ci serviranno per costruire qualsiasi nodo biliardo.

Il Teorema di Pecker

1. Poligonali di Poncelet completamente irregolari

Definizione 3.1. *Sia data una poligonale (eventualmente intrecciata) parametrizzata secondo il parametro arco a partire da un vertice A_0 . Diremo che essa è completamente irregolare se 1 e le lunghezze d'arco relative ai vertici (escluso A_0) e alle autointersezioni sono linearmente indipendenti su \mathbb{Q} .*

Per determinare l'esistenza di traiettorie di Poncelet completamente irregolari avremo bisogno di alcuni lemmi tecnici.

Lemma 3.2. *Siano p, q interi positivi primi fra loro, p dispari; per j intero e $r^2 > 0$ definiamo le funzioni $f_j(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_j(z) := \operatorname{sn}^2(z + jv) + r^2$, dove $v := \frac{4qK}{p}$. Allora, se $h \not\equiv j \pmod{p}$, le funzioni $f_j(z), f_h(z)$ non hanno zeri in comune.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione a valori complessi $\operatorname{sn} z + ir, r > 0$. Ricordando che la funzione seno amplitudine assume tutti i valori di $i\mathbb{R}$ al variare dell'argomento z in $i\mathbb{R}$, deve esistere un immaginario puro $\alpha \neq 0$ tale che $\operatorname{sn} \alpha + ir = 0$; poiché $\operatorname{sn}(2K - \alpha) = \operatorname{sn} \alpha$, il valore $2K - \alpha$ è un altro zero di $\operatorname{sn} z + ir$. Per la periodicità del seno amplitudine, l'insieme degli zeri è composto dai complessi congrui ad $\alpha \pmod{4K, 2iK'}, 2K - \alpha \pmod{4K, 2iK'}$. Osserviamo che la funzione $\operatorname{sn} z - ir = -(\operatorname{sn}(-z) + ir)$ possiede zeri congrui ad $-\alpha \pmod{4K, 2iK'}, 2K + \alpha \pmod{4K, 2iK'}$; esprimendo $f_j(z)$ come $(\operatorname{sn}(z + jv) + ir)(\operatorname{sn}(z + jv) - ir)$ si vede che i suoi zeri sono tutti e soli i valori congrui a $\pm\alpha - jv \pmod{4K, 2iK'}, 2K \pm \alpha - jv \pmod{4K, 2iK'}$, o più sinteticamente $\pm\alpha - jv \pmod{2K, 2iK'}$.

Sia ora $h \not\equiv j \pmod{p}$. Se per assurdo due zeri di $f_j(z), f_h(z)$

coincidessero, essi sarebbero congrui rispettivamente a $\pm\alpha - jv, \pm\alpha - hv$ (mod $2K, 2iK'$), quindi varrebbe una delle congruenze $\pm\alpha - jv \equiv \pm\alpha - hv$ (mod $2K, 2iK'$). Prendendo le parti reali di entrambi i membri si avrebbe $-jv \equiv -hv$ (mod $2K$), cioè $2jq \equiv 2hq$ (mod p), che è impossibile essendo p, q coprimi, j, h incongrui modulo p e p dispari. \square

Lemma 3.3. *Siano p, q interi coprimi, p dispari. Per $j \not\equiv 0 \pmod{p}$ siano definite le funzioni a valori complessi*

$$D_j(z) = \operatorname{sn}(z + jv) \operatorname{cn} z - \operatorname{cn}(z + jv) \operatorname{sn} z, \quad F_j(z) = \frac{\operatorname{sn}(z + jv) - \operatorname{sn} z}{D_j(z)}$$

dove $v := \frac{4qK}{p}$. Allora esiste un numero complesso α_j tale che $F_h(\alpha_j) \neq \infty \Leftrightarrow h \not\equiv j \pmod{p}$.

