UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA

DEFORMAZIONE DI CURVE PIANE SECONDO LA CURVATURA

Tesi di Laurea Compilativa in Curve e Superfici

Relatore:
Prof. Riccardo Piergallini

Laureando:
Andrea Malavolta

Anno accademico 2002-2003

a Marta, a Monia e ai miei Genitori,

per il loro straordinario sostegno.

Indice

Introduzione

La fisica, ma più ancora l'esperienza comune, ci insegna che un corpo sufficientemente omogeneo e con temperature diverse agli estremi, se lasciato libero, tende, dopo un tempo finito, a raggiungere una temperatura uniforme.

Il fenomeno che sta alla base di un tale evento va sotto il nome di diffusione del calore; il calore, forma di energia in transito, passa dalle zone più calde del corpo a quelle più fredde, determinando così un livellamento della temperatura.

La legge che descrive il processo diffusivo del calore, ad esempio lungo la direzione x, è una equazione differenziale alle derivate parziali di tipo parabolico, che si può scrivere nella forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dove t è il tempo e $u = u(t, x)$ la temperatura.

Analogamente al caso fisico, se deformiamo una curva convessa lungo il vettore curvatura otteniamo un livellamento della curvatura. Una curva convessa avrà inizialmente punti con curvatura maggiore rispetto ad altri; se la deformiamo proporzionalmente alla curvatura, è naturale che la curva si deformi di più nei punti a curvatura maggiore e meno negli altri punti. E' anche abbastanza naturale attendersi che dopo un tempo finito, la curvatura sarà la stessa in tutti i punti. In altre parole, si verifica un processo diffusivo della curvatura analogo a quello del calore nel caso fisico.

In questo lavoro ci proponiamo di studiare la deformazione di curve piane secondo il vettore curvatura, seguendo l'impostazione data da M. Gage e R. S. Hamilton negli articoli [4] e [7]. M. Gage ha esteso lo studio di questo processo al caso di curve su superfici, ad esempio negli articoli [5] e [6].

L'idea di partenza è la seguente: Sia C curva piana e $F = F(s) = x(s), y(s))$ parametrizzazione di C; assumiamo che C sia chiusa, regolare e di classe C^2.

Per ogni punto della curva possiamo definire il versore tangente T e il versore normale N in modo da formare una base ortonormale positiva di R^2. Inoltre è definito in ogni punto il vettore curvatura K, il cui modulo con segno rappresenta la curvatura della curva nel punto.
L'idea è quella di deformare la curva in ogni punto lungo la direzione normale e proporzionalmente alla curvatura.
Otterremo così una famiglia di curve $F : S^1 \times [0, T)$ dipendente da due parametri: uno, l'ascissa curvilinea s, che parametrizza la curva, l'altro, il parametro t, che indica quale istante del processo di deformazione stiamo considerando. La famiglia F dovrà soddisfare la seguente legge di evoluzione:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = kN$$

che in componenti si scrive:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

Cercheremo di stabilire quale può essere la curva limite di questo processo dopo un certo istante di tempo e quali proprietà della curva iniziale si mantengono inalterate durante la deformazione.
Particolare importanza riveste la scelta della curva iniziale:

- La regolarità della curva iniziale permette di definire i versori tangenti e normale in maniera univoca.

- La scelta di considerare curve chiuse permette di collegare il problema della deformazione a quello dell'evoluzione delle regioni piane delimitate dalle curve.

- La scelta di considerare curve di classe C^2 garantisce la continuità della funzione curvatura e altri risultati di regolarità.

Vedremo comunque che la scelta di prendere curve convesse, fatta nell'ultimo capitolo, sarà determinante per ottenere risultati di un certo rilievo.

La struttura della tesi è la seguente:

- Nel primo capitolo riprenderemo alcuni concetti basilari relativi a curve piane tra cui le definizioni di curva topologica, di curva differenziabile, di parametrizzazione di una curva, di riferimento di Frenet e di curvatura. Inoltre definiremo il concetto di lunghezza di curve piane e dimostreremo alcuni risultati relativi all'area di domini piani regolari. Infine tratteremo molto brevemente, soprattutto in funzione dei capitoli successivi, di rotazione e curvatura totale, di cerchio e parabola osculatori.

- Nel secondo capitolo entreremo nel vivo del problema e studieremo il processo di deformazione per curve piane con le restrizioni di cui sopra; il punto di riferimento principale sarà [7]. Non otterremo risultati eclatanti e questo ci spingerà a introdurre un'altra limitazione sulla curva iniziale.

- Nel terzo ed ultimo capitolo analizzeremo il caso particolare di una curva convessa e questa ulteriore condizione garantirà una serie di risultati notevoli, assolutamente inaspettati nel capitolo due; i punti di riferimento saranno [4] e [7]. Dimostreremo che la famiglia di curve, in accordo al nostro processo di deformazione, non solo converge, in maniera anche piuttosto "forte", ad una circonferenza, ma lo fa in maniera assolutamente "regolare", nel senso che non sviluppa nel tempo alcun tipo di singolarità (quali ad esempio spigoli o punti angolosi).

Capitolo 1

Curve differenziabili di R^2

1.1 Introduzione

In questo capitolo definiremo il concetto di curva differenziabile regolare piana, di riferimento di Frenet e di curvatura; inoltre dimostreremo alcune proprietà relative alla lunghezza di curve piane e all'area di regioni di piano delimitate da curve chiuse.

Conveniamo di indicare con $\langle \cdot , \cdot \rangle$ l'usuale prodotto scalare tra vettori e con il simbolo "'", accanto ad una funzione f di una variabile, la derivata di f.

1.2 Curve topologiche astratte

In questa sezione definiamo la nozione di curva topologica e classifichiamo le curve topologiche connesse.

Definizione 1.2.1. *Una varietà topologica di dimensione m (m-varietà topologica) è uno spazio topologico M con le seguenti proprietà:*

- *M è di Hausdorff e II-numerabile.*
- *M è localmente euclideo, cioè per ogni punto P di M esiste $U \subseteq M$ intorno aperto di P ed esiste $\varphi : U \longrightarrow R^m$ omeomorfismo su $\varphi(U)$.*

Osservazioni

1. La coppia (U, φ) si dice carta locale di M centrata in P.

2. $\forall P \in M$ è possibile trovare una carta (U, φ) tale che $\varphi(U) = R^m$ e $\varphi(P) = 0$; in tal caso (U, φ) si dice carta locale speciale centrata in P.

3. M localmente euclideo implica che $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, con $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ carta locale per ogni $\alpha \in A$; la collezione $V = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ si dice atlante di M.

Definizione 1.2.2. *Una curva topologica M è una 1-varietà topologica.*

Assumiamo che la curva M sia uno spazio topologico connesso e ci proponiamo di individuare le classi in cui la relazione di equivalenza definita da $\cong$, cioè l'omeomorfismo tra spazi topologici, divide l'insieme di tutte le curve connesse.

Teorema 1.2.3 (Classificazione delle curve topologiche connesse). *M è una curva topologica connessa se e solo se $M \cong R$ oppure $M \cong S^1$.*

Dimostrazione

Si può dimostrare (ma qui omettiamo tutti i dettagli) che se M è una curva topologica, allora esiste $S = \{S_n\}_{n \geq 1}$, ricoprimento locale numerabile di M (segmentazione), tale che:

- $\forall n \geq 1 \ \exists \ h_n : [0, 1] \longrightarrow S_n$ omeomorfismo.

- $S_{n_1} \cap S_{n_2} = \emptyset$ o al più S_{n_1} e S_{n_2} hanno un estremo in comune per ogni $n_1 \neq n_2$.

Per quanto detto, data una curva topologica M, esiste una segmentazione S di M tale che ogni vertice di S è estremo di due segmenti e quindi possiamo rinumerare gli elementi di S in modo che $S_{n_i} \cap S_{n_{i+1}} \neq \emptyset \ \forall i \in Z$.
Consideriamo allora l'applicazione $k_i : [i, i+1] \longrightarrow S_{n_i}$ tale che $k_i(i+1) = k_{i+1}(i)$; k_i è un omeomorfismo per ogni $i \in Z$ e quindi $k = \bigcup_{i \in Z} k_i : R \longrightarrow M$ è:

- un omeomorfismo se M non è compatto (e in tal caso $M \cong R$).
- un rivestimento se M è compatto (e in tal caso $M \cong S^1$).

Per ogni curva C possiamo considerare quindi l'omeomorfismo f che lega C a R o ad S^1; ricordiamo che un omeomorfismo è una applicazione tra spazi topologici continua, invertibile e aperta, dunque possiamo invertire f e ottenere una applicazione tra R o S^1 e la curva C: f^{-1} è detta parametrizzazione di C. Per quanto già visto è evidente che per una curva connessa esistono due possibili parametrizzazioni: una a partire da R e una ciclica a partire da S^1.

Data una curva topologica connessa C e preso su di essa un aperto A, possiamo considerare la restrizione ad A dell'omeomorfismo f esistente tra la curva e R (o eventualmente S^1); tale restrizione sarà ancora un omeomorfismo tra A e un aperto di R del tipo (a, b).

Definizione 1.2.4. *Data una curva topologica connessa C, chiamiamo arco di curva un sottospazio di C omeomorfo, tramite f, ad un intervallo chiuso di R.*

Data una curva C e preso su di essa un punto P, possiamo considerare un intorno U di P che, per definizione, conterrà un arco di curva V con parametrizzazione h (la quale si ottiene prendendo la restrizione a V della parametrizzazione di C): h è detta parametrizzazione locale di C intorno a P.

1.3 Curve differenziabili

In questa sezione vediamo come è possibile introdurre una struttura differenziabile sullo spazio delle 1-varietà topologiche in modo da ottenere 1-varietà differenziabili.

Definizione 1.3.1. *Una curva di R^2 è una 1-varietà topologica immersa in R^2.*

Dunque per ogni curva C possiamo considerare l'immersione $i : C \longrightarrow R^2$; inoltre, per quanto visto nella sezione precedente, ogni curva topologica M è omeomorfa a R o a S^1. Distinguiamo allora i due casi:

- Se M è omeomorfa a R allora esiste $f : R \longrightarrow M$ omeomorfismo; possiamo allora considerare la composizione tra l'omeomorfismo f e l'immersione i ottenendo così una applicazione $h : R \longrightarrow R^2$ che non è più un omeomorfismo su R^2 ma solo sull'immagine $h(R) = M$. Allora diremo che h è una parametrizzazione di M.

- Se M è omeomorfa a S^1 allora esiste $g : S^1 \longrightarrow M$ omeomorfismo; in questo caso possiamo considerare il rivestimento universale (che è in particolare un omeomorfismo locale) $p : R \longrightarrow S^1$ e comporre p con l'omeomorfismo g e con l'immersione i. Otteniamo in questo caso un omeomorfismo locale k tra un aperto di R e un aperto di M; k sarà la parametrizzazione locale di M.

Possiamo riformulare le precedenti definizioni nel seguente modo:

Definizione 1.3.2. *Una curva C di R^2 è una 1-varietà topologica immersa in R^2 che ammette una parametrizzazione a partire da R o da S^1, a valori in R^2.*

Definizione 1.3.3. *Un arco di C curva piana è un sottospazio di C che ammette una parametrizzazione f locale a partire da un chiuso $[a, b]$ di R, a valori in R^2.*

Evidentemente è possibile parametrizzare una curva C a partire da un aperto (a, b) di R, questo perché R è omeomorfo ad un qualunque suo aperto. Dunque possiamo considerare l'applicazione f che parametrizza la curva intorno ad un suo punto P, come una funzione continua a valori vettoriali definita su un aperto di R nel seguente modo:

$$f : (a, b) \longrightarrow R^2 \qquad t \longrightarrow f(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in (a, b)$$

In particolare le applicazioni $x(t)$ e $y(t)$ sono a valori in R.
Data una curva C e un punto P su di essa, possiamo chiederci in quali casi è possibile definire la retta tangente a C nel punto P.
Se g è una parametrizzazione di C in un intorno del punto $P = (x(t), y(t))$, il vettore $g'(t) = (x'(t), y'(t))$ è la velocità con cui g percorre la curva nel punto P;

tale vettore individua la direzione della tangente alla curva nel punto P, dunque, se le sue componenti sono nulle, la retta tangente non sarà definita.

Definizione 1.3.4. *Una parametrizzazione locale g di una curva C in un suo punto $P = (x(t), y(t))$ si dice regolare se $(x'(t), y'(t) \neq (0, 0)$.*

Definizione 1.3.5. *Una curva C si dice regolare se ammette in ogni punto una parametrizzazione locale regolare.*

Definizione 1.3.6. *Una curva C, parametrizzata da $f : [a, b] \longrightarrow R^2$, si dice regolare a tratti se esiste una partizione P dell'intervallo $[a, b]$ tale che f è regolare in ogni intervallo di P.*

La regolarità di una curva è spesso correlata alla differenziabilità:

Definizione 1.3.7. *Una curva C si dice di classe C^k, con $1 \leq k < \infty$, se ammette in ogni punto $P = (x(t), y(t))$ una parametrizzazione $g : [a, b] \longrightarrow R^2$ e le funzioni $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sono di classe C^k in $[a, b]$ (cioè hanno derivate continue fino all'ordine k).*
Se $k = \infty$ allora la curva si dice differenziabile.

A questo punto ci possiamo chiedere cosa succede se consideriamo, per una stessa curva C, due o più parametrizzazioni distinte:

Definizione 1.3.8. *Due parametrizzazioni γ e δ di una stessa curva C, tali che $\gamma : [a, b] \longrightarrow R^2$ e $\delta : [c, d] \longrightarrow R^2$, si dicono equivalenti se esiste una applicazione $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$, di classe C^1 su $[c, d]$, tale che:*

$$\varphi'(\tau) \neq 0 \quad \forall\ \tau \in [c, d]$$
$$\delta(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)) \quad \forall\ \tau \in [c, d]$$

Considerando una classe di equivalenza di parametrizzazioni si ha che la curva C è una varietà differenziabile e, in quanto tale, ammette esattamente due strutture differenziabili orientate.

Data una qualunque parametrizzazione g di C, essa può percorrere la curva in uno dei due versi possibili; due parametrizzazioni distinte possono stare sulla stessa struttura differenziabile orientata o su strutture diverse: nel primo caso diremo che le due parametrizzazioni inducono su C la stessa orientazione.

Definizione 1.3.9. *Sia C una curva differenziabile regolare, siano γ e δ due parametrizzazioni equivalenti di C. Diremo che le due parametrizzazioni inducono la stessa orientazione in un punto $P = \delta(\tau)$ di C se $\varphi'(\tau) > 0$*

Spesso, con abuso di notazione, indicheremo una curva o un arco di curva per mezzo della sua parametrizzazione.
In prospettiva futura diamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.3.10. *Diremo che una curva g, definita in $[a, b]$, è semplice se $\forall\ t_1, t_2 \in (a, b)$, esclusi al più gli estremi, si ha: $g(t_1) \neq g(t_2)$.*

Definizione 1.3.11. *Una curva $g : [a, b] \longrightarrow R^2$ si dice chiusa se $g(a) = g(b)$ e $g'(a) = g'(b)$.*

Definizione 1.3.12. *Una curva C si dice convessa se, per ogni punto P di C, la curva si trova tutta in uno e uno solo dei due semipiani in cui la retta tangente a C per P divide il piano.*

1.4 Lunghezza di una curva piana

In questa sezione ci proponiamo di definire il concetto di lunghezza per una generica curva piana regolare; maggiori dettagli si possono trovare in [2].
Sia C arco di curva regolare piana parametrizzato da $\varphi(t)$ a partire da un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ di R. Possiamo considerare una partizione P di $[a, b]$ in N sottointervalli del tipo $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$; a tale partizione corrisponde una poligonale P_C sulla curva di estremi $\varphi(a), \varphi(t_1), ..., \varphi(t_{N-1}), \varphi(b)$.

La lunghezza di tale poligonale è data da:

$$\ell(P_C) = \sum_{i=1}^{N} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$$

Intuitivamente, tale numero rappresenta una approssimazione per difetto della lunghezza dell'arco di curva; questa approssimazione sarà tanto migliore quanto minore sarà la lunghezza dei segmenti che formano la poligonale.
Facendo tendere a 0 la lunghezza dei segmenti della poligonale si fa tendere N a $+\infty$ e si ottiene proprio la lunghezza dell'arco di curva. Possiamo dare, allora, la seguente definizione:

Definizione 1.4.1. *La lunghezza di un arco di curva C è data da:*

$$L(C) = \sup \ell(P_C)$$

dove P_C varia tra tutte le possibili poligonali inscritte nell'arco di curva C.
In particolare, se tale estremo superiore è finito, diremo che l'arco C è rettificabile.