Dimostrazione. Utilizzando la formula di addizione del seno circolare vediamo che $D_j(z) = \sin(\operatorname{am}(z + jv) + \operatorname{am}(-z))$, e ancora, per la formula di Jacobi:

$$D_j(z) = \frac{2 \operatorname{sn}(ju) \operatorname{cn}(ju) \operatorname{dn}(z + ju)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(ju) \operatorname{sn}^2(z + ju)}$$

dove $u := \frac{v}{2} = \frac{2qK}{p}$. Poniamo $\alpha_j = -ju + K + iK'$; valgono $\operatorname{sn}^2(\alpha_j + ju) = \operatorname{sn}^2(K + iK') = \frac{1}{k^2}$, come si verifica utilizzando la formula di addizione del seno amplitudine, e $\operatorname{dn}(\alpha_j + ju) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K + iK')} = 0$. Questo significa che α_j è uno zero per $D_j(z)$ (si osservi che il denominatore di $D_j(z)$ si riduce a $1 - \operatorname{sn}^2(ju)$, e non si annulla grazie all'ipotesi $j \not\equiv 0 \pmod{p}$) e una singolarità di tipo polo o eliminabile per $F_j(z)$.

Il numeratore di $F_j(\alpha_j)$ è $\operatorname{sn}(\alpha_j + jv) - \operatorname{sn} \alpha_j = \operatorname{sn}(K + iK' + ju) - \operatorname{sn}(K + iK' - ju)$, che per la formula di addizione del seno amplitudine diviene:

$$\frac{2 \operatorname{sn}(K + iK') \operatorname{cn}(ju) \operatorname{dn}(ju)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K + iK') \operatorname{sn}^2(ju)} = \frac{2 \operatorname{dn}(ju)}{k \operatorname{cn}(ju)} \neq 0$$

quindi la singolarità di $F_j(z)$ in α_j è un polo. Allo stesso modo si prova che α_j è un polo di $F_h(z)$ per $h \equiv j \pmod{p}$, grazie alla periodicità delle funzioni ellittiche.

Sia ora $h \not\equiv j \pmod{p}$, da cui $\alpha_j + hu = K + iK' + (h - j)u \Rightarrow \alpha_j + hu \not\equiv K + iK' \pmod{2K, 2iK'} \Rightarrow \alpha_j + hu \not\equiv iK' \pmod{2K, 2iK'}$.

Ne segue che $\operatorname{dn}(\alpha_j + hu) \neq 0$ e che $\operatorname{sn}^2(\alpha_j + hu)$ assume valore finito, quindi $D_h(\alpha_j) \neq 0$. Ora, il numeratore di $F_h(\alpha_j)$ è finito, poiché tali sono $\operatorname{sn}(\alpha_j + hv)$ e $\operatorname{sn}(\alpha_j)$: per rendersene conto, si consideri che i poli di $\operatorname{sn}(z + hv)$ sono congrui a $iK' - hv \pmod{2K, 2iK'}$, però $\alpha_j \not\equiv iK' - hv \pmod{2K, 2iK'}$ poiché p è dispari; allo stesso modo, $\operatorname{sn} z$ ha poli in $iK' \pmod{2K, 2iK'}$, ma $\alpha_j \not\equiv iK' \pmod{2K, 2iK'}$. Di conseguenza, $F_h(\alpha_j)$ assume valore finito. \square

Osservazione 3.4. Quest'ultimo lemma continua a valere anche senza l'ipotesi di p dispari, ma la dimostrazione va modificata provando che $F_h(\alpha_j)$ è finito anche se $\operatorname{sn} \alpha_j$ oppure $\operatorname{sn}(\alpha_j + hv)$ divergono (casi che possono verificarsi qualora p sia pari). Ai fini della nostra trattazione è sufficiente il caso p dispari.

Il significato del lemma è che, dato un insieme di funzioni $F_j(z)$ definite come sopra e con indici fra loro incongrui modulo p , allora ciascuna di esse presenta almeno un polo che è punto regolare per le altre: insomma un polo che le appartiene in maniera esclusiva.

Da questi lemmi si ricava il seguente risultato di esistenza per i poligoni di Poncelet completamente irregolari con un numero dispari di vertici.

Teorema 3.5. *Siano E, C ellissi coassiali ad eccentricità positiva che ammettono una poligonale di Poncelet con un numero dispari di vertici. Allora E, C ammettono una poligonale di Poncelet completamente irregolare.*

Dimostrazione. A meno di omotetia possiamo supporre che uno dei semiassi di C sia uguale ad 1; siano quindi E, C descritte dalle equazioni $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x^2 + \frac{y^2}{c^2} = 1$, con $a > b > 1, c < 1$; siano inoltre p il numero di vertici della poligonale e q l'indice di allacciamento della poligonale rispetto ad uno dei fuochi di C ; vale $\operatorname{MCD}(p, q) = 1, p \geq 2q + 1$. Consideriamo le parametrizzazioni di E, C tramite le funzioni $A(z) = (a \operatorname{cn} z, b \operatorname{sn} z)$, $T(z) = (\operatorname{cn} z, c \operatorname{sn} z)$ per un valore fissato del modulo ellittico k , e poniamo $v := \frac{4qK}{p}$. Ad ogni valore fissato di z , diciamo

z_0 , sia associata la poligonale di Poncelet tangente in $T_0 := T(z_0)$ a C . Se denotiamo $z_j := z_0 + jv, j = 0, \dots, p-1$ si ha che gli altri punti di tangenza sono dati da $T_j := T(z_j)$, e i vertici della poligonale da $A_j := A(z_j - \frac{v}{2})$ (vedi dimostrazione del Teorema di Poncelet). Anche qui utilizziamo la convenzione $A_p = A_0$.

Ciascuna delle rette $A_j A_{j+1}$ è tangente a C in T_j , quindi ha equazione:

$$x \operatorname{cn} z_j + y \frac{c \operatorname{sn} z_j}{c^2} = 1.$$

Poniamo infine $Q_{j,h} := A_j A_{j+1} \cap A_h A_{h+1}$ per $h \not\equiv j \pmod{p}$. L'insieme dei $Q_{j,h}$ al variare di $h \not\equiv j \pmod{p}$ contiene i punti notevoli della poligonale, cioè le sue autointersezioni e i suoi vertici (in particolare contiene tutti e soli i punti notevoli quando $p = 2q + 1$, ma in generale possiede degli elementi aggiuntivi che cadono al di fuori di E). Le coordinate di $Q_{j,h}$ possono essere calcolate risolvendo il sistema

$$\begin{cases} xc \operatorname{cn} z_j + y \operatorname{sn} z_j = c \\ xc \operatorname{cn} z_h + y \operatorname{sn} z_h = c \end{cases}$$

da cui si ottiene che il valore dell'ascissa $x_{j,h}$ uguaglia $F_{h-j}(z_j)$, essendo F_{h-j} definita come nel lemma 3.3. Conoscendo le ascisse $x_{j,h}, x_j$ dei punti $Q_{j,h}, A_j$ è possibile computare la distanza $\ell_{j,h} := A_j Q_{j,h}$, dove $\ell_{j,h}$ è la seguente funzione a valori complessi di z_0 :

$$\ell_{j,h}(z_0) = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\operatorname{sn} z_j} \sqrt{\operatorname{sn}^2 z_j + \frac{c^2}{1-c^2}} (x_j - x_{j,h}).$$

che può essere estesa in maniera meromorfa in un intorno dell'asse reale.

In primo luogo proviamo che le funzioni $1, \ell_{j,h}(z)$ con $h \not\equiv j \pmod{p}, h \not\equiv j-1 \pmod{p}$ sono linearmente indipendenti su \mathbb{C} : prendiamo quindi delle costanti complesse $\lambda, \lambda_{j,h}$ che verificano l'uguaglianza

$$\lambda + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{h=j+1}^{p+j-2} \lambda_{j,h} \ell_{j,h}(z) \equiv 0$$

e dimostriamo che debbono essere tutte nulle. L'espressione si può riscrivere nella forma

$$(3.1) \quad \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\sqrt{1-c^2}}{\operatorname{sn} z_j} \sqrt{\operatorname{sn}^2 z_j + \frac{c^2}{1-c^2}} \left(\sum_{h=j+1}^{p+j-2} \lambda_{j,h} (x_j - x_{j,h}) \right) \equiv -\lambda$$