Dimostriamo ora, in maniera costruttiva, che un qualunque arco di curva differenziabile è rettificabile:

Teorema 1.4.2. *Sia C un arco di curva piana differenziabile regolare parametrizzata da $\varphi : [a,b] \longrightarrow R^2$. Allora C è rettificabile e la sua lunghezza è data da:*

$$L(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| \, dt$$

Dimostrazione

Proviamo inizialmente che:

$$\ell(P_C) \leq \int_a^b |\varphi'(t)| dt \tag{1.1}$$

per ogni poligonale P_C inscritta nell'arco C, determinata da una partizione P di $[a,b]$. Usando la formula fondamentale del calcolo integrale otteniamo:

$$\ell(P_C) = \sum_{i=1}^{N} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$$

Quindi:

$$L(C) = \sup_{P_C} \ell(P_C) \leq \int_a^b |\varphi'(t)|dt$$

Resta da provare che vale anche la disuguaglianza opposta.

Poiché per ipotesi la curva è differenziabile su $[a,b]$, si ha che φ' è uniformemente continua su $[a,b]$ e dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$s,t \in [a,b] \quad |s-t| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi'(s) - \varphi'(t)| < \varepsilon$$

Sia P una partizione dell'intervallo $[a,b]$ del tipo $t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$ e supponiamo che ciascun intervallo della partizione abbia ampiezza minore di δ. Sia P_C la poligonale individuata dalla partizione P; Preso l'intervallo $[t_{i-1}, t_i]$ si ha, per la formula fondamentale del calcolo integrale:

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t)\ dt$$

Al variare di s in tale intervallo:

$$\begin{aligned}
\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varphi'(t) - \varphi'(s) + \varphi'(s)]\ dt \\
&= \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varphi'(t) - \varphi'(s)]\ dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(s)\ dt \\
&= \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varphi'(t) - \varphi'(s)]\ dt + \varphi'(s)(t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

Passando al valore assoluto:

$$\begin{aligned}
|\varphi'(s)|(t_i - t_{i-1}) &= \left|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varphi'(s) - \varphi'(t)]\ dt\right| \\
&\leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(s) - \varphi'(t)|\ dt \\
&\leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

Da cui possiamo ricavare:

$$\varphi'(s) \leq \frac{|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|}{(t_i - t_{i-1})} + \varepsilon$$

Integrando ambo i membri nell'intervallo $[t_i, t_{i-1}]$:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(s)|ds \leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1})$$

Sommando su tutti gli i tra 1 e N si ottiene:

$$\int_a^b |\varphi'(t)|dt \leq \ell(P_C) + \varepsilon(b-a) \leq L(C) + \varepsilon(b-a)$$

Facendo tendere ε a 0 si ottiene:

$$\ell(P_C) \geq \int_a^b |\varphi'(t)|dt \tag{1.2}$$

la quale, insieme a (1.1), fornisce la tesi.

1.5 Parametrizzazioni naturali

Tra le possibili parametrizzazioni differenziabili di una curva C, siamo particolarmente interessati a quelle che hanno l'ulteriore proprietà di percorrere la curva a velocità costante e unitaria.

Definizione 1.5.1. *Sia C una curva differenziabile regolare; una parametrizzazione $\alpha : I \longrightarrow R^2$ della curva C è detta naturale se, $\forall s \in I$, il vettore $\alpha'(s)$ ha modulo 1.*

Possiamo osservare, ricollegandoci alla sezione precedente, che se C è una curva differenziabile regolare e $\alpha : [a, b] \longrightarrow R^2$ una sua parametrizzazione naturale, allora la lunghezza della curva C è pari all'ampiezza dell'intervallo su cui si definisce α, nel nostro caso $b - a$. Infatti, poiché $|\alpha'(s)| = 1 \ \forall s \in [a, b]$, si ha:

$$L(C) = \int_a^b |\alpha'(s)| \ ds = \int_a^b ds = b - a$$

Tuttavia è necessario chiedersi se una tale parametrizzazione sia definita per una qualsiasi curva del piano o, eventualmente, se α non esiste per alcune curve . A tal proposito vale la seguente proposizione:

Proposizione 1.5.2. *Sia C curva piana e sia $\beta : I \longrightarrow R^2$ una qualunque parametrizzazione di C a velocità arbitraria. É sempre possibile ricavare da β una nuova parametrizzazione $\alpha : I \longrightarrow R^2$ della curva C a velocità costante e unitaria.*

Dimostrazione

Fissato $t_0 \in I$, sia $P_0 = \beta(t_0)$; al variare di t in I, e conseguentemente di $P = \beta(t)$ sulla curva, consideriamo l'arco di curva $\widehat{P_0P}$ e definiamo una nuova funzione $s : I \longrightarrow R$ definita nel seguente modo:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\beta'(\tau)| d\tau$$

La funzione s associa ad ogni t la lunghezza dell'arco di curva $\widehat{P_0P}$.

Osserviamo che β è una funzione differenziabile, dunque anche β' è differenziabile e, per la regolarità della curva, anche $|\beta'|$ è differenziabile. s è quindi differenziabile e regolare, inoltre è monotona crescente essendo $|\beta'(t)| > 0$.

La monotonia di s ne garantisce l'invertibilità (almeno locale) e dunque possiamo scrivere $t = t(s) : I' \longrightarrow I$; per la regola di derivazione delle funzioni inverse avremo che $t'(s) = \dfrac{1}{s'(t)}$.

Consideriamo ora la funzione $\alpha : I' \longrightarrow C$ definita nel seguente modo:

$$\alpha(s) = \beta(t(s))$$

La parametrizzazione α gode delle seguenti proprietà:

1. Differenziabilità (composizione di due funzioni differenziabili).
2. Regolarità (in quanto $\alpha'(s) = \beta'(t) \cdot t'(s)$).
3. Velocità costante unitaria (in quanto $t'(s) = \dfrac{1}{s'(t)} = \dfrac{1}{|\beta'(t)|}$, da cui segue: $\alpha(s) = \dfrac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}$).

Dunque α è la parametrizzazione naturale cercata.

Il parametro s di una parametrizzazione naturale viene spesso detto arco lunghezza; questo in accordo alla definizione che viene data di s all'interno della dimostrazione della proposizione precedente (abbiamo definito $s(t)$ come la lunghezza dell'arco $\widehat{P_0P}$).

1.6 Riferimento di Frenet

Sia C curva differenziabile regolare del piano, sia $\alpha : I \longrightarrow R^2$ parametrizzazione naturale di C. Per ogni punto P della curva possiamo definire un sistema di riferimento sulla curva associando a P una base ortonormale positiva di R^2.

Definizione 1.6.1. *Per $P \in C$, $P = \alpha(s)$ definiamo:*

- *Versore tangente $T(P) = \alpha'(s)$.*
- *Versore normale $N(P)$ tale che $\{T(P), N(P)\}$ sia una base ortonormale positiva di R^2.*

Possiamo osservare quanto segue:

1. $\forall P \in C$, $T(P)$ e $N(P)$ sono ben definiti, cioè non dipendono dalla parametrizzazione della curva.
   In particolare, se β è una parametrizzazione della curva a velocità arbitraria, $T(P)$ e $N(P)$ sono definiti nel seguente modo:
   - $T(P) = \dfrac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}$.
   - $N(P)$ tale che $\{T(P), N(P)\}$ sia una base ortonormale positiva di R^2.
2. Orientazione opposta sulla curva $\Longrightarrow$ direzione opposta dei due versori.

Sia C curva piana differenziabile regolare orientata e α una parametrizzazione naturale di C. Per ogni punto $P = (\alpha(s) = (x(s), y(s))$ della curva si ha che:

$$T(P) = (x'(s), y'(s)) \quad N(P) = (-y'(s), x'(s))$$

Richiamiamo le seguenti proprietà che caratterizzano i vettori del piano:

Proposizione 1.6.2. *Sia $u(s)$ vettore di modulo costante. Allora $u'(s) \perp u(s)$.*

Dimostrazione
$|u(s)| = const \Rightarrow |u(s)|^2 = const. \Rightarrow \frac{d}{ds}|u(s)|^2 = 0.$
Ma $|u(s)|^2 = \langle u(s), u(s) \rangle$ e quindi $\frac{d}{ds}|u(s)|^2 = 2\langle u(s), u'(s) \rangle = 0.$
Ne deduciamo che $u(s) \perp u'(s)$ $\forall s.$

Proposizione 1.6.3. *Siano $u(s)$ e $w(s)$ due vettori tali che $\langle u, w \rangle =$ costante. Allora $\langle u'(s), w(s) \rangle = -\langle w'(s), u(s) \rangle$.*

Dimostrazione
$\frac{d}{ds}\langle u(s), w(s) \rangle = \langle u'(s), w(s) \rangle + \langle w'(s), u(s) \rangle.$
Ma per ipotesi $u(s) \perp w(s)$, ossia $\langle u(s), w(s) \rangle = 0$.
Ne deduciamo che $\langle u'(s), w(s) \rangle = -\langle w'(s), u(s) \rangle$.

Dalla proposizione (1.6.2) segue che $T'(P) \perp T(P)$ e quindi $T'(P) \parallel N(P)$. Ragionando allo stesso modo per il versore $N(P)$ otteniamo che $N'(P) \parallel T(P)$. Il parallelismo tra $T'(P)$ e $N(P)$ implica che esiste k tale che $T'(P) = k \cdot N(P)$ e dunque $k = \langle T'(P), N(P) \rangle$.
La proposizione (1.6.3), che possiamo applicare grazie al fatto che T e N sono perpendicolari, implica che $\langle N'(P), T(P) \rangle = -k$ e quindi $N'(P) = -k \cdot T(P)$. Abbiamo dimostrato il seguente teorema relativo alle derivate dei versori T e N:

Teorema 1.6.4. *Il riferimento di Frenet di una curva differenziabile regolare piana nel punto $P = \alpha(s)$ è dato da:*

$$T'(P) = k \cdot N(P)$$
$$N'(P) = -k \cdot T(P)$$

dove k è detta curvatura della curva C nel punto P

1.7 Curvatura di una curva piana

Data una curva C piana, differenziabile e regolare, e preso su di essa un punto P, la curvatura di C in P è una misura di come C si allontana dall'essere "rettilinea". Per quanto visto nella sezione precedente, è possibile definire k in termini dei versori tangente e normale; abbiamo perciò:

$$k(P) = \langle T'(P), N(P) \rangle = \langle -N'(P), T(P) \rangle$$

Per poter definire k nel punto P di una generica curva parametrizzata da $\alpha(s)$ è necessario quindi che α sia almeno di classe C^2 in P.
La curvatura di una curva differenziabile in un punto è un valore scalare (è il prodotto scalare tra due vettori) che varia in maniera differenziabile sulla curva; tuttavia è possibile definire anche un vettore curvatura $K(P)$ in ogni punto. Per definizione poniamo:

$$K(P) = T'(P) = \alpha''(s)$$

In particolare $K(P) \parallel N(P)$, inoltre, per quanto visto sopra:

$$k(P) = \pm\, |K(P)| \quad \forall P \in C$$

Possiamo osservare quanto segue:

1. Il vettore curvatura in un punto P è sempre diretto lungo la direzione individuata dal vettore normale $N(P)$.

2. K è indipendente dall'orientazione su C.

3. k dipende dal verso di percorrenza di C solamente per il segno (orientazione opposta $\Rightarrow$ curvatura di segno opposto).

4. La curvatura di una retta è 0 in tutti i punti; infatti, se:

   $$\alpha(s) = (x_0 + v_x s, y_0 + v_y s)$$

   è una parametrizzazione naturale di una data retta, si possono calcolare:

- $\alpha'(s) = (v_x, v_y)$
- $\alpha''(s) = (0,0)$

Quindi $K(P) = \alpha''(s) = (0,0)\ \forall P$ e perciò $k(P) = 0\ \forall P$. In realtà si dimostra che gli intervalli di R sono le uniche curve con curvatura nulla in ogni punto.

5. La curvatura di una circonferenza di raggio r è $\frac{1}{r}$ in ogni punto; infatti se la circonferenza è parametrizzata a velocità unitaria da:

$$\alpha(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

si possono calcolare:

- $\alpha'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$
- $K(P) = \alpha''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

Quindi $k(s) = |K(P)| = \pm\frac{1}{r}$.

Possiamo osservare che la definizione di curvatura è stata data solo per curve parametrizzate a velocità costante e unitaria; in realtà, sebbene per ogni curva sia possibile determinare una parametrizzazione naturale a cui ricondursi poi per il calcolo della curvatura, conviene trovare una espressione più generale della curvatura.

Sia C curva piana, differenziabile, regolare, e sia $\beta : (a,b) \longrightarrow R^2$ una parametrizzazione di C a velocità arbitraria. Per $t \in (a,b)$, poniamo $\beta(t) = (x(t), y(t))$ e $v(t) = |\beta'(t)|$.

Teorema 1.7.1.

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{v(t)^3}$$

Dimostrazione

Poniamo $s(t) = \int_0^t v \, dt$. Dunque $s'(t) = v$, $s(t)$ è una funzione monotona e quindi invertibile, inoltre $t'(s) = \frac{1}{v(t(s))}$.

Ragionando rispetto alla variabile s, possiamo calcolare la derivata di $T(t(s))$:

$$\frac{d}{ds}T(t(s)) = T'(t(s)) \cdot t'(s) = T'(t) \cdot \frac{1}{v(t)}$$

Il vettore curvatura K, in termini di t, si può scrivere come: $K(t) = \frac{T'(t)}{v(t)}$. Ma:

$$T(t) = \left(\frac{x'(t)}{v(t)}, \frac{y'(t)}{v(t)}\right) \ \Rightarrow \ T'(t) = \left(\frac{x''(t)v(t) - v'(t)x'(t)}{[v(t)]^2}, \frac{y''(t)v(t) - v'(t)y'(t)}{[v(t)]^2}\right)$$

Avremo quindi:

$$\begin{aligned} K(t) &= \left(\frac{x''(t)v(t) - v'(t)x'(t)}{[v(t)]^3}, \frac{y''(t)v(t) - v'(t)y'(t)}{[v(t)]^3}\right) \\ N(t) &= \left(\frac{-y'(t)}{v(t)}, \frac{x'(t)}{v(t)}\right) \end{aligned}$$

Sviluppando $\langle K(t), N(t)\rangle$ componente per componente si ottiene:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{-x''(t)y'(t)v(t) + x'(t)y'(t)v'(t) + x'(t)y''(t)v(t) - x'(t)y'(t)v'(t)}{[v(t)]^4} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{v(t)^3} \end{aligned}$$

1.8 Cerchio e parabola osculatori

Possiamo definire, per ogni punto P di una curva C differenziabile regolare di R^2, due curve "particolari": il cerchio osculatore e la parabola osculatrice.

Definizione 1.8.1. *Sia $P \in C$ tale che $k(P) \neq 0$; definiamo:*

- *Raggio di curvatura di C in P: $r(P) = \frac{1}{|k(P)|}$.*
- *Centro di curvatura di C in P: $C(P) = P + r(P) \cdot N(P)$.*

Il cerchio osculatore di C in P è il cerchio centrato in $C(P)$ e di raggio $r(P)$.

Osservazioni

1. Per definizione, il cerchio osculatore di C in P e tangente a C nel punto P.

2. Il cerchio osculatore di una curva C in un suo punto P ha curvatura pari a $k(P)$.

Per definire la parabola osculatrice procediamo nel seguente modo: per una curva differenziabile regolare C del piano consideriamo la parametrizzazione naturale α di C tale che $\alpha(0) = P$.
Sviluppando α in serie di Taylor intorno al punto P otteniamo:

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \frac{\alpha''(0)}{2}s^2 + \varepsilon(s) \tag{1.3}$$

Se fissiamo un sistema di riferimento ortogonale (x, y), con origine nel punto P, tale che $e_x = T(P)$, $e_y = N(P)$ $(e_x = (1,0), e_y = (0,1))$, e riscriviamo la (1.3) nelle componenti, otteniamo:

$$x(s) = s + \varepsilon_x(s) \tag{1.4}$$
$$y(s) = \frac{k(P)}{2}s^2 + \varepsilon_y(s) \tag{1.5}$$

Tralasciando i contributi infinitesimi ε_x e ε_y ed esplicitando la (1.5) in funzione di $x(s)$ otteniamo l'equazione di una parabola nel piano (x, y).