dove la quantità $\frac{c^2}{1-c^2}$ è positiva e può quindi essere posta uguale a r^2 come nel lemma 3.2: di conseguenza, le funzioni $f_j(z) = \operatorname{sn}^2 z_j + \frac{c^2}{1-c^2}$, $j = 0, \dots, p-1$ non hanno zeri in comune. In un intorno di uno zero di $\sqrt{f_j(z)}$, le funzioni $\sqrt{f_h(z)}$, $h \not\equiv j \pmod{p}$ sono quindi meromorfe, ma $\sqrt{f_j(z)}$ non lo è; ne consegue che il primo membro dell'uguaglianza 3.1 può essere una funzione meromorfa ed uguagliare $-\lambda$ solo se ciascun termine $\sum_{h=j+1}^{p+j-2} \lambda_{j,h} (x_j - x_{j,h})$ è nullo, ovvero se

$$\sum_{h=j+1}^{p+j-2} \lambda_{j,h} (F_{j-1}(z) - F_{h-j}(z)) \equiv 0 \quad \forall j.$$

Per il lemma 3.3 ciascuna delle funzioni $F_{h-j}(z)$ possiede un polo che non appartiene alle altre F con indice differente, quindi l'intera somma $\sum_{h=j+1}^{p+j-2} \lambda_{j,h} (F_{j-1}(z) - F_{h-j}(z))$ può essere identicamente nulla solo per $\lambda_{j,h} = 0$, altrimenti presenterebbe essa stessa dei poli. È così provato che $\lambda_{j,h} = 0 \quad \forall j = 0, \dots, p-1, h = j+1, \dots, p+j-2$, e contemporaneamente $\lambda = 0$.

Ora è possibile dimostrare che fissando opportunamente $z_0 \in \mathbb{R}$, l'indipendenza lineare delle quantità (stavolta costanti) $1, \ell_{j,h}$ è garantita anche su \mathbb{Q} . Fissiamo una stringa di coefficienti razionali non tutti nulli $\Lambda = (\lambda, \lambda_{j,h})$ e costruiamo la funzione a valori complessi

$$F_\Lambda(z) := \lambda + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{h=j+1}^{p+j-2} \lambda_{j,h} \ell_{j,h}(z).$$

Per la prima parte della dimostrazione, questa funzione è non identicamente nulla e meromorfa in un intorno di \mathbb{R} , quindi l'insieme dei suoi zeri in tale intorno è al più numerabile, e in particolare l'insieme degli zeri reali (che chiameremo Z_Λ) è al più numerabile. L'unione dei vari Z_Λ al variare della stringa Λ è ancora un insieme numerabile, poiché Λ assume solo valori razionali. Di conseguenza, l'insieme complementare

$\mathbb{R} \setminus \cup_{\Lambda} Z_{\Lambda}$ ha la potenza del continuo ed è a misura piena in \mathbb{R} , quindi non è vuoto. Scegliendo $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \cup_{\Lambda} Z_{\Lambda}$ segue che le quantità $1, \ell_{j,h}(z_0)$ sono linearmente indipendenti su \mathbb{Q} .

Infine, scelto $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \cup_{\Lambda} Z_{\Lambda}$, parametrizziamo la poligonale secondo il parametro arco tramite una funzione $\beta(t)$ tale che $\beta(0) = A_0$. Osserviamo che ciascuna autointersezione della traiettoria, essendo un punto doppio, ammette due diverse lunghezze d'arco in questa parametrizzazione. Possiamo quindi assegnare ai punti di autointersezione della forma $Q_{j,h}$ due valori $t_{j,h} < t'_{j,h}$ tali che $\beta(t_{j,h}) = \beta(t'_{j,h}) = Q_{j,h}$. Supponendo che sia $j < h$ (questa richiesta è legittima poiché $Q_{j,h} = Q_{h,j}$) abbiamo le seguenti formule per $t_{j,h}, t'_{j,h}$: $t_{j,h} = \sum_{m=0}^{j-1} \ell_{m,m+1} + \ell_{h,j}$, $t'_{j,h} = \sum_{m=0}^{h-1} \ell_{m,m+1} + \ell_{h,j}$, per cui l'indipendenza lineare di $1, \ell_{j,h}$ su \mathbb{Q} implica l'indipendenza di $1, t_{j,h}, t'_{j,h}$. La poligonale di Poncelet così determinata è quindi completamente irregolare. \square