Definizione 1.8.2. *La parabola osculatrice della curva C nel punto P è la parabola di equazione:*

$$y(s) = \frac{k(P)}{2}\, x(s)^2$$

Tale parabola ha vertice nel punto P, è ivi tangente alla curva e ha, nel punto P, curvatura $k(P)$.

1.9 Rotazione totale e curvatura totale

Data una curva C differenziabile, regolare, orientata e connessa, possiamo associare ad ogni arco A della curva due parametri: la curvatura totale e la rotazione totale.

Consideriamo una parametrizzazione naturale α e supponiamo che l'arco A di curva sia delimitato da $P = \alpha(s_1)$ e $Q = \alpha(s_2)$.

Definizione 1.9.1. *La rotazione totale di A è definita da:*

$$\rho(A) = \int_{s_1}^{s_2} k(s)\ ds$$

La curvatura totale di A è definita da:

$$K(A) = \int_{s_1}^{s_2} |k(s)|\ ds$$

Possiamo definire la curvatura e la rotazione totale anche nel caso in cui una curva sia parametrizzata a velocità arbitraria . Sia $\beta = \beta(t)$ una parametrizzazione qualunque della curva C e sia l'arco A individuato da $P = \beta(t_1)$ e $Q = \beta(t_2)$; ponendo $s(t) = \displaystyle\int_0^t v(t)\ dt$, con $v(t) = |\beta'(t)|$, si ha:

$$s'(t) = v(t) \quad \Rightarrow \quad ds = s'(t)dt = v(t)dt = |\beta'(t)|dt$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \int_{t_1}^{t_2} k(t) \cdot |\beta'(t)|\ dt \\ K(A) &= \int_{t_1}^{t_2} |k(t)| \cdot |\beta'(t)|\ dt \end{aligned}$$

In prospettiva futura, enunciamo il seguente teorema:

Teorema 1.9.2. *Se C è una curva chiusa, semplice e convessa, allora la curvatura totale di C è 2π.*

La dimostrazione di questo teorema si trova in [9].

1.10 Area di domini piani regolari

In questa sezione ci proponiamo di dimostrare la formula per il calcolo di aree di domini piani; maggiori dettagli si trovano in [2].

Ricordiamo alcune definizioni:

Definizione 1.10.1. *$D \subset R^2$ si dice dominio normale rispetto all'asse x se:*

$$D = \{(x, y) \in (a, b) \times R \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Analoga definizione viene data per domini normali rispetto all'asse y.

Definizione 1.10.2. *Un dominio D normale rispetto a x si dice regolare se le funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono di classe C^1 nell'intervallo (a, b)*

Analoga definizione viene data per domini normali rispetto all'asse y.

Ogni dominio normale regolare è unione di un numero finito di domini normali regolari, a due a due privi di punti interni in comune. Da ciò segue che: se D è un dominio normale regolare allora la sua frontiera è unione di un numero finito di curve regolari a tratti.

Prima di enunciare il teorema sull'area di domini piani regolari enunciamo il seguente teorema dovuto a Jordan.

Teorema 1.10.3 (Teorema di Jordan). *Sia $C \subset R^2$ curva di Jordan. Allora $R^2 - C$ ha due componenti connesse:*

- *$I(C)$ limitata, semplicemente connessa, con $Fr(I(C)) = C$ (interno)*
- *E(C) illimitata con $Fr(E(C)) = C$ (esterno)*

Non diamo qui la dimostrazione di questo teorema, che comunque può essere trovata in [11].
Se C è una curva differenziabile regolare chiusa, allora la regione di piano delimitata da C costituisce un dominio normale regolare la cui frontiera è proprio C.
Alla luce di quanto detto, possiamo orientare C in modo che, in ogni punto P, il versore normale $N(P)$ sia diretto verso l'esterno; sulla regione D delimitata da C possiamo definire una funzione di due variabili f di classe C^1 su D.
Enunciamo, senza dimostrarle, le formule di Gauss-Green (un'ampia dimostrazione si può trovare in [2]):

Teorema 1.10.4 (Formule di Gauss-Green). *Sia $D \subseteq R^2$ dominio regolare e sia $f = f(x,y)$ funzione di classe C^1 su D. Allora:*

$$\int\int_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dxdy = \int_{\partial D} f\ dy \tag{1.6}$$

$$\int\int_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dxdy = -\int_{\partial D} f\ dx \tag{1.7}$$

A questo punto possiamo dimostrare il seguente teorema per il calcolo dell'area di domini regolari:

Teorema 1.10.5 (Area di domini piani regolari). *Se D è un dominio regolare di R^2 di area $A(D)$ allora:*

$$A(D) = \int_{\partial D} x\ dy = -\int_{\partial D} y\ dx \tag{1.8}$$

Inoltre, per ogni coppia di numeri reali α e β, con $\alpha + \beta \neq 0$, si ha:

$$A(D) = \frac{1}{\alpha+\beta}\int_{\partial D} \alpha x\ dy - \beta y\ dx \tag{1.9}$$

In particolare:

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\ dy - y\ dx \tag{1.10}$$

Dimostrazione

Per dimostrare (1.8) è sufficiente applicare (1.6) alla funzione $f(x,y) = x$ e (1.7) alla funzione $f(x,y) = y$. Otteniamo:

$$\int_{\partial D} x\ dy = \int\int_D dxdy = -\int_{\partial D} y\ dx$$

Per dimostrare (1.9) è sufficiente considerare una combinazione lineare dei termini in (1.8): per α e β numeri reali, si ha:

$$\alpha\left(\int_{\partial D} x\ dy\right) + \beta\left(-\int_{\partial D} y\ dx\right) = (\alpha+\beta)A(D)$$

da cui si ricava:

$$A(D) = \frac{1}{\alpha+\beta}\int_{\partial D} \alpha x\ dy - \beta y\ dx$$

Infine (1.10) segue immediatamente da (1.9) ponendo $\alpha = \beta = 1$.

Capitolo 2

Deformazione di curve piane chiuse

2.1 Introduzione

In questo capitolo introdurremo il problema che è alla base di questa trattazione e lo discuteremo nel caso particolare di una curva piana, di classe C^2, regolare e chiusa.

Il punto di partenza è il seguente: data una curva con le restrizioni di cui sopra, ci chiediamo cosa succede se imponiamo alla curva una deformazione lungo il suo campo vettoriale normale in modo che la velocità di tale deformazione, istante per istante e in ogni punto, sia proporzionale alla curvatura della curva in quel punto.

In altre parole considereremo una famiglia di curve chiuse e regolari:

$$F : S^1 \times [0, T) \longrightarrow R^2$$

con $u \in S^1$, $t \in [0, T)$, di classe C^2 su $S^1 \times [0, T)$, soggette alla seguente legge di evoluzione:

$$F_t = kN \tag{2.1}$$

dove $F_t = \dfrac{\partial F}{\partial t}$, k è la curvatura e N il versore normale.

Ci proponiamo di studiare cosa succede durante un tale processo di evoluzione, in particolare quando $t \longrightarrow T$, quali proprietà della curva iniziale (al tempo $t = 0$) si preservano e quali eventuali problemi possono sorgere nelle curve per $t > 0$.

Possiamo indicare una generica curva della famiglia F con:

$$F(u,t) = (x(u,t), y(u,t))$$

Fissato $t_0 \geq 0$, $F(\cdot, t_0)$ rappresenta la curva ad un istante preciso del processo di evoluzione, esattamente all'istante $t = t_0$. Per quanto visto nel capitolo 1, è possibile riparametrizzare la curva in modo che, punto per punto, la velocità sia unitaria; dunque, se s è il nuovo parametro (arco lunghezza), la famiglia di curve potrà essere riscritta nella forma:

$$F(s,t) = (x(s,t), y(s,t)) \qquad s \in [0, L] \quad t \in [0, T]$$

In particolare la relazione tra s e u può essere scritta nella forma:

$$ds = v du \tag{2.2}$$

dove $v = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2} = \left|\dfrac{\partial(F(u,t))}{\partial u}\right|$

Possiamo anche ricavare una relazione tra gli operatori $\dfrac{\partial}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial}{\partial s}$ che è la seguente:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.3}$$

La (2.1), in termini di x e y, si scrive come:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

Dove la derivata rispetto a t è fatta tenendo s costante.

Fissato t, siano $T(P)$ e $N(P)$ rispettivamente il versore tangente e il versore normale alla curva in un generico punto $P = F(s,t)$; possiamo scrivere le equazioni di Frenet per la curva nel punto P:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = kN \qquad \frac{\partial N}{\partial s} = -kT \tag{2.4}$$

Usando la (2.3) possiamo riscrivere la (2.4) in termini di u:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = vkN \qquad \frac{\partial N}{\partial u} = -vkT \tag{2.5}$$

2.2 Alcuni risultati generali

Ci chiediamo ora come variano nel tempo alcuni valori caratteristici della curva iniziale quali la lunghezza, il modulo della velocità, l'area della regione di piano racchiusa (ricordiamo che la curva è chiusa), i versori T e N.

Lemma 2.2.1.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -k^2 v \tag{2.6}$$

Dimostrazione
Usando le equazioni di Frenet e la (2.1), calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(v^2) &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u}\rangle \\
&= 2\langle\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t}\rangle \\
&= 2\langle vT, \frac{\partial}{\partial u}(kN)\rangle \\
&= 2\langle vT, \frac{\partial k}{\partial u}N - vk^2 T\rangle \\
&= -2v^2k^2
\end{aligned}$$

Ma $\frac{\partial}{\partial t}v^2 = 2v\frac{\partial v}{\partial t}$, dunque $-2v^2k^2 = 2v\frac{\partial v}{\partial t}$, da cui segue: $\frac{\partial v}{\partial t} = -k^2 v$.

Sia $L(t)$ la lunghezza della curva all'istante t; l'evoluzione di L è indicata nel seguente lemma:

Lemma 2.2.2.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\int_0^L k^2 \; ds \tag{2.7}$$

Dimostrazione

Per quanto visto nel capitolo 1: $L = \int_0^{2\pi} v \; du$. Da questo segue che:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial t} \; du = -\int_0^{2\pi} k^2 v \; du = -\int_0^L k^2 \; ds$$

Nella penultima uguaglianza abbiamo usato il lemma precedente mentre nell'ultima abbiamo usato (2.2).

Prima di studiare l'evoluzione di T e N dimostriamo una relazione molto utile che lega le derivate seconde miste rispetto a t e s.

Lemma 2.2.3.

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} + k^2 \frac{\partial}{\partial s} \tag{2.8}$$

Dimostrazione

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\right) = k^2 \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t} = k^2 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}$$

In questo caso abbiamo usato (2.3).

Vediamo ora come procede l'evoluzione dei versori T e N.

Lemma 2.2.4.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} N \qquad \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial s} T \tag{2.9}$$

Dimostrazione

Ricordando che $T = \frac{\partial F}{\partial s}$, tenendo presente il lemma precedente e la (2.1), otteniamo per T:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} + k^2 \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(kN) + k^2 T = \frac{\partial k}{\partial s} N - k^2 T + k^2 T = \frac{\partial k}{\partial s} N$$

Per dimostrare la seconda di (2.9) partiamo dal fatto che $\langle T, N \rangle = 0$; segue che:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\langle T, N \rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial t}, N \rangle + \langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \rangle = \langle \frac{\partial k}{\partial s} N, N \rangle + \langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \rangle$$

Ma N è un versore di modulo costante quindi $\frac{\partial N}{\partial t} \perp N$, cioè $\frac{\partial N}{\partial t} \parallel T$.

Quindi $0 = \frac{\partial k}{\partial s} + \frac{\partial N}{\partial t}$ e dunque $\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial s} N$.

Per una generica curva della famiglia e per ogni punto di tale curva possiamo considerare l'angolo θ i cui lati sono la tangente alla curva nel punto e l'asse delle ascisse.

Osserviamo che θ è definito modulo 2π mentre la derivata di θ è sempre univocamente definita in quanto la derivata è unica a meno di una costante additiva. Possiamo quindi studiare come varia θ su ogni curva e, più in generale, da curva a curva, cioè rispetto al parametro t.

Lemma 2.2.5.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial s} = k \tag{2.10}$$

Dimostrazione

Dalla definizione di θ segue che: $T = (\cos\theta, \sin\theta)$, $N = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Usando il lemma (2.2.4):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} N = \frac{\partial k}{\partial s}(-\sin\theta, \cos\theta)$$

Ma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(-\sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial t}, \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial t}\right)$$

Dunque $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}$.

Per dimostrare la seconda equazione, scriviamo innanzitutto le equazioni di Frenet in funzione di θ:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = kN = k(-\sin\theta, \cos\theta) \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial N}{\partial s} = -kT = -k(\cos\theta, \sin\theta) \tag{2.12}$$

Ma, essendo $T = (\cos\theta, \sin\theta)$, si ha:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \left(-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial s}, \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial s}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial s}(-\sin\theta, \cos\theta) \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial N}{\partial s} = \left(-\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial s}, -\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial s}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial s}(\cos\theta, \sin\theta) \tag{2.14}$$

Uguagliando (2.11) con (2.13) e (2.12) con (2.14) otteniamo la tesi.

Vediamo ora come varia la curvatura rispetto al parametro t:

Lemma 2.2.6.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3 \tag{2.15}$$

Dimostrazione

Usando il lemma precedente e derivando k rispetto a t otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial\theta}{\partial t} + k^2\frac{\partial\theta}{\partial s} \\
&= \frac{\partial^2\theta}{\partial s\partial t} + k^2\frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial\theta}{\partial t} + k^3 \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial k}{\partial s} + k^3 \\
&= \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3
\end{aligned}$$

Sia $A(t)$ l'area della regione di piano racchiusa dalla curva $F(s,t)$; il seguente lemma garantisce che $A(t)$ è una funzione strettamente decrescente.

Lemma 2.2.7.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi \tag{2.16}$$

Dimostrazione

Usando le formule di Gauss-Green:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial x}{\partial u} \right) \, du$$

Ma $F = (x, y)$ e $N = \left(-\frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial s} \right) = v\left(-\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \right)$.

Quindi $vN = \left(-\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \right)$ e dunque $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \langle F, vN \rangle \, du$.

Derivando A rispetto a t otteniamo:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\langle \frac{\partial F}{\partial t}, vN \rangle + \langle F, \frac{\partial v}{\partial t} N + \rangle F, v\frac{\partial N}{\partial t} \right] \, du$$

da cui, sfruttando i lemmi precedenti, si ottiene:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[vk - \langle F, vk^2 N \rangle + \langle F, -\frac{\partial k}{\partial u} T \rangle \right] \, du$$

Osserviamo che, essendo la curva chiusa, $\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial u} \langle F, kT \rangle \right) \, du = 0$; integrando per parti otteniamo:

$$\int_0^{2\pi} \langle F, -\frac{\partial k}{\partial u} T \rangle \, du = \int_0^{2\pi} \left[\langle \frac{\partial F}{\partial u}, kT \rangle + \langle F, k\frac{\partial T}{\partial u} \rangle \right] \, du$$

A questo punto, sfruttando i risultati precedenti si conclude:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[vk - \langle F, vk^2 N \rangle + \langle F, k\frac{\partial T}{\partial u} \rangle + \langle \frac{\partial F}{\partial u}, kT \rangle \right] \, du \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[vk - \langle F, vk^2 N \rangle + \langle F, vk^2 N \rangle + \langle \frac{\partial F}{\partial u}, kT \rangle \right] \, du \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[vk + \langle vT, kT \rangle \right] \, du \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2vk \, du \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza si è sfruttato il fatto che la curvatura totale di una curva chiusa è 2π (vedi teorema (1.9.2)).

2.3 Regolarità della deformazione

Ci proponiamo ora di dimostrare che, se la curva iniziale è semplice, tutte le curve che si ottengono in seguito alla deformazione rimangono semplici a condizione che la curvatura rimanga limitata in entrambe le variabili s e t.

Teorema 2.3.1. *Sia* $F : S^1 \times [0,T) \longrightarrow R^2$ *una famiglia di curve chiuse che soddisfa l'equazione di evoluzione:* $\dfrac{\partial F}{\partial t} = kN$.
Se $|k(u,t)| < C \ \forall u \in S^1 \ \forall t \in [0,T)$ *e la curva iniziale* $F(\cdot,0)$ *è semplice, allora* $F(\cdot,t)$ *è una curva semplice* $\forall t \in [0,T)$.

Per dimostrare questo teorema utilizzeremo alcuni risultati intermedi, di seguito riportati.
Consideriamo innanzitutto la funzione $d : S^1 \times S^1 \times [0,T) \longrightarrow R$ definita nel seguente modo:

$$(u_1,u_2,t) \longrightarrow d(u_1,u_2,t) = |F(u_1,t) - F(u_2,t)|^2 \tag{2.17}$$

In altre parole la funzione d associa a due punti su una generica curva la loro distanza al quadrato. Dalla definizione segue che: $u_1 \equiv u_2 \Rightarrow d(u_1,u_2,t) = 0$.
L'evoluzione di d è indicata nel seguente lemma:

Lemma 2.3.2.

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \Delta d - 4 = \frac{\partial^2 d}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial s_2^2} - 4 \tag{2.18}$$

Dimostrazione
Derivando rispetto a t la (2.17) e usando (2.1):

$$\frac{\partial d}{\partial t} = 2\langle F(u_1,t) - F(u_2,t), kN(u_1,t) - kN(u_2,t)\rangle$$

Per quanto riguarda le derivate rispetto a s_1 e s_2 si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d}{\partial s_1} &= 2\langle F,u_1,t) - F(u_2,t), T(u_1,t)\rangle \\
\frac{\partial^2 d}{\partial s_1^2} &= 2\langle T(u_1,t), T(u_1,t)\rangle + 2\langle F(u_1,t) - F(u_2,t), kN(u_1,t)\rangle \\
\frac{\partial^2 d}{\partial s_2^2} &= 2 - 2\langle F(u_1,t) - F(u_2,t), kN(u_2,t)\rangle
\end{aligned}$$

Sommando le ultime due equazioni e confrontando con $\frac{\partial d}{\partial t}$ si ottiene la tesi.

Come già asserito, la funzione d associa a due punti di una data curva la loro distanza al quadrato, ossia il modulo al quadrato del vettore di R^2 che congiunge i due punti. Possiamo anche considerare, tra due punti di una data curva, la loro distanza lungo la curva, ossia la lunghezza del tratto di curva percorso da un ipotetico viaggiatore per andare dal primo al secondo punto seguendo il verso positivo di percorrenza.
Definiamo allora la seguente funzione:

$$s : S^1 \times S^1 \times [0, T) \longrightarrow R$$

$$(u_1, u_2, t) \longrightarrow s(u_1, u_2, t) = \left| \int_{u_1}^{u_2} v(u, t)\ du \right| \tag{2.19}$$

Vogliamo dimostrare che, sotto l'ipotesi che $k(u, t) < C$, C costante reale, le diverse curve della famiglia sono semplici. Cominciamo dal seguente lemma:

Lemma 2.3.3. *Sia $g : [0, L] \longrightarrow R^2$ una curva parametrizzata a velocità costante unitaria da A a B in modo che la curva ottenuta dall'unione di g con la corda che connette A e B sia convessa.*
Sia f una seconda curva della stessa lunghezza L e parametrizzata a velocità unitaria tra C e D.
Supponiamo che le curve abbiano tangenti continue e curvatura continua a tratti e, in particolare, che g sia percorsa in senso orario con curvatura positiva.
Se poniamo $k_g(s)$ = curvatura nel punto $g(s)$ allora:

$$k_g(s) \geq |k_f(s)|\ \forall s \in [0, L] \Rightarrow dist(A, B) \leq dist(C, D)$$

Dimostrazione

Disponiamo le curve in modo che i punti A , B , C , D appartengano all'asse x. Le curve sono parametrizzate con lo stesso parametro s e usando lo stesso aperto di R^2.

Figura 2.1: lemma 2.3.3

Sia $\theta_g(s)$ l'angolo formato in ogni punto $g(s)$ dal vettore tangente e dall'asse x; poiché per ipotesi l'applicazione che ad ogni punto di g associa il vettore tangente è continua, per il teorema dei valori intermedi esiste un unico s_0 tale che la tangente a $g(s_0)$ è parallela all'asse x, ossia tale che $\theta g(s_0) = 0$.
Sfruttando l'ipotesi sulla relazione tra le curvature e usando la seconda di (2.10) possiamo scrivere:

$$\frac{d\theta_g}{ds} = k_g \geq |k_f| = \left|\frac{d\theta_f}{ds}\right|$$

Integrando e passando al valore assoluto otteniamo:

$$|\theta_f(s) - \theta_f(s_0)| \leq |\theta_g(s)| \tag{2.20}$$

Per ipotesi la curva g è convessa e questo ci assicura che, per $0 \leq s \leq L$, si ha $|\theta_g(s)| \leq \pi$, quindi prendendo il coseno di entrambi i termini di (2.20) e integrando si ottiene una disuguaglianza di segno opposto:

$$\int_0^L \cos|\theta_f(s) - \theta_f(s_0)|\ ds \geq \int_0^L \cos|\theta_g(s) - \theta_g(s_0)|\ ds = \int_0^L \cos|\theta_g(s)|\ ds$$

dove l'ultimo termine rappresenta proprio $dist(A, B)$, mentre il primo termine a sinistra rappresenta la proiezione del segmento CD sulla tangente ad f nel punto $f(s_0)$. Essendo tale proiezione minore della lunghezza del segmento stesso, si ottiene la tesi.

Da questo lemma deriva il seguente corollario per la funzione d:

Corollario 2.3.4. *Se $k(u,t) \leq c$ allora:*

$$d(u_1, u_2, t) \geq \left\{ \frac{2}{c} \sin \left(\frac{c}{2} s(u_1, u_2, t) \right) \right\}^2$$

Dimostrazione

Applichiamo il lemma precedente chiamando f la generica curva della famiglia F e prendendo per g l'arco di circonferenza lungo $s(u_1, u_2, t)$ e di raggio $\frac{1}{c}$ (vedi figura 2.2).

In questo modo l'ipotesi sulla relazione tra le curvature è banalmente verificata.

Figura 2.2: corollario 2.3.4

Prendendo A e B come estremi della corda intercettata dall'asse x sulla circonferenza si ha che:

$$[dist(A, B)]^2 = \left\{ \frac{2}{c} \sin \left(\frac{c}{2} s(u_1, u_2, t) \right) \right\}^2$$

Inoltre, ponendo $C = F(u_1, t)$ e $D = F(u_2, t)$, si ha che:

$$[dist(C, D)]^2 = d(u_1, u_2, t)$$

Applicando il lemma precedente si ottiene la tesi.

Dimostrazione del teorema 2.3.1

Consideriamo l'insieme E definito nel seguente modo:

$$E = \left\{ (u_1, u_2, t) | s(u_1, u_2, t) < \frac{\pi}{c} \right\}$$

Sull'insieme E vale il seguente risultato:

$$d(u_1, u_2, t) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2$$

La cui dimostrazione segue immediatamente dal corollario (2.3.4.).
Poniamo $D = S^1 \times S^1 \times [0, T) - E$, cioè $D =$ complementare di E, e consideriamo la restrizione di d a D. La frontiera di D è costituita da:

$$A_1 = \left\{ (u_1, u_2, t) | s(u_1, u_2, t) = \frac{\pi}{c} \quad 0 \leq t \leq T \right\}$$

e da:

$$A_2 = \left\{ (u_1, u_2, 0) | s(u_1, u_2, t) \geq \frac{\pi}{c} \right\}$$

Vogliamo dimostrare che d ammette minimo positivo su D; questo sarà sufficiente, in accordo con il principio del massimo, a dimostrare la tesi del teorema.
Sull'insieme A_1, per il corollario precedente, si ottiene che $d(u_1, u_2, t) \geq \frac{2}{c^2} > 0$
Sull'insieme A_2 la funzione d ha minimo positivo perché la curva iniziale è semplice per ipotesi.
Sia m il più piccolo tra i minimi della d su A_1 e A_2; vogliamo dimostrare che il minimo positivo di d su D è proprio m. A tal proposito consideriamo la funzione g così definita:

$$g(u_1, u_2, t) = d(u_1, u_2, t) + \varepsilon t$$

Ovviamente $\Delta g = \Delta d$ e, per la (2.18):

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial d}{\partial t} + \varepsilon = \Delta d - 4 + \varepsilon = \Delta g - 4 + \varepsilon \tag{2.21}$$

Sia $0 < \delta < m$ e supponiamo per assurdo che g raggiunga il valore $m - \delta$ su D. Sia $t_0 = \inf\{t | g(u_1, u_2, t) = m - \delta\}$.
La funzione g è continua (segue dalla definizione di g e dalla continuità di d); inoltre l'insieme D è compatto. Tutto ciò ci porta a concludere che g raggiunge

per la prima volta il valore $m-\delta$ in un punto interno (u_1', u_2', t). In questo punto $\dfrac{\partial g}{\partial t} \leq 0$ e:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} \right)^2 \geq 0$$

A questo punto calcoliamo:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} = -2\langle T(u_2,t), T(u_1,t) \rangle = \pm 2$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che, in un punto di minimo, i vettori tangenti a s_1 e s_2 devono essere paralleli.

Quest'ultima espressione ci permette di scrivere la seguente disuguaglianza:

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} \geq 2\sqrt{\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}} \geq 2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} \right| \geq 4$$

Questo risultato contraddice l'ipotesi che la funzione g soddisfa (2.21).

Dalla arbitrarietà di δ segue che, sull'insieme D:

$$g(u_1,u_2,t) \geq m \qquad \Rightarrow \qquad d(u_1,u_2,t) \geq m - \varepsilon t$$

Facendo tendere ε a 0 otteniamo:

$$d(u_1,u_2,t) \geq m > 0 \qquad \forall\ (u_1,u_2,t) \in D$$

Abbiamo dimostrato che d ammette minimo strettamente positivo su $D \cup E$ ossia su $S^1 \times S^1 \times [0,T)$. Quindi la curva $F(\cdot,t)$ è semplice per ogni $t \in [0,T)$.

Non ci addentriamo nella ricerca di ulteriori risultati per un tale processo di deformazione in quanto lo abbiamo applicato ad una curva troppo generica; vedremo nel prossimo capitolo che una ulteriore restrizione sulla curva iniziale, la convessità, garantirà risultati di maggiore interesse.

Capitolo 3

Deformazione di curve convesse

3.1 Introduzione

In questo capitolo assumeremo, come ulteriore condizione, che la curva iniziale $F(\cdot, 0)$ sia convessa; questo ci permetterà di ottenere maggiori risultati sul processo di deformazione.

Dimostreremo che tutte le curve dalla famiglia F sono convesse e che la successione delle curve normalizzate, cioè tali da racchiudere una regione di area π, converge al disco unitario.

Inoltre vedremo che la convergenza al disco unitario non è semplicemente C^0 ma C^∞; questo ci permetterà di concludere che durante il processo di deformazione di curve convesse, se la curva iniziale è priva di singolarità, tutte le curve successive mantengono questa proprietà.

3.2 Equazione di evoluzione della curvatura

Per curve convesse useremo, come parametro, l'angolo θ formato dall'asse x e dalla tangente alla curva per un suo punto.
Ci chiediamo preliminarmente quali funzioni reali k, positive, 2π periodiche, pos-

sono essere considerate come funzioni curvatura di una curva piana, semplice, chiusa, strettamente convessa e C^2.

Lemma 3.2.1. *Una funzione positiva $k = k(\theta)$, 2π periodica, è la funzione curvatura di una curva piana, semplice, chiusa, strettamente convessa, C^2, se e solo se:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{k(\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{k(\theta)}\, d\theta = 0 \tag{3.1}$$

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Supponiamo che k sia la funzione curvatura di una certa curva F che soddisfa le ipotesi richieste: in particolare, essendo F chiusa, si ha che: $\displaystyle\int_0^L \frac{dF}{ds}\, ds = 0$, dunque $\displaystyle\int_0^L T\, ds = 0$.

Ma, per definizione di θ, $T = (\cos\theta, \sin\theta)$ e, per (2.10), $ds = \dfrac{d\theta}{k}$.

Segue che:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{k(\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{k(\theta)}\, d\theta = 0$$

($\Leftarrow$) Per ipotesi k è una funzione positiva e 2π periodica che soddisfa (3.1). A partire da k definiamo la curva $F = (x(\theta), y(\theta))$ dove:

$$x(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{k(\theta)}\, d\theta$$
$$y(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{k(\theta)}\, d\theta$$

Dobbiamo dimostrare che F soddisfa le ipotesi richieste:

1. Dalla (3.1) segue immediatamente che F è chiusa: infatti $F(0,0) = F(2\pi, 2\pi) = 0$.

2. F è strettamente convessa in quanto per ipotesi $k > 0$.

3. F è C^2 in quanto $\dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2} = kN$ e tanto k quanto N sono funzioni continue.

4. F è una curva semplice in quanto la funzione di Gauss di F è iniettiva.

5. Infine la curvatura di F è proprio k; infatti usando la formula della curvatura per curve a velocità arbitraria, se $\overline{k}$ è la curvatura di F, si ottiene:

$$\overline{k} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3}$$

Dove $v = |T(\theta)| = \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{k(\theta)^2} + \frac{\sin^2\theta}{k(\theta)^2}} = \frac{1}{k(\theta)}$.
Otteniamo:

$$\begin{aligned} \overline{k} &= k^3 \cdot \left(\frac{\cos\theta}{k} \cdot \frac{k\cos\theta - k\sin\theta}{k^2} + \frac{\sin\theta}{k} \cdot \frac{k\sin\theta + k'\cos\theta}{k^2} \right) \\ &= \frac{k}{k^3} \cdot k^3 = k \end{aligned}$$

Per determinare l'equazione di evoluzione della curvatura in funzione di θ poniamo $t = \tau$ e passiamo dal sistema di coordinate (u, t) a quello di coordinate (θ, τ); osserviamo che $\frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{\partial}{\partial \tau}$ in quanto la prima derivata è fatta tenendo u costante mentre la seconda è fatta con θ costante.
A questo punto possiamo ricavare l'equazione di evoluzione di k rispetto a τ:

Lemma 3.2.2.

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 \tag{3.2}$$

Dimostrazione
Dalle usuali regole di derivazione a catena segue che:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Ma $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}$ e $\frac{\partial k}{\partial s} = k\frac{\partial k}{\partial \theta}$, dunque:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta}\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + k\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2$$

Inoltre:

$$\frac{\partial^2 k}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(k\frac{\partial k}{\partial \theta}\right) = k\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\frac{\partial k}{\partial \theta}\right) = k\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 + k^2\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}$$

Da (2.15) segue che:

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + k\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 = k\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 + k^2\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3$$

Da cui si ricava facilmente la tesi.

In seguito continueremo ad utilizzare t al posto di τ ma solo per ragioni di comodità; quindi ogni derivazione rispetto a t sarà fatta mantenendo θ costante.

3.3 Deformazione ed equazione del calore

Il teorema che segue stabilisce una importante equivalenza tra il processo di deformazione che stiamo studiando e una equazione differenziale a derivate parziali assimilabile all'equazione del calore.

Sappiamo infatti che un corpo unidimensionale (o con una dimensione sufficientemente maggiore rispetto alle altre due) posto a contatto con due termostati a temperature diverse, se lasciato libero, tende a raggiungere una temperatura uniforme; l'equazione del calore descrive proprio il processo di diffusione della temperatura dalle zone a valori più alti alle zone a temperature minori. Dopo un tempo finito T la temperatura diventa uniforme in tutto il corpo.

Analogamente, se C è una curva non circolare, C avrà punti a curvatura maggiore e punti a curvatura minore; il processo di deformazione è assimilabile ad un processo di diffusione della curvatura; la curvatura "decresce" nei punti dove inizialmente era elevata e "cresce" negli altri punti fino che, dopo un certo tempo T, la curvatura diventa la stessa per tutti i punti della curva, quindi la curva diventa una circonferenza.

Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 3.3.1. *Sia $f : A \longrightarrow R$ funzione di una variabile e di classe C^n in A e sia $\alpha \geq 1$. Se indichiamo con $f^{(n)}(x)$ la derivata di ordine n di f nel punto x, diremo che $f \in C^{n+\alpha}(A)$ se:*

- *$f \in C^n$ in A*
- *Esiste C costante reale tale che:* $\dfrac{|f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)|}{|y-x|^\alpha} \leq C \quad \forall x, y \in A$

Conseguentemente, se $f : A \times B \longrightarrow R$ è una funzione di due variabili, diremo che $f \in C^{(n+\alpha, m+\alpha)}(A \times B)$ se:

- *$f \in C^{(n+\alpha)}(A)$*
- *$f \in C^{(m+\alpha)}(B)$*

Enunciamo ora il teorema che stabilisce l'equivalenza sopra citata; ci limitiamo solo all'enunciato, cenni della dimostrazione si trovano in [7].