Osservazione 3.6. La dimostrazione di questo teorema non fa riferimento all'ipotesi per cui l'unione dei lati $[A_0A_1], \dots, [A_{p-1}A_0]$ sia effettivamente una poligonale. Anche ammettendo che p, q possano avere fattori comuni non banali (nel qual caso avremo una unione di poligonali in numero uguale a $\text{MCD}(p, q)$, e q assumerà il significato di somma degli indici di intrecciamento delle poligonali), la costruzione dei punti $Q_{j,h}$ rimane invariata e le quantità $1, \ell_{j,h}$ continuano ad essere linearmente indipendenti su \mathbb{Q} . L'unica differenza rispetto al caso esaminato nel teorema è la necessità di parametrizzare separatamente le varie poligonali; ma anche qui l'indipendenza lineare di $1, \ell_{j,h}$ implica l'indipendenza di 1 e delle lunghezze d'arco dei punti notevoli di ciascuna poligonale.

Questa considerazione ci servirà per provare l'enunciato di Pecker per i nodi a più componenti, i cui diagrammi costruiti come chiusure di trecce quasitoriche sono unioni finite di poligonali di Poncelet.

Osservazione 3.7. La lunghezza totale di una poligonale di Poncelet (anche una non completamente irregolare) relativa alle ellissi E, C si

può calcolare come $\sum_{m=0}^{p-1} \ell_{m,m+1}(z_0) =: \ell(z_0)$, essendo $T(z_0)$ il punto di tangenza iniziale. Se si aggiunge l'ipotesi di E, C confocali, la funzione $\ell(z)$ diviene costante rispetto al variare di z in \mathbb{R} . La verifica di questo fatto è piuttosto lunga, ma concettualmente molto semplice: ciascuna delle $\ell_{j,h}(z)$ è meromorfa in un intorno di \mathbb{R} , quindi $\ell(z)$ è derivabile se ristretta ad \mathbb{R} ; calcolando la derivata di $\ell(z)$, si trova che essa è identicamente nulla, quindi $\ell(z)$ è costante. Questa proprietà costituisce l'enunciato del teorema di Graves.

2. Il teorema di Pecker

In questa sezione dimostreremo l'enunciato di Pecker facendo ricorso ai risultati preliminari esposti finora. Utilizzeremo anche il seguente teorema di densità di Kronecker:

Teorema 3.8. *Siano t_0, \dots, t_{s-1} numeri reali tali che $1, t_0, \dots, t_{s-1}$ sono linearmente indipendenti su \mathbb{Q} , allora la successione di punti $\{(kt_0 \pmod{1}, \dots, kt_{p-1} \pmod{1})\}_{k \in \mathbb{N}}$ è densa nel cubo unitario $[0, 1]^s$.*

Corollario 3.9. *Sia $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ l'onda triangolare definita da $\left| \left(2t + \frac{1}{2}\right) \pmod{2} - 1 \right|$, e siano t_0, \dots, t_{s-1} reali tali che $1, t_0, \dots, t_{s-1}$ sono linearmente indipendenti su \mathbb{Q} . Allora la successione $\{(\varphi(kt_0), \dots, \varphi(kt_{s-1}))\}_{k \in \mathbb{N}}$ è densa nel cubo unitario $[0, 1]^s$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Kronecker, la successione $\{(kt_j \pmod{1})_{j=0}^{s-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è densa in $[0, 1]^s$, quindi applicando un'affinità ai valori $kt_j \pmod{1}$ si ha che $\{((2kt_j + \frac{1}{2}) \pmod{2} - 1)_{j=0}^{s-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è densa in $[-1, 1]^s$. In particolare, la scelta degli indici k per cui vale $(2kt_j + \frac{1}{2}) \pmod{2} - 1 \geq 0 \forall j$ dà luogo ad una sottosuccessione densa in $[0, 1]^s$. A maggior ragione, quindi, $\{(\varphi(kt_j))_{j=0}^{s-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è densa in $[0, 1]^s$. \square