Teorema 3.3.2. *Risolvere il problema della deformazione di curve convesse secondo la curvatura è equivalente a trovare la soluzione del seguente problema: $PDE(k)$: Trovare $k : S^1 \times [0, T) \longrightarrow R$ che soddisfi:*

1. *$k \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(S^1 \times [0, T - \varepsilon])$ $\forall \varepsilon > 0$*
2. $\dfrac{\partial k}{\partial t} = k^2 \dfrac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3$
3. *$k(\theta, 0) = \phi(\theta)$ dove ϕ soddisfa:*
   - $\phi \in C^{1+\alpha}(S^1)$
   - $\phi(\theta) > 0$
   - $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\phi(\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{\phi(\theta)}\, d\theta = 0$

3.4 Limitazioni per la curvatura

Mostriamo ora che tutte le curve della famiglia F mantengono la proprietà di essere strettamente convesse a patto che $F(\cdot, 0)$ sia tale.

Lemma 3.4.1. *Se k soddisfa $PDE(k)$ allora $k_{min} = \inf\{k(\theta, t) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ è una funzione non decrescente.*

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che, per un certo $t \in [0,T)$, $k_{min}(t) = k_{min}(0) - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ tale che $k_{min}(0) > \varepsilon$.

Sia $t_0 = \min\{t \in [0,T) \mid k_{min}(t) = k_{min}(0) - \varepsilon\}$; la continuità di k ci assicura che questo minimo è raggiunto in un punto interno (θ_0, t_0).

In tale punto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t}(\theta_0, t_0) &\leq 0\\ \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(\theta_0, t_0) &\geq 0\\ k(\theta_0, t_0) &> 0\end{aligned}$$

Le relazioni sopra scritte contraddicono l'ipotesi che k soddisfa $PDE(k)$ e quindi la funzione k_{min} deve necessariamente non decrescere.

Una volta stabilito che tutte le curve della famiglia F, in accordo alla legge di evoluzione (2.1), sono strettamente convesse, ossia esiste un limite inferiore positivo per la funzione curvatura, ci possiamo chiedere se esiste anche un limite superiore per tale funzione.

L'esistenza di questo limite è strettamente legata a come varia l'area delle regioni di piano racchiuse dalle diverse curve di F: se l'area tende a 0, ossia la famiglia degenera in un punto, avremo che $k \longrightarrow +\infty$ e dunque non troveremo alcun limite superiore.

Ci proponiamo, ora, di dimostrare il seguente teorema:

Teorema 3.4.2. *Se $k : S^1 \times [0,T) \longrightarrow R$ soddisfa $PDE(k)$ e l'area racchiusa dalle curve ha limite inferiore strettamente positivo, allora k è uniformemente limitata su $S^1 \times [0,T)$.*

Per la dimostrazione ci serviremo di tre stime: una di tipo geometrico, una di tipo integrale e una di tipo puntuale; il teorema sarà poi una semplice conseguenza di queste tre stime.

Definiamo innanzitutto la seguente quantità:

$$k^*(t) = \sup\{b \mid k(\theta) > b \ , \ \theta \in [\alpha, \beta] \ , \ \beta - \alpha = \pi\}$$

Teorema 3.4.3 (Stima geometrica). *Se $k(\theta, t)$ è la curvatura di una curva piana, chiusa, convessa, che ha lunghezza L e definisce una regione di piano di area A, allora:*

$$k^*(t) \leq \frac{L}{A}$$

Dimostrazione

Sia M reale positivo tale che $M < k^*(t)$; per definizione di estremo superiore

Figura 3.1: stima geometrica

esiste un intervallo di ampiezza π,cioè del tipo $[a, a+\pi]$, tale che

$$k(\theta, t) > M \qquad \forall \theta \in [a, a+\pi]$$

Questo implica che la curva convessa $F(\theta, t)$ giace nella regione di piano delimitata da due rette parallele (vedi figura 3.1) la cui distanza D è data da:

$$D = \int_a^{a+\pi} \frac{\sin(\theta - a)}{k(\theta, t)} \, d\theta$$

Tale distanza è ovviamente minore di $\dfrac{2}{M}$ in quanto, per ipotesi, nell'intervallo $[a, a+\pi]$, la curva ha curvatura maggiore di M ossia della curvatura di un cerchio

di raggio $\frac{1}{M}$.
Osserviamo che il diametro della curva è certamente minore di $\frac{L}{2}$ mentre l'area è limitata dal prodotto tra il diametro e la larghezza della striscia (a sua volta minore di $\frac{2}{M}$). Dunque $\frac{L}{A} > M$ e, potendo scegliere M arbitrariamente vicino a k^*, otteniamo $k^* \leq \frac{L}{A}$.

Teorema 3.4.4 (Stima integrale). *Se $k^*(t)$ è una funzione limitata in $[0,T)$ allora:*

$$\int_0^{2\pi} \ln k(\theta,t)\ d\theta$$

è una funzione limitata in $[0,T)$.

Per dimostrare la stima integrale faremo uso della disuguaglianza di Wirtinger, di seguito riportata:

Teorema 3.4.5 (Disuguaglianza di Wirtinger). *Se f è una funzione di classe C^2 in un intervallo $[a,b]$ di R tale che $b-a \leq \pi$ e $f(a) = f(b) = 0$, allora:*

$$\int_a^b [f(\theta)]^2\ d\theta \leq \int_a^b \left(\frac{df}{d\theta}\right)^2\ d\theta \qquad (3.3)$$

In particolare vale l'uguaglianza solo per $f(\theta) = \sin(\theta)$.

Dimostrazione

Possiamo effettuare una traslazione in modo che $a = 0$; inoltre possiamo estendere la funzione $f = f(\theta)$ fino a $\theta = \pi$ ponendo $f(\theta) = 0$ per $0 \leq \theta \leq \pi$. Quindi l'intervallo $[a,b]$ è diventato per noi l'intervallo $[0,\pi]$
Se consideriamo l'estensione dispari della funzione f nell'intervallo $[-\pi,0]$, possiamo usare lo sviluppo di f in serie di Fourier in termini di seno, cioè:

$$f(\theta) = \sum_{n\in N} a_n \sin(n\theta)$$

Osserviamo che la lo sviluppo di f in serie di Fourier è una serie assolutamente convergente, infatti, poiché per ipotesi f è di classe C^2 su $[a,b]$, i coefficienti a_n

sono un infinitesimo di ordine $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, quindi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n \sin(n\theta)| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||\sin(n\theta)| \leq +\infty$$

Essendo la serie assolutamente convergente, possiamo calcolare il quadrato della serie facendo il prodotto termine a termine:

$$\begin{aligned}
[f(\theta)]^2 &= \sum_{n\geq 1} a_n^2 \sin^2(n\theta) + 2\sum_{n_1\neq n_2} a_{n_1}a_{n_2}\sin(n_1\theta)\sin(n_2\theta) \\
\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 &= \sum_{n\geq 1} a_n^2 n^2 \cos^2(n\theta) + 2\sum_{n_1\neq n_2} a_{n_1}a_{n_2}n_1 n_2\cos(n_1\theta)\cos(n_2\theta)
\end{aligned}$$

Integrando otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(\theta)]^2 \, d\theta &= \sum_{n\geq 1} a_n^2 \int_a^b \sin^2(n\theta)\, d\theta \\
\int_a^b \left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 d\theta &= \sum_{n\geq 1} a_n^2 n^2 \int_a^b \cos^2(n\theta)\, d\theta
\end{aligned}$$

Facendo un rapido calcolo si trova che:

$$\int_a^b \sin^2(n\theta)\, d\theta = \int_a^b \cos^2(n\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\pi$$

Dunque:

$$\int_a^b [f(\theta)]^2 \, d\theta - \int_a^b \left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 d\theta = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}\pi a_n^2 (1-n^2) \leq 0$$

L'uguaglianza in (3.3) segue immediatamente prendendo $f(\theta) = \sin(\theta)$

Dimostrazione della stima integrale

Usando la (2.15) e, integrando per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} \ln k(\theta,t)\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta,t)}\frac{\partial k}{\partial t}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta,t)}\left(k^2\frac{\partial^2 k}{\partial\theta^2} + k^3\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(k\frac{\partial^2 k}{\partial\theta^2} + k^2\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)^2 + k^2\right] d\theta
\end{aligned}$$

Consideriamo l'insieme $U(t) = \{\theta \mid k(\theta,t) > k^*(t)\}$; la definizione di k^* implica che U è unione numerabile di intervalli aperti disgiunti I_i, ciascuno di ampiezza minore o uguale a π.
Agli estremi di ciascun I_i si ha $k(\theta,t) = k^*(t)$, quindi è possibile applicare la disuguaglianza di Wirtinger nella chiusura di ciascun intervallo I_i alla funzione: $k(\theta,t) - k^*(t)$.
Otteniamo perciò:

$$\int_{\overline{I_i}} k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 \leq 2k^* \int_{\overline{I_i}} k(\theta,t)\ d\theta$$

Sommando su tutti gli I_i otteniamo:

$$\int_U k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\ d\theta \leq 2k^*(t) \int_U k(\theta,t)\ d\theta \leq \int_0^{2\pi} k(\theta,t)\ d\theta \tag{3.4}$$

Sia ora V il complementare di U; sull'insieme V abbiamo che:

$$\int_V k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\ d\theta \leq 2k^*(t) \int_0^{2\pi} k(\theta,t)\ d\theta + 2\pi[k^*(t)]^2 \tag{3.5}$$

Sommando (3.4) e (3.5) otteniamo:

$$\int_0^{2\pi} k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\ d\theta \leq 2k^*(t) \int_0^{2\pi} k(\theta,t)\ d\theta + 2\pi[k^*(t)]^2$$

Ricordando che $\dfrac{\partial L}{\partial t} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} k^2\ ds$ e che $\dfrac{d\theta}{ds} = k$ si ha:

$$\int_0^{2\pi} k\ d\theta = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

da cui:

$$\int_0^{2\pi} k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\ d\theta \leq 2k^*(t)\left(-\frac{\partial L}{\partial t}\right) + 2\pi[k^*(t)]^2$$

Per ipotesi k^* è limitata su $[0,T)$, dunque $k^*(t) < M$ $\forall t \in [0,T)$ con M reale positivo. Integrando tra 0 e t ambo i membri e sfruttando la limitatezza di k^* si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} \ln k(\theta,t)\ d\theta \leq \int_0^{2\pi} k(\theta,0)\ d\theta + 2M(L(0) - L(t)) + 2\pi M^2 t$$

Teorema 3.4.6 (Stima puntuale). *Se* $\int_0^{2\pi} \ln k(\theta,t)\ d\theta$ *è una funzione di* t *limitata su* $[0,T)$ *allora* $k(\theta,t)$ *è uniformemente limitata su* $S^1 \times [0,T)$

Per dimostrare la stima puntuale utilizzeremo due lemmi:

Lemma 3.4.7. *Se* $\int_0^{2\pi} \ln k(\theta,t)\ d\theta$ *è una quantità limitata su* $[0,T)$, *allora, per ogni* $\delta > 0$ *esiste una costante reale positiva* C *tale che* $k(\theta,t) \leq C$ *eccetto che su intervalli di ampiezza minore o uguale a* δ.

Dimostrazione

Fissato δ, sia per assurdo: $k(\theta,t) \geq C$ per $\theta \in [a,b]$ e $b-a > \delta$.
Possiamo dividere l'intervallo $[0,2\pi]$ in due parti: l'intervallo $[a,b]$ di ampiezza maggiore di δ e l'intervallo restante di ampiezza minore di $2\pi - \delta$.
Avremo che:

$$\int_0^{2\pi} \ln k(\theta,t)\ d\theta = \int_a^b \ln k(\theta,t)\ d\theta + \int_{2\pi-[a,b]} \ln k(\theta,t)\ d\theta$$

Dunque, ricordando che la funzione $k_{min}(t)$ è non decrescente, possiamo concludere che:

$$\int_0^{2\pi} \ln k(\theta,t)\ d\theta \geq \delta \ln C + (2\pi - \delta) \ln k_{min}(0)$$

Se C è sufficientemente grande abbiamo una contraddizione quindi:

$$b - a > \delta \quad \Rightarrow \quad k(\theta,t) < C \ \ \forall \theta \in [a,b]$$

Lemma 3.4.8. *E' possibile trovare una costante* D *tale che:*

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\ d\theta \leq \int_0^{2\pi} k^2\ d\theta + D \qquad 0 \leq t < T \tag{3.6}$$

Dimostrazione

Deriviamo rispetto a t la differenza tra i termini di (3.6):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} \left[k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\right] d\theta = 2\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} \left(k\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k}{\partial \theta}\frac{\partial^2 k}{\partial \theta \partial t}\right) d\theta$$

Integrando per parti:

$$\int_0^{2\pi} -\frac{\partial k}{\partial \theta}\frac{\partial^2 k}{\partial \theta \partial t} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}\frac{\partial k}{\partial t} d\theta$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\left[k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\right] d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(k + \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}\right)\frac{\partial k}{\partial t}\, d\theta$$

Usando l'equazione di evoluzione:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\left[k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\right] d\theta = 2\int_0^{2\pi} k^2 \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k\right)^2 \, d\theta \geq 0$$

Dunque, integrando tra 0 e t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\left[k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2\right] d\theta \geq 0$$

da cui segue la tesi.

Dimostrazione della stima puntuale

Per ipotesi $\ln \displaystyle\int_0^{2\pi} k(\theta, t)\, d\theta$ è una funzione limitata, dunque, per il lemma (3.4.7), fissato δ, esiste C costante positiva tale che $k(\theta, t) \leq C$ eccetto che su intervalli di ampiezza minore o uguale a δ.

Sia $[a, \varphi]$ uno di questi intervalli; per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$k(\varphi) - k(a) = \int_a^{\varphi} \frac{\partial k}{\partial \theta}\, d\theta$$

Otteniamo:

$$k(\varphi) = k(a) + \int_a^{\varphi} \frac{\partial k}{\partial \theta}\, d\theta \leq C + \sqrt{\delta}\left(\int \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 \, d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

E per il lemma (3.4.8):

$$k(\varphi) \leq C + \sqrt{\delta}\left(\int_0^{\varphi} k^2 \, d\theta + D\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sia k_{max} il massimo valore di k; allora vale la seguente relazione:

$$k_{max} \leq C + \sqrt{\delta}(2\pi k_{max}^2 + D)^{\frac{1}{2}} \leq C + 2\pi\sqrt{\delta}k_{max} + \sqrt{\delta}D$$

Da cui segue la tesi.

Dimostrazione del teorema 3.4.2
Sappiamo che $\dfrac{\partial L}{\partial t} < 0$ e dunque la lunghezza delle curve decresce durante il processo di evoluzione; se l'area ha limite inferiore strettamente positivo, poiché $k^*(t) < \dfrac{L}{A}$ (stima geometrica), si ha che k^* è una quantità limitata su $[0, T)$.
Dalla stima integrale segue che $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln k(\theta, t)\, d\theta$ è una quantità limitata su $[0, T)$.
Infine, dalla stima puntuale, otteniamo che $k(\theta, t)$ è uniformemente limitata su $S^1 \times [0, T)$.

3.5 Limitazioni per le derivate della curvatura

Nella sezione precedente abbiamo dimostrato che, sotto l'ipotesi che l'area delle diverse curve di F sia strettamente positiva, la funzione k è uniformemente limitata su $S^1 \times [0, T)$.

Ci proponiamo, ora, di dimostrare che non solo k ma anche le derivate di k rispetto θ, di ogni ordine, sono limitate su $S^1 \times [0, T)$. Questo ci permetterà di dimostrare che il problema $PDE(k)$ ammette soluzione k fino a che l'area delle curve si annulla.

Conveniamo di indicare con k' la derivata di k rispetto a θ.

Lemma 3.5.1. *Se k è limitata allora anche k' è limitata.*

Per dimostrare questo lemma faremo uso del seguente principio del massimo (maggiori dettagli, compresa la dimostrazione, si trovano in [10]):

Teorema 3.5.2 (Principio di massimo per equazioni paraboliche). *Sia E un dominio normale del piano (x, t) e supponiamo che in tale dominio:*

$$Lu = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + hu - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

con L uniformemente parabolico (quindi con l'ulteriore condizione che $a \geq \mu > 0$), a e b funzioni limitate in E ed $h \leq 0$.

Se u ammette massimo $M \geq 0$ in un punto (x_1, t_1) interno ad E, allora $u \equiv M$ su tutti i segmenti $t = t_0$ contenuti in E con $t_0 < t_1$.

Useremo, inoltre, il seguente teorema, la cui dimostrazione si trova in [9]:

Teorema 3.5.3. *Se $y : [a, b] \longrightarrow R$ è una funzione continua e positiva tale che:*

$$y'(x) \leq My(x) + N$$

con M e N costanti positive, allora:

$$0 \leq y(x) \leq \left(y(a) + \frac{M}{N} \right) e^{M(x-a)} - \frac{N}{M} \ \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione del lemma (3.5.1)

Sfruttando l'equazione di evoluzione per k si ha:

$$\frac{\partial^2 k}{\partial t \partial \theta} = k^2 \frac{\partial^3 k}{\partial \theta^3} + 2k \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + 3k^2 \frac{\partial k}{\partial \theta} \tag{3.7}$$

Se poniamo $u = \dfrac{\partial k}{\partial \theta}$ allora, in base a (3.7), u soddisfa:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} u + 2ku \frac{\partial u}{\partial \theta} + 3k^2 u$$

Se poniamo $v = e^{\alpha t} u$, allora $u = e^{-\alpha t} v$ e otteniamo che v verifica l'equazione:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + 2ke^{-\alpha t} v \frac{\partial v}{\partial \theta} + (3k^2 + \alpha) v$$

Se scegliamo $\alpha \leq -\max 3k^2$ le ipotesi del principio di massimo sono verificate. Allora proviamo che, $\forall t \in [0, T)$:

$$\max_{S^1 \times [0,T)} |v(\theta, t)| = \max_{S^1} |u(\theta, 0)| \tag{3.8}$$

Infatti, sia M il massimo di $|v(\theta, t)|$ su $S^1 \times [0, T)$; se M è assunto in un punto del tipo $(\theta, 0)$ al variare di θ tra 0 e 2π, allora (3.8) è ovvia. Altrimenti, se M è assunto in un punto (θ_1, t_1) con $t_1 > 0$, per il principio di massimo, deve essere $|v(\theta, t)| = M \ \forall t < t_1$ e in particolare anche per $t = 0$, quindi (3.8) è vera.

Ma allora:

$$|u(\theta, t)| = |v(\theta, t)| e^{-\alpha t} \leq \left(\max_{S^1} u(\theta, o) \right) e^{-\alpha t}$$

Ricordando che $u = \dfrac{\partial k}{\partial \theta} = k'$ otteniamo che k' è una funzione limitata.

Lemma 3.5.4. *Se k e k' sono funzioni limitate allora anche* $\int_0^{2\pi} (k'')^4 \, d\theta$ *è limitato.*

Dimostrazione

Usando l'equazione di evoluzione per k e l'integrazione per parti otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k'')^4 \, d\theta &= 4 \int_0^{2\pi} (k'')^3 \frac{\partial}{\partial t}(k'') \, d\theta \\
&= 4 \int_0^{2\pi} (k'')^3 (k^2 k'' + k^3)'' \, d\theta \\
&= 4 \int_0^{2\pi} (k'')^3 (2kk'k'' + k^2 k''' + 3k^2 k')' \, d\theta \\
&= -12 \int_0^{2\pi} (k'')^2 (k''')(2kk'k'' + k^2 k''' + 3k^2 k') \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [-12k^2 (k'')^2 (k''')^2 - 24kk'(k'')^3 k''' - 36k^2 (k'')^2 k'''] \, d\theta
\end{aligned}
$$

Usiamo la disuguaglianza $ab \leq \frac{4a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$, con $\varepsilon = 1$, per maggiorare il secondo e terzo termine:

$$
\begin{aligned}
-24kk'(k'')^3 k''' = -\sqrt{2} kk''k''' \cdot \frac{24}{\sqrt{2}} k'(k'')^2 &\leq 8k^2 (k'')^2 (k''')^2 + C_1 (k')^2 (k'')^4 \\
-36k^2 k'(k'')^2 k''' = -kk''k''' \cdot 36kk''k' &\leq 4k^2 (k'')^2 (k''')^2 + C_2 k^2 (k')^2 (k'')^2
\end{aligned}
$$

Otteniamo quindi:

$$
\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} (k'')^4 \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} [C_1 (k')^2 (k'')^4 + C_2 k^2 (k')^2 (k'')^2] \, d\theta
$$

Per ipotesi k e k' sono limitate, inoltre, dalla disuguaglianza di Schwartz segue:

$$
\int_0^{2\pi} (k'')^2 \, d\theta \leq \left(\int_0^{2\pi} 1^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} (k'')^4 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (k'')^4 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}}
$$

Se poniamo $f = \int_0^{2\pi} (k'')^4$ possiamo scrivere:

$$
\frac{\partial f}{\partial t} \leq A_1 f + A_2 \sqrt{f} \tag{3.9}
$$

Dividendo ambo i membri di (3.9) per $\sqrt{f}$ e ricordando che $\frac{d}{dt}\sqrt{f} = \frac{\frac{df}{dt}}{2\sqrt{f}}$, otteniamo:

$$2\frac{d}{dt}\sqrt{f} \leq A_1\sqrt{f} + A_2$$

Poniamo $\sqrt{f} = v$ e indichiamo con v' la derivata di v rispetto a t. Otteniamo:

$$v'(t) \leq av(t) + b$$

Consideriamo ora il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} w'(t) &= & aw(t) + b \\ w(0) &= & v(0) \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è data da

$$w(t) = -\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + v(0)\right) e^{at}$$

Ma $v(t) \leq w(t)$, quindi:

$$\sqrt{f} \leq -\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + v(0)\right) e^{at}$$

da cui

$$f \leq \frac{b^2}{a^2} + Ce^{2\alpha t}$$

Lemma 3.5.5. *Se k, k', $\int_0^{2\pi} (k'')^4 \, d\theta$ sono funzioni limitate allora anche $\int_0^{2\pi} (k''')^2 \, d\theta$ è limitato.*

Dimostrazione

Come nella dimostrazione del lemma precedente, calcoliamo la derivata rispetto a t di $f = \int_0^{2\pi} (k''')^2 \, d\theta$ e, usando la solita disuguaglianza, maggioriamo alcuni termini ottenendo infine:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \leq C_1 \int_0^{2\pi} (k')^2 (k''')^2 \, d\theta + C_2 \int_0^{2\pi} (k'')^4 \, d\theta + C_3 \int_0^{2\pi} \frac{(k')^4}{k^2} (k'')^2 \, d\theta + C_4 \int_0^{2\pi} k^2 (k'')^2 \, d\theta + C_5 \int_0^{2\pi} (k')^4 \, d\theta$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \leq A_1 f + A_2$$

Seguendo la dimostrazione del lemma precedente si ottiene la tesi.

Corollario 3.5.6. *Se vale il lemma (3.5.5) allora* k'' *è limitata.*

Dimostrazione

E' sufficiente applicare il seguente risultato:

$$\max_{\theta\in S^1}|f|^2 \leq C\int_0^{2\pi}\left(|f'|^2+f^2\right)\,d\theta$$

alla funzione $k''(\theta,t)$.

Lemma 3.5.7. *Se* k, k', k'', *sono uniformemente limitate, allora questo vale anche per* k''' *e per tutte le derivate di ordine successivo di* k.

Dimostrazione

Segue dalla versione del principio del massimo data sopra. Deriviamo k''' rispetto a t e, usando le limitazioni su k, k' e k'' e il principio del massimo, otteniamo una limitazione per k'''.

A questo punto, se k, k',...,$k^{(n-1)}$ sono limitati, allora:

$$\frac{\partial}{\partial t}k^{(n)} \leq k^2k^{(n+2)} + 2nkk'k^{(n+1)} + Ck^{(n)} + C$$

Quindi $k^{(n)}$ è limitata su intervalli finiti.

A questo punto possiamo dimostrare il seguente teorema:

Teorema 3.5.8. *La soluzione al problema* $PDE(k)$ *continua ad esistere fino a che l'area delle regioni di piano racchiuse dalle curve tende a* 0.

Dimostrazione

Finché l'area A è strettamente positiva, possiamo limitare k e tutte le sue derivate rispetto a θ. Usando l'equazione di evoluzione per k possiamo anche limitare le derivate temporali di k.

Tutto ciò implica che, se per assurdo $A(t)$ non tende a 0, sarebbe possibile estendere la soluzione k al problema oltre T. Dunque l'area deve necessariamente azzerarsi quando $t \longrightarrow T$.

3.6 Convergenza "C^0 " alla circonferenza

In questa sezione ci proponiamo di dimostrare che, quando l'area di una curva convessa piana, soggetta alla deformazione di cui sopra, tende a 0, il rapporto isoperimetrico tende a 4π.

Inoltre faremo vedere che, se la famiglia di curve è normalizzata da una omotetia del piano che fa in modo che ogni curva della famiglia racchiuda una regione piana di area π, allora la nuova famiglia di curve converge al disco unitario.

Riprendiamo la famiglia di curve piane, convesse: $F : S^1 \times [0,T) \longrightarrow R^2$ definita nel seguente modo:

$$(u,t) \longrightarrow F(u,t) = (x(u,t), y(u,t)) \quad s \in [0,L] \;\; t \in [0,T)$$

F è soggetta ad un processo di deformazione regolato dalla seguente legge:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = kN$$

In accordo ad un tale processo, la funzione supporto di $F(u,t)$ è

$$p(u,t) = -\langle F(u,t), N(u,t)\rangle \tag{3.10}$$

Se s rappresenta, come al solito, l'ascissa curvilinea delle curve di F, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^L \langle X, -N\rangle \; ds = \frac{1}{2}\int_0^L p \; ds \\ L &= \int_0^L pk \; ds \end{aligned}$$

Continuano a valere, chiaramente, i risultati trovati nel capitolo 2, ossia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= -2\pi \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\int_0^L k^2 \; ds \end{aligned}$$

Se $F(\cdot,t)$ rappresenta la curva all'istante t, riscalando il piano R^2 con una omotetia di fattore $\sqrt{\frac{\pi}{A(t)}}$, si ottiene una nuova curva $\Omega(\cdot,t) = \sqrt{\frac{\pi}{A(t)}}F(\cdot,t)$ che racchiude una regione di piano la cui area è π

Per studiare il limite della successione delle curve di F è più conveniente considerare come evolvono le regioni di piano convesse racchiuse da tali curve.

Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 3.6.1. *Siano A e B due insiemi compatti e convessi. Sia*

$$A_\varepsilon = \{x \in R^2 \mid dist(x, A) \leq \varepsilon\}$$

dove $dist(x, A) = \min\{dist(a, b) \mid b \in B\}$.
Definiamo la distanza di Hausdorff ($d_H(A, B)$) tra A e B nel seguente modo:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subseteq B_\varepsilon \quad e \quad B \subseteq A_\varepsilon\}$$

Il teorema di selezione di Blaschke ci garantisce che ogni collezione infinita di insiemi convessi, che giacciono in una regione limitata di R^2, ammette una sottosuccessione convergente, nella metrica di Hausdorff, ad un insieme convesso; questo risultato sarà usato più volte in questa sezione.

Possiamo definire, per ogni insieme G convesso:

- r_{in} raggio della più grande circonferenza inscrivibile in G.
- r_{out} raggio della più piccola circonferenza in cui G è inscrivibile.

Il teorema che ci proponiamo di dimostrare in questa sezione è il seguente:

Teorema 3.6.2. *Sia F una famiglia di curve piane, convesse, C^2, che soddisfano l'equazione di evoluzione $\dfrac{\partial F}{\partial t} = kN$ per $0 < t < T$. Siano $A(t)$ e $L(t)$ rispettivamente l'area e la lunghezza della curva $F(\cdot, t)$.*
Se $\lim\limits_{t \longrightarrow T} A(t) = 0$ allora:

$$\lim_{t \longrightarrow T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi$$

Inoltre le curve normalizzate $\Omega(\cdot, t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{A} F(\cdot, t)}$ delimitano una regione di piano convessa $H(t)$ che converge al disco unitario nella metrica di Hausdorff.

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di tre lemmi:

Lemma 3.6.3. *Se* $\lim_{t \longrightarrow T} A(t) = 0$ *allora:*

$$\liminf_{t \longrightarrow T} L(t) \left(\int_0^L k^2 \, ds - \pi \frac{L(t)}{A(t)} \right) \leq 0$$

Dimostrazione

Consideriamo il rapporto isoperimetrico $\dfrac{L^2}{A}$ e deriviamolo rispetto a t:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L^2}{A} \right) = \frac{(L^2)_t A - A_t L^2}{A^2} = \frac{2LL_t A - A_t L^2}{A^2}$$

Ma: $L_t = -\displaystyle\int_0^L k^2 \, ds$ e $A_t = -2\pi$.

Otteniamo dunque:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L^2}{A} \right) = -2\frac{L}{A} \left(\int_0^L k^2 \, ds - \pi \frac{L}{A} \right)$$

Supponiamo per assurdo che, in un intorno di T:

$$L \left(\int_0^L k^2 \, ds - \pi \frac{L}{A} \right) > \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$$

Allora $\left(\dfrac{L^2}{A} \right)_t \leq -2\dfrac{\varepsilon}{A} = \dfrac{\varepsilon}{\pi} \ln(A)_t$ per $t_1 < t < T$.

Integrando ambo i membri tra t_1 e t si ottiene:

$$\frac{L^2}{A}(t) - \frac{L^2}{A}(t_1) \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \ln(A(t)) - \frac{\varepsilon}{\pi} \ln(A(t_1))$$

Da cui segue banalmente:

$$\frac{L^2}{A}(t) \leq \frac{L^2}{A}(t_1) + \frac{\varepsilon}{\pi} \ln(A(t)) - \frac{\varepsilon}{\pi} \ln(A(t_1))$$

A questo punto è sufficiente osservare che il termine a sinistra è sempre strettamente positivo (dalla disuguaglianza isoperimetrica: $\dfrac{L^2}{A} \geq 4\pi$) mentre il termine a destra tende a $-\infty$ quando $A(t)$ tende a 0.

Prima di procedere è necessario introdurre una disuguaglianza che verrà usata frequentemente:

Teorema 3.6.4 (Disuguaglianza di Bonnesen). *Sia F una curva piana, semplice, chiusa, di lunghezza L, che delimita una regione G di area A; siano r e R rispettivamente il raggio della più grande circonferenza inscrivibile in G e il raggio della più piccola circonferenza circoscrivibile a G. Allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$L^2 - 4\pi A \geq \pi^2 (R - r)^2$$

Per la dimostrazione e ulteriori dettagli vedere [8].

Lemma 3.6.5. *Esiste un funzionale non negativo $U = U(F)$, definito per ogni curva F convessa di classe C^1, e che soddisfa:*

$$LA(1 - U(F)) \geq \pi \int_0^L p^2 \, ds \tag{3.11}$$

Data una successione di curve convesse F_i tali che $\lim_{i \longrightarrow \infty} U(F_i) = 0$, possiamo considerare la successione delle curve normalizzate $\Omega_i = \sqrt{\frac{\pi}{A}} F_i$: se le Ω_i giacciono in una regione di piano limitata allora la successione delle regioni di piano H_i delimitate dalle curve converge al disco unitario nella metrica di Hausdorff.
Infine $U(F) = 0$ se e solo se F è un cerchio.

Dimostrazione

Per prima cosa dimostriamo che, per curve convesse simmetriche rispetto all'origine, vale:

$$LA - \pi \int_0^L p^2 \, ds \geq LA \cdot E(F) \tag{3.12}$$

dove $E(F)$ è un funzionale non negativo definito nel seguente modo:

$$E(F) = 1 + \frac{\pi r_{in} r_{out}}{A} - \frac{2\pi (r_{out} + r_{in})}{L}$$

Dalla disuguaglianza di Bonnesen segue che:

$$rL - A - \pi r^2 \geq 0 \qquad r_{in} \leq r \leq r_{out} \tag{3.13}$$

Vale = nella relazione sopra per $r = r_{out}$ solo se la curva in questione è una circonferenza.