Teorema 3.10. *Sia $D = B \times [0, 1]$ un cilindro retto tridimensionale la cui base B è delimitata da un'ellisse di eccentricità positiva. Allora ogni nodo docile (ad una o più componenti) $K \subset R^3$ si realizza a meno di isotopia come nodo biliardo (ad una o più componenti) in D .*

Dimostrazione. Per il teorema di Manturov, esiste un nodo isotopicamente equivalente a K il cui diagramma è unione finita di traiettorie biliardo in B tangenti ad una ellisse C confocale ad $E = \partial B$. Detti p il numero di vertici del diagramma e q la somma degli indici di allacciamento delle traiettorie rispetto ad uno dei fuochi di E , possiamo supporre p dispari.

Per il teorema di Graves tutte le poligonali hanno la stessa lunghezza, quindi applicando una omotetia su B possiamo fare in modo abbiano tutte lunghezza unitaria, e conseguentemente parametrizzarle secondo le mappe $\beta_r : [0, 1] \rightarrow B$, $0 \leq r \leq m-1$, essendo $m = \text{MCD}(p, q)$ il numero di tali poligonali.

Dette $t_{j,h,r}, t'_{j,h,s}$ le lunghezze d'arco dei punti notevoli $Q_{j,h}$ (osserviamo che r, s possono essere diversi qualora $Q_{j,h}$ sia intersezione di due diverse traiettorie β_r, β_s), per il teorema 3.5 è possibile scegliere le poligonali in modo che $1, t_{j,h,r}, t'_{j,h,s}$ siano linearmente indipendenti su \mathbb{Q} . Usiamo la convenzione per cui $t_{j,r}$ sta ad indicare la lunghezza d'arco relativa al vertice A_j della traiettoria β_r .

Costruiamo le spezzate contenute in D con parametrizzazioni $\alpha_{r,k}(t) := (\beta_r(t), \varphi(kt))$ dove $\varphi(kt)$ è l'onda triangolare $\lfloor (2kt + \frac{1}{2}) \pmod{2} - 1 \rfloor$. Se k viene scelto in modo che $0 < \varphi(kt_{j,r}) < 1$ per ogni j (come vedremo a breve, ciò è sempre possibile), allora i sostegni delle varie $\alpha_{r,k}(t)$ sono traiettorie biliardo in D , infatti possono essere parametrizzati secondo il parametro arco considerando $\alpha_{r,k} \left(\frac{t}{\sqrt{1+4k^2}} \right)$, $t \in [0, \sqrt{1+4k^2}]$ (ciò può essere visto come il viceversa della proprietà enunciata nell'osservazione 1.29: non solo la proiezione di una traiettoria biliardo in un cilindro retto è ancora una traiettoria biliardo nella base, ma una traiettoria nella base può essere "sollevata" per ottenere una traiettoria nel cilindro; questo processo però non è univoco, come si vede ad esempio dalla scelta arbitraria dell'onda triangolare $\varphi(kt)$, con l'unica condizione $0 < \varphi(kt_{j,r}) < 1$).

Ciascuna $\alpha_{r,k}(t)$ è periodica, infatti $\varphi(kt)$ e $\beta_r(t)$ sono periodiche

rispettivamente di periodo $\frac{1}{k}$ ed 1, per cui il minimo comune multiplo è 1. I sostegni delle $\alpha_{r,k}$ sono quindi spezzate chiuse, ma non necessariamente semplici: può infatti accadere che in corrispondenza di un incrocio $Q_{j,h}$ appartenente ad una sola traiettoria β_r le ascisse curvilinee $t_{j,h,r}, t'_{j,h,r}$ diano luogo all'uguaglianza $\varphi(kt_{j,h,r}) = \varphi(kt'_{j,h,r})$, poiché l'onda triangolare non è iniettiva sull'intervallo $[0, 1]$. La condizione necessaria affinché ciascuna di tali spezzate sia un nodo è data da $\varphi(kt_{j,h,r}) \neq \varphi(kt'_{j,h,r})$.