In particolare, il termine a sinistra di (3.13) è una funzione concava di r che indicheremo con $g(r)$. Per quanto detto, il grafico di $g(r)$ sta sopra la retta passante per i punti: $(r_{in}, r_{in}L - A - \pi r_{in}^2)$ e $(r_{out}, r_{out}L - A - \pi r_{out}^2)$

Dunque:

$$rL - A - \pi r^2 \geq \frac{(r - r_{in})(r_{out}L - A - \pi r_{out}^2)}{r_{out} - r_{in}} + \frac{(r_{out} - r)(r_{in}L - A - \pi r_{in}^2)}{r_{out} - r_{in}} \geq 0 \tag{3.14}$$

Per curve convesse simmetriche rispetto all'origine vale: $r_{in} \leq p \leq r_{out}$.

Sostituendo p ad r ed integrando tra 0 e L otteniamo:

$$N \geq \int_0^L \left(\frac{(r_{out} - p)(r_{in}L - A - \pi r_{in}^2)}{r_{out} - r_{in}} + \frac{(p - r_{in})(r_{out}L - A - \pi r_{out}^2)}{r_{out} - r_{in}} \right) ds$$

Dove $N = \displaystyle\int_0^L (pL - A - \pi p^2)\ ds$.

A questo punto osserviamo che:

$$\begin{aligned} N &= L \int_0^L p\ ds - A \int_0^L ds - \pi \int_0^L p^2\ ds \\ &= 2LA - AL - \pi \int_0^L p^2\ ds \\ &= LA - \pi \int_0^L p^2\ ds \end{aligned}$$

Per i due addendi di (3.14) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{r_{out}L - A - \pi r_{out}^2}{r_{out} - r_{in}} \int_0^L (p - r_{in})\ ds &= \frac{r_{out}L - A - \pi r_{out}^2}{r_{out} - r_{in}} (2A - r_{in}L) \\ \frac{r_{in}L - A - \pi r_{in}^2}{r_{out} - r_{in}} \int_0^L (r_{out} - p)\ ds &= \frac{r_{in}L - A - \pi r_{in}^2}{r_{out} - r_{in}} (r_{out}L - 2A) \end{aligned}$$

Sommando le due ultime espressioni trovate, otteniamo che il termine a destra di (3.12) è:

$$LA \left(1 + \frac{\pi}{A} r_{in} r_{out} - 2\frac{\pi}{L}(r_{out} - r_{in}) \right)$$

Da cui, osservando l'espressione in parentesi tonda, otteniamo:

$$LA - \pi \int_0^L p^2\ ds \geq LA \cdot E(F)$$

Ponendo $U = E$ abbiamo, non solo dimostrato l'esistenza di una tale funzionale, ma anche determinato la sua espressione analitica, ossia:

$$U = 1 + \frac{\pi r_{in} r_{out}}{A} - \frac{2\pi(r_{out} + r_{in})}{L}$$

Consideriamo ora una famiglia di curve chiuse convesse F_i simmetriche rispetto all'origine e sia $\Omega_i = \sqrt{\frac{\pi}{A}} F_i$ la successione delle curve normalizzate; possiamo osservare che il funzionale U è invariante per omotetie di R^2, quindi:

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} U(F_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{i \longrightarrow \infty} U(\Omega_i) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \lim_{i \longrightarrow \infty} U(F_i) = 0$$

Assumiamo che le regioni di piano H_i si trovino in una regione limitata di R^2; per il teorema di Blaschke esiste una sottosuccessione $\{H_{i_k}\}$ che converge ad un insieme limite convesso H_∞.
Siccome A, L, r_{in}, r_{out} variano in maniera continua su insiemi convessi, anche il funzionale U, espresso in termini di tali funzioni continue, sarà un funzionale continuo. Dunque:

$$U(H_\infty) = \lim_{i \longrightarrow \infty} (H_{i_k}) = 0$$

Quindi, dalla prima parte della dimostrazione, segue che la successione H_i converge al disco unitario nella metrica di Hausdorff.
A questo punto ci resta da estendere, a generiche curve convesse, i risultati provati per curve simmetriche rispetto all'origine.
Osserviamo preliminarmente il seguente fatto:

Per ogni curva convessa F, è possibile trovare un segmento che divide in due parti uguali la regione di piano racchiusa da F, in modo che, le rette tangenti condotte dagli estremi del segmento, siano parallele.

Per dimostrare questo fatto osserviamo che, per ogni punto $x(s)$ sulla curva, esiste un unico punto $y(s)$ tale che il segmento che ha per estremi $x(s)$ e $y(s)$ divide in due parti uguali l'area di F e le tangenti condotte per $x(s)$ e $y(s)$ sono parallele; basta infatti definire su ogni punto della curva la funzione G che opera nel seguente modo:

$$G(x(s)) =< T_{x(s)} \wedge T_{y(s)}), n >$$

dove $T_{x(s)}$ e $T_{y(s)}$ sono versori tangenti alla curva nei punti $x(s)$ e $y(s)$, $\wedge$ rappresenta il prodotto vettoriale e n è il vettore normale al piano, orientato positivamente. Siccome la funzione G è continua, si ha che $G(x(s)) = -G(y(s))$; dal teorema dei valori intermedi, segue che esiste $s_1 \in [0, L]$ tale che $G(x(s_1)) = 0$ cioè $T_{x(s_1)} = -T_{y(s_1)}$.
Possiamo scegliere un sistema di coordinate in modo che il segmento che divide in due parti l'area definita dalla curva F coincida con l'asse delle ascisse e in modo che l'origine sia proprio il punto medio di tale segmento.

Possiamo dividere la curva F in due parti: la curva che sta sopra l'asse x e

Figura 3.2: lemma 3.6.5

che indicheremo con F_1 e la curva restante che chiameremo F_2. Evidentemente $F_1 \cup F_2 = F$ e l'area delle regioni definite da F_1 e F_2 è la stessa.
Osserviamo che l'unione delle curve F_1 e $-F_1$ (dove $-F_1$ è la curva simmetrica di F_1 rispetto all'origine) costituisce una nuova curva convessa che definisce una regione di piano con area pari a quella di F.

Se indichiamo con A l'area definita dalla curva F e con L_1 la lunghezza della curva F_1, otteniamo che la nuova curva $F_1 \cup (-F_1)$ ha lunghezza $2L_1$ e delimita una regione di area A.
Possiamo perciò applicare alla curva $F_1 \cup (-F_1)$ i risultati ottenuti precedentemente per curve convesse simmetriche rispetto all'origine ottenendo:

$$2L_1A - \pi \int_{F_1 \cup (-F_1)} p^2 \, ds \geq 2L_1A \cdot U(F_1 \cup (-F_1))$$

ossia:

$$L_1A - \pi \int_{F_1} p^2 \, ds \geq L_1A \cdot U(F_1 \cup (-F_1)) \tag{3.15}$$

Ragionando esattamente allo stesso modo per la curva F_2 otteniamo:

$$L_2A - \pi \int_{F_2} p^2 \, ds \geq L_2A \cdot U(F_2 \cup (-F_2)) \tag{3.16}$$

Sommando membro a membro (3.15) e (3.16):

$$LA - \pi \int_F p^2 \, ds \geq LA \left(\frac{L_1}{L} \, U(F_1 \cup (-F_1)) + \frac{L_2}{L} \, U(F_2 \cup (-F_2)) \right) \tag{3.17}$$

Sia $M(F)$ l'estremo superiore della somma a destra di (3.17); se Ω è la curva normalizzata è facile verificare che $M(\Omega) = M(F)$, quindi anche M è invariante per omotetie di R^2.
Per la curva $F_1 \cup (-F_1)$ la disuguaglianza isoperimetrica assicura che:

$$\frac{(2L_1)^2}{A} \geq 4\pi \quad \Rightarrow \quad L_1 > \pi$$

Se la lunghezza L di F è minore di una certa costante C allora:

$$F(\Omega) \geq \frac{L_1}{L} \, U(F_1 \cup (-F_1)) \geq \frac{\pi}{C} \, U(F_1 \cup (-F_1))$$
$$F(\Omega) \geq \frac{L_2}{L} \, U(F_2 \cup (-F_2)) \geq \frac{\pi}{C} \, U(F_2 \cup (-F_2))$$

Inoltre:

$$r_{in}(\Omega) \geq \min\{r_{in}(\Omega_1 \cup (-\Omega_1)) \; , \; r_{in}(\Omega_2 \cup (-\Omega_2))\} \tag{3.18}$$

$$r_{out}(\Omega) \leq \max\{r_{out}(\Omega_1 \cup (-\Omega_1)) \; , \; r_{out}(\Omega_2 \cup (-\Omega_2))\} \tag{3.19}$$

Data una sequenza Ω_i di curve convesse, chiuse, normalizzate, contenute in una regione limitata di piano, è possibile dimostrare che le loro lunghezze sono minori della lunghezza del contorno della regione piana che le contiene.
Se $\lim_{i\longrightarrow\infty} M(\Omega_i) = 0$ allora il funzionale U, applicato alle curve simmetrizzate, tenderà a 0. Dalla prima parte della dimostrazione segue che le curve simmetrizzate definiscono una regione di piano che converge al disco unitario. In particolare, il raggio interno e il raggio esterno delle curve simmetrizzate convergono entrambi ad 1 e quindi, per (3.18) e (3.19), anche r_{in} e r_{out} della curva normalizzata Ω convergeranno ad 1: questo a sufficiente a concludere che la successione delle regioni di piano racchiuse dalle Ω_i converge al disco unitario nella metrica di Hausdorff.

Lemma 3.6.6. *Il funzionale $U(F)$, con F curva convessa di classe C^2, soddisfa la seguente relazione:*

$$\left(\int_0^L k^2\ ds\right)(1-U(F)) - \pi\frac{L}{A} \geq 0$$

Dimostrazione
Ricordando che $L = \displaystyle\int_0^L pk\ ds$ e usando la disuguaglianza di Schwartz otteniamo:

$$L = \int_0^L pk\ ds \leq \left(\int_0^L p^2\ ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^L k^2\ ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

Poiché tutte le quantità in gioco sono positive, elevando al quadrato ambo i membri la disuguaglianza si mantiene:

$$L^2 \leq \left(\int_0^L p^2\ ds\right)\left(\int_0^L k^2\ ds\right)$$

Moltiplicando ambo i membri per π e sviluppando i calcoli, otteniamo:

$$\frac{\pi L^2}{\int_0^L k^2\ ds} \leq \pi\int_0^L p^2\ ds$$

Usando il lemma (3.6.5):

$$\frac{\pi L^2}{\int_0^L k^2\ ds} \leq LA(1-U(F))$$

da cui si ottiene facilmente:

$$\pi L \leq A(1-U(F))\left(\int_0^L k^2\ ds\right)$$

Dividendo per A si ottiene infine:

$$\left(\int_0^L k^2\ ds\right)(1-U(F)) - \pi\frac{L}{A} \geq 0$$

Dimostrazione del teorema 3.6.2

Dal lemma precedente:

$$\left(\int_0^L k^2\ ds\right)(1-U(F)) - \pi\frac{L}{A} \geq 0$$

Sviluppando i prodotti si ottiene:

$$\int_0^L k^2\ ds - \pi\frac{L}{A} \geq U(F)\int_0^L k^2\ ds \tag{3.20}$$

Sappiamo che per una curva chiusa, semplice e convessa, la curvatura totale è 2π, ossia $\int_0^L k\ ds = 2\pi$.
Usando la disuguaglianza di Schwartz:

$$\int_0^L k\ ds = \int_0^L k \cdot 1\ ds \leq \left(\int_0^L k^2\ ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^L ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

Elevando al quadrato come prima:

$$L\int_0^L k^2\ ds \geq \left(\int_0^L k\ ds\right)^2 = (2\pi)^2 = 4\pi^2$$

Abbiamo ottenuto:

$$L\int_0^L k^2\ ds \geq 4\pi^2$$

Moltiplicando ambo i membri di (3.20) per L otteniamo:

$$L\left(\int_0^L k^2\ ds - \pi\frac{L}{A}\right) \geq L\left(\int_0^L k^2\ ds\right)U(F)$$

da cui:

$$L\left(\int_0^L k^2\ ds - \pi\frac{L}{A}\right) \geq 4\pi^2 U(F)$$

Dal lemma (3.6.3) otteniamo l'esistenza di una sottosuccessione di curve F_i tali che:

$$\liminf_{t \longrightarrow T} L \left(\int_0^L k^2 \, ds - \pi \frac{L}{A} \right) = 0$$

Essendo U un funzionale non negativo si avrà che $U(F_i(t)) \longrightarrow 0$ se $t \longrightarrow T$.
Facciamo vedere, ora, che le curve normalizzate si trovano in una regione di piano limitata; è importante la scelta del centro di omotetia per riscalare il piano.
Ricordando che:

$$\left(\frac{L^2}{A} \right)_t = -2\frac{L}{A} \left(\int_0^L k^2 \, ds - \pi \frac{L}{A} \right)$$

e avendo ottenuto che:

$$L \left(\int_0^L k^2 \, ds - \pi \frac{L}{A} \right) \geq U(F) \int_0^L k^2 \, ds \geq 0$$

otteniamo $\left(\frac{L^2}{A} \right)_t \leq 0$ e dunque il rapporto isoperimetrico $\left(\frac{L^2}{A} \right)$ decresce durante il processo di deformazione. In un certo senso, possiamo dire che la curva diventa via via più circolare.
Sfruttando la disuguaglianza di Bonnesen possiamo scrivere:

$$\left(\frac{L^2}{A} \right) - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A}(r_{out} - r_{in})^2 \tag{3.21}$$

quindi esiste una costante $\widetilde{R}$ che limita r_{out}. Inoltre, se $G(t)$ è la regione di piano racchiusa da F all'istante t, ricordando l'equazione di evoluzione per l'area, si ha

$$t_2 > t_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{G}(t_2) \subseteq \overline{G}(t_1)$$

Quindi l'insieme: $\bigcap_{0 \leq t < T} \{\overline{G}(t)\}$ contiene almeno un punto; prendendo questo punto come centro di omotetia, otteniamo che tutte le curve sono contenute in un cerchio di raggio $2\widetilde{R}$ e quindi si trovano in una regione limitata di R^2.
A questo punto possiamo applicare il lemma (3.6.5) e concludere che la successione delle regioni di piano $H_i(t)$ converge al disco unitario nella metrica di Hausdorff.
Ricordando che $\frac{L^2}{A} \longrightarrow 4\pi$ e, usando (3.21), otteniamo $r_{in} = r_{out} = 1$.

3.7 Convergenza C^2 alla circonferenza

In questa sezione ci proponiamo di dimostrare che, quando $t \longrightarrow T$, il rapporto tra curvatura minima e curvatura massima tende ad 1; questa proprietà rappresenta, in un certo senso, una convergenza di tipo C^2 al disco, a causa dello stretto legame tra la curvatura di una curva e la sua derivata seconda (in pratica la curvatura è il modulo con segno del vettore accelerazione).

Sia $k_w^* = \sup\{b \mid k(\theta) > b \ \forall\ \theta \in [a,b], \quad b-a=w\}$

Lemma 3.7.1.

$$k_w^* r_{in}(t) < \frac{1}{1-K(w)\left(\frac{r_{out}}{r_{in}}-1\right)}$$

Dove r_{in} e r_{out} sono definiti come sopra, mentre K è una funzione positiva decrescente tale che $K(0)=\infty$ e $k(\pi)=0$

Dimostrazione

Prendiamo M reale positivo tale che $M < k_w^* r$; essendo k_w^* un estremo superiore, ci sarà almeno un intervallo di ampiezza w tale che, per ogni θ in quell'intervallo, $k(\theta,t) > M$; a meno di una eventuale riparametrizzazione prendiamo l'intervallo $[-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$. Possiamo vedere M come la curvatura del cerchio di raggio $\dfrac{1}{M}$ e costruire l'arco di circonferenza di ampiezza w e tangente alla curva in $\theta = 0$. Osserviamo che la curva convessa deve necessariamente trovarsi nella regione di piano delimitata dall'arco di circonferenza e dalle rette tangenti a tale arco, condotte dai suoi estremi; in particolare, la convessità di F garantisce una ulteriore restrizione della regione di piano che delimita la curva e la condizione $k > M$ ci garantisce che la curva si trova all'interno del cono formato dall'arco di circonferenza e dalle tangenti di cui sopra. Dalle figure (vedi pagina seguente) e dalle considerazioni precedenti, possiamo determinare $b = \dfrac{1}{M}$; inoltre:

$$\cos\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\frac{1}{M}}{\frac{1}{M}+|d|} = \frac{r_{in}}{|a|+|d|} \tag{3.22}$$

$$2r_{out} \geq r_{in}+|a| \tag{3.23}$$

Figura 3.3: lemma (3.7.1)

Figura 3.4: lemma (3.7.1)

Dalla (3.23) si ha:

$$\left(\frac{r_{out}}{r_{in}} - 1\right) \geq -\frac{1}{2} + \frac{|a|}{2r_{in}} \tag{3.24}$$

Risolvendo (3.22) rispetto ad $|a|$ otteniamo:

$$|a| = \frac{r_{in}}{\cos\frac{w}{2}} - \frac{1}{M}\left(\frac{1}{\cos\frac{w}{2}} - 1\right) \tag{3.25}$$

Sostituendo (3.25) in (3.24) e riarrangiando i termini otteniamo:

$$Mr_{in} \leq \frac{1}{1 - K(w)\left(\frac{r_{out}}{r_{in}} - 1\right)}$$

dove:

$$K(w) = \left(\frac{1}{2\cos\left(\frac{w}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2\cos\frac{w}{2}}{1 - \cos\frac{w}{2}}$$

La tesi segue immediatamente dal fatto che M può essere scelto arbitrariamente vicino a $k_w^*(t)$.

Due conseguenze del lemma precedente sono indicate nei seguenti corollari:

Corollario 3.7.2. *Per ogni $\varepsilon > 0$ vale:*

$$k_{max}(t)r_{in} \leq \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\frac{1}{1 - C_2(\varepsilon)\left(\frac{r_{out}}{r_{in}} - 1\right)} \tag{3.26}$$

Dimostrazione

Dalla dimostrazione della stima puntuale deduciamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, se $\frac{w}{2} < \delta$ e $k_{max}(t) = k(\theta_0, t)$, allora:

$$k(\theta, t) > (1-\varepsilon)k_{max}(t) \quad \forall\, \theta \in \left(\theta_0 - \frac{w}{2}, \theta_0 + \frac{w}{2}\right)$$

Dunque $k_w^* > k_{max}(t)(1-\varepsilon)$ per ogni $t \in [0, T)$.

La tesi segue immediatamente dal lemma precedente.

Corollario 3.7.3. *Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni t sufficientemente vicino a T si ha:*

$$k_{max}(t)r_{in}(t) \leq \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^2 \tag{3.27}$$

Dimostrazione

Dalla disuguaglianza di Bonnesen si ottiene:

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A}(r_{out} - r_{in})^2 \geq \left(1 - \frac{r_{in}}{r_{out}}\right)^2$$

Il teorema 3.6.2 ci assicura che $\left(\frac{L^2}{A}\right) \longrightarrow 4\pi$ quando $t \longrightarrow T$ e quindi $\frac{r_{in}}{r_{out}} \longrightarrow 1$.
La tesi segue immediatamente dal corollario precedente.

Ciò che ci proponiamo di dimostrare in questa sezione è una immediata conseguenza del seguente teorema:

Teorema 3.7.4. *$k(\theta, t)r_{in}$ converge uniformemente a 1 quando $t \longrightarrow T$*

Dimostrazione

Usando tecniche analoghe a quelle viste per la dimostrazione della stima puntuale, è possibile dimostrare che la famiglia $k(\theta, t)r_{in}(t)$ è equicontinua. Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione di $k(\theta, t)r_{in}(t)$, del tipo $k(\theta, t_i)r_{in}(t_i)$ che converge uniformemente ad una funzione $f(\theta)$; per quanto visto nel corollario precedente, tale funzione dovrà necessariamente essere minore o al più uguale ad 1.

Dunque $[k(\theta, t_i)r_{in}(t_i)]^{-1}$ deve convergere alla funzione $[f(\theta)]^{-1}$ e per il lemma di Fatou possiamo scrivere:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(\theta)}\, d\theta \leq \liminf_{t_i \longrightarrow T} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k(\theta, t_i)r_{in}(t_i)} = \liminf_{t_i \longrightarrow T} \frac{L(t_i)}{r_{in}(t_i)} = 2\pi$$

Tuttavia vale anche:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(\theta)} \geq \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Perciò dovrà essere necessariamente:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(\theta)} = 2\pi \quad \Rightarrow f(\theta) \equiv 1$$

Poiché ogni sottosuccessione converge uniformemente a 1 si ha che anche $k(\theta, t)r_{in}(t)$ converge uniformemente a 1.

Per concludere la sezione vediamo due corollari di questo teorema: il primo enuncia il risultato che ci eravamo proposti di dimostrare, l'altro sarà utile nella sezione successiva.

Corollario 3.7.5. $\dfrac{k_{min}}{k_{max}}$ *converge uniformemente a 1 quando* $t \longrightarrow T$.

Dimostrazione

Segue immediatamente dal teorema precedente.

Corollario 3.7.6. $k(\theta,t)\cdot\sqrt{2T-2t}$ *converge uniformemente a 1 quando* $t \longrightarrow T$.

Dimostrazione

Dalla (2.16) segue che $A(t) = 2\pi(T-t)$. Usando questa espressione e la disuguaglianza di Bonnesen otteniamo:

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{(L-2\pi r_{in})^2}{A} = \left(\frac{L}{\sqrt{A}} - \frac{2\pi r_{in}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\right)^2$$

Poiché $\dfrac{L^2}{A} \longrightarrow 4\pi$ avremo necessariamente:

$$\lim_{t\longrightarrow T}\left(\frac{L}{\sqrt{A}} - \frac{2\pi r_{in}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\right) = 0$$

da cui:

$$\frac{2\pi r_{in}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \longrightarrow \frac{L}{\sqrt{A}} \longrightarrow 2\sqrt{\pi}$$

Questo implica che $\dfrac{r_{in}}{\sqrt{T-t}} \longrightarrow \sqrt{2}$ quando $t \longrightarrow T$, cioè $r_{in} \longrightarrow \sqrt{2(T-t)}$.
La tesi segue immediatamente dal teorema 3.7.4.

3.8 Convergenza C^∞ alla circonferenza

In questa sezione ci proponiamo di dimostrare che tutte le derivate, di ogni ordine, di k, rispetto a θ, convergono a 0 uniformemente rispetto a t; questo risultato rappresenta una sorta di convergenza C^∞ al disco, che migliora la convergenza C^0 provata nella sezione 3.6 e la convergenza C^2 dimostrata nella sezione precedente.

In questa sezione ritorniamo a considerare le curve normalizzate, ossia le curve ottenute da quelle iniziali per mezzo di una omotetia del piano di fattore opportuno, che hanno la peculiarità di racchiudere una regione di piano di area π.

Se $F(\theta, t)$ è la curva originaria all'istante t e delimita una regione di area $A(t)$, la curva normalizzata $\overline{F}(t)$ si ottiene nel seguente modo:

$$\overline{F}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{A(t)}} F(t)$$

Ma A, come sola funzione di t, si scrive come: $A(t) = 2\pi(T-t)$; inoltre il rapporto tra la nuova curvatura e la vecchia dovrà essere pari all'inverso del fattore di omotetia, quindi:

$$\frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{A(t)}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\pi(T-t)}{\pi}} = \sqrt{2(T-t)}$$

Dunque la nuova curvatura κ si esprime, in termini di k, nel seguente modo:

$$\kappa(\theta, t) = k(\theta, t) \cdot \sqrt{2(T-t)} \tag{3.28}$$

Per determinare l'equazione di evoluzione della nuova curvatura κ, è conveniente cambiare anche il parametro temporale t in τ, dove la relazione tra le due variabili è la seguente:

$$\tau = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t-T}{T}\right) \tag{3.29}$$

Possiamo osservare, per quanto visto nella sezione precedente, che il termine a destra di (3.28) converge uniformemente a 1 quando $t \longrightarrow T$. Ma, da (3.29) segue che $t \longrightarrow T$ è equivalente a $\tau \longrightarrow \infty$, dunque otteniamo:

$$\lim_{\tau \longrightarrow \infty} \kappa(\theta, \tau) = 1$$

Possiamo ora determinare come varia la curvatura κ rispetto a τ:

Lemma 3.8.1. *L'equazione di evoluzione di κ rispetto a τ è la seguente:*

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \tau} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3 - \kappa \tag{3.30}$$

Dimostrazione

Osserviamo preliminarmente che, dalla definizione di τ, segue che:

$$t = T + Te^{2\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 2Te^{2\tau} = 2T\left(\frac{T-t}{T}\right) = 2(T-t)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \frac{\partial k}{\partial t}\sqrt{2(T-t)} + k\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{2(T-t)} \\
&= \frac{\partial k}{\partial t}\sqrt{2(T-t)} + k\left(\frac{-2}{2\sqrt{2(T-t)}}\right) \\
&= \left(k^2\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3\right)\sqrt{2(T-t)} - \frac{k}{\sqrt{2(T-t)}}
\end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, è stata usata l'equazione di evoluzione di k vista nel capitolo 2. A questo punto possiamo riunire le diverse parti e ottenere:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa}{\partial \tau} &= \frac{\partial \kappa}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \tau} \\
&= 2(T-t)\left[\left(k^2\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3\right)\sqrt{2(T-t)} - \frac{k}{\sqrt{2(T-t)}}\right] \\
&= 2(T-t)\left[\left(k^2\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3\right)\sqrt{2(T-t)} - \frac{\kappa}{2(T-t)}\right] \\
&= 2(T-t)\left[\frac{1}{2(T-t)}\left(\kappa^2\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3\right) - \frac{\kappa}{2(T-t)}\right] \\
&= \kappa^2\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3 - \kappa
\end{aligned}$$

Come già detto, lo scopo di questa ultima sezione è quello di dimostrare che le derivate di ogni ordine della funzione k sono limitate da costanti reali indipendenti da t. In realtà vedremo che sarà sufficiente dimostrare che questo è vero per la funzione κ con parametro τ.

Enunciamo preliminarmente una serie di disuguaglianze:

Teorema 3.8.2 (Disuguaglianza di Peter-Paul). *Per ogni ε positivo e per ogni scelta di a e b numeri reali, vale la seguente relazione:*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

Dimostrazione

Sappiamo che per ogni α e β numeri reali vale: $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$. Ma allora:

$$ab = 2ab\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 2\left(a\sqrt{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

Teorema 3.8.3 (Disuguaglianza di Wirtinger). *Se $f(\theta)$ è una funzione:*

- *Continua in $[0, 2\pi]$ e di classe C^2 sullo stesso intervallo.*
- *Tale che* $\int_0^{2\pi} f(\theta)\ d\theta = 0$

allora:

$$\int_0^{2\pi} [f(\theta)]^2\ d\theta \leq \int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2\ d\theta$$

Dimostrazione

Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier della funzione f:

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

Per ipotesi $\int_0^{2\pi} f(\theta)\ d\theta = 0$ quindi $a_0 = 0$. A questo punto possiamo riscrivere $f(\theta)$ e calcolare $f'(\theta)$:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\theta) \\ f'(\theta) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n \cos(n\theta) - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \sin(n\theta) \end{aligned}$$

Per ipotesi f è di classe C^2 sull'intervallo $[0, 2\pi]$, dunque i coefficienti di Fourier di f sono un infinitesimo dell'ordine di $\frac{1}{n^2}$. Allora la serie di Fourier di f è assolutamente convergente e quindi possiamo calcolare il prodotto della serie per se stessa termine a termine. Inoltre sappiamo che, se $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(n_1\theta)\cos(n_2\theta)\ d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin(n_1\theta)\sin(n_2\theta)\ d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin(n_1\theta)\cos(n_2\theta)\ d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos(n_1\theta)\sin(n_2\theta)\ d\theta = 0 \end{aligned}$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}[f(\theta)^2]\ d\theta &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta)\ d\theta + = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta)\ d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\pi(a_n^2+b_n^2) \\ \int_0^{2\pi}[f'(\theta)^2]\ d\theta &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\pi n^2(a_n^2+b_n^2)\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\int_0^{2\pi}[f(\theta)^2]\ d\theta - \int_0^{2\pi}[f'(\theta)^2]\ d\theta = \frac{1}{2}\pi\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)(1-n^2) \leq 0$$

da cui segue immediatamente la tesi.

Teorema 3.8.4 (Disuguaglianza di Sobolev). *Se esiste C numero reale tale che $\|f\|_2 \leq C$ e $\|f'\|_2 \leq C$ allora:*

$$\|f\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{2\pi}\right) C$$

Dimostrazione

Prendiamo $\overline{s} \in [0, 2\pi]$ tale che:

$$|f(\overline{s})| \leq \int_0^{2\pi} |f(\tau)|\ d\tau$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$f(s) = f(\overline{s}) + \int_{\overline{s}}^{s} f'(\tau)\ d\tau$$

da cui, passando al valore assoluto e ricordando le proprietà di confronto tra integrali:

$$\begin{aligned}|f(s)| &\leq f(\overline{s})| + \int_{\overline{s}}^{s} |f'(\tau)|\ d\tau \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\tau)|\ d\tau + \int_0^{2\pi} |f'(\tau)|\ d\tau\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Hölder segue:

$$\begin{aligned}|f(s)| &\leq \frac{1}{2\pi}\left[\sqrt{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(\tau)|^2\ d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f'(\tau)|^2\ d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_2 + \sqrt{2\pi}\|f'\|_2\end{aligned}$$

Quindi:

$$\|f\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{2\pi}\right)$$

Il teorema principale che vogliamo dimostrare in questa sezione è il seguente:

Teorema 3.8.5. $\left\|\dfrac{\partial^l \kappa}{\partial \theta^l}\right\|_\infty \leq C(l)e^{-2\alpha\tau}$ *per ogni* $l \geq 1$, $0 < \alpha < 1$.

La dimostrazione di questo teorema segue da diversi lemmi, ciascuno dei quali permette di trovare delle limitazioni alle derivate di un certo ordine di κ.

Lemma 3.8.6. *Sia* $f : R^+ \longrightarrow R^+$ *tale che:* $\dfrac{\partial f}{\partial \tau} \leq cf^{1-\frac{1}{p}} - 2pf$.
Allora:

$$f(\tau)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{c}{2p} + De^{-2\tau}\right) \leq \widetilde{c}(p)$$

Dimostrazione

Consideriamo la funzione $e^{2\tau}f(\tau)^{\frac{1}{p}}$ e deriviamola rispetto a τ. Otteniamo:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{2\tau}f(\tau)^{\frac{1}{p}}) = 2e^{2\tau}f^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}f^{\frac{1}{p}-1}\frac{\partial f}{\partial \tau}\ e^{2\tau}$$

Ma per ipotesi $\dfrac{\partial f}{\partial \tau} \leq cf^{1-\frac{1}{p}} - 2pf$, quindi:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{2\tau}f(\tau)) \leq 2e^{2\tau}f^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}f^{\frac{1}{p}-1}\ e^{2\tau}\left(cf^{1-\frac{1}{p}} - 2pf\right)$$

Sviluppando i calcoli:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{2\tau}f(\tau)) \leq 2e^{2\tau}f^{\frac{1}{p}} + \frac{c}{p}\ e^{2\tau} - 2e^{2\tau}f^{\frac{1}{p}} = \frac{c}{p}\ e^{2\tau}$$

e dunque:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{2\tau}f(\tau)) \leq \frac{c}{p}\ e^{2\tau}$$

Integrando ambo i membri tra 0 e τ:

$$e^{2\tau}f^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c}{2p}\ e^{2\tau} + D$$

da cui segue immediatamente la tesi.

Lemma 3.8.7. *Sia $f : R^+ \longrightarrow R^+$ tale che:*$\dfrac{\partial f}{\partial \tau} \leq -\alpha f + Ce^{-\beta\tau}$*Allora:*

$$\begin{aligned} f(\tau) &\leq De^{-\alpha\tau} + \frac{C}{\alpha-\beta}\, e^{-\beta\tau} \qquad \alpha \neq \beta \\ f(\tau) &\leq De^{-\alpha\tau} + C\tau e^{-\alpha\tau} \qquad \alpha = \beta \end{aligned}$$

Dimostrazione

Sia $\alpha \neq \beta$ e consideriamo la funzione $e^{\alpha\tau} f(\tau)$; la sua derivata rispetto a τ è:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\alpha\tau} f(\tau)) = \alpha e^{\alpha\tau} f(\tau) + e^{\alpha\tau}\frac{\partial f}{\partial \tau}$$

Ma $\dfrac{\partial f}{\partial \tau} \leq -\alpha f + Ce^{-\beta\tau}$, dunque:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\alpha\tau} f(\tau)) \leq \alpha e^{\alpha\tau} f(\tau) + e^{\alpha\tau}(-\alpha f + Ce^{-\beta\tau})$$

Sviluppando il termine a sinistra dell