In secondo luogo i sostegni delle $\alpha_{r,k}$ devono essere disgiunti perché la loro unione sia un nodo a più componenti. Ciò si verifica se $\varphi(kt_{j,h,r}) \neq \varphi(kt_{j,h,s}), \varphi(kt'_{j,h,r}) \neq \varphi(kt_{j,h,s}), \varphi(kt_{j,h,r}) \neq \varphi(kt'_{j,h,s}), \varphi(kt'_{j,h,r}) \neq \varphi(kt'_{j,h,s}) \forall r \neq s$.

Infine, l'unione dei sostegni è isotopicamente equivalente a K se e solo se i rispettivi diagrammi possiedono la stessa informazione agli incroci: cioè deve essere possibile decidere quale delle due disuguaglianze $\varphi(kt_{j,h,r}) \geq \varphi(kt'_{j,h,s})$ è valida.

Allora costruiamo una stringa di valori fissati $\Phi = (\bar{\varphi}_{j,r}, \bar{\varphi}_{j,h,r}, \bar{\varphi}'_{j,h,r}) \in [0, 1]^c$ (con c scelto opportunamente) tali che sono soddisfatte tutte le seguenti condizioni:

- (1) $0 < \bar{\varphi}_{j,r} < 1 \forall j, r$;
- (2) $\bar{\varphi}_{j,h,r} \neq \bar{\varphi}'_{j,h,r} \forall j, h, r$;
- (3) $\bar{\varphi}_{j,h,r} \neq \bar{\varphi}_{j,h,s} \forall j, h, \forall r \neq s$;
- (4) $\bar{\varphi}'_{j,h,r} \neq \bar{\varphi}_{j,h,s} \forall j, h, \forall r \neq s$;
- (5) $\bar{\varphi}_{j,h,r} \neq \bar{\varphi}'_{j,h,s} \forall j, h, \forall r \neq s$;
- (6) $\bar{\varphi}'_{j,h,r} \neq \bar{\varphi}'_{j,h,s} \forall j, h, \forall r \neq s$;
- (7) $\bar{\varphi}_{j,h,r} \geq \bar{\varphi}'_{j,h,s}$ a seconda dell'informazione che il diagramma di K fornisce riguardo l'incrocio in $Q_{j,h}$.

Per il corollario al teorema di Kronecker, la successione $\{\varphi(kt_{j,h,r})\}_{k \in \mathbb{N}}$ è densa in $[0, 1]^s$, quindi al variare di k la quantità $\|\varphi(kt_{j,h,r}) - \Phi\|$ può essere resa piccola a piacere. Scegliendo $\varepsilon := \frac{1}{2} \min\{|\varphi - \psi| : \varphi, \psi \in \Phi, \varphi \neq \psi\}$, esiste k tale che $\|\varphi(kt_{j,h,r}) - \Phi\| < \varepsilon$, e di conseguenza i valori di $\varphi(kt_{j,h}), \varphi(kt_{j,h,r}), \varphi(kt'_{j,h,r})$ soddisfano le stesse disuguaglianze

(1)-(7). Grazie a questa scelta di k l'unione dei supporti $\cup_{r=0}^{m-1} \alpha_{r,k}[0, 1]$ è un nodo poligonale ad m componenti il cui diagramma coincide con diagramma di K , comprese le informazioni sugli incroci. In questo modo abbiamo costruito in nodo biliardo in D isotopicamente equivalente a K . \square

Bibliografia

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York, 1964.
- [2] N. Bedaride, *Periodic billiard trajectories in polyhedra*, Forum Geometricorum 8 (2008), p. 107-120.
- [3] G. Galperin, D. Zvonkine, *Periodic billiard trajectories in right triangles and right-angled tetrahedra*, Regular and Chaotic Dynamics 8, n. 1 (2003), p. 29-44.
- [4] V.F.R. Jones, J.H. Przytycki, *Lissajous knots and billiard knots*, Banach Center Publications 42 (1998), Polish Academy of Sciences Institute of Mathematics, Varsovia, p.145-163.
- [5] P.-V. Koseleff, D. Pecker, *Every knot is a billiard knot*, preprint, 2011.
- [6] V.O. Manturov, *Knot theory*, Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
- [7] D. Pecker, *Poncelet theorem and billiard knots*, Geometriae Dedicata 161 (2012), p. 323-333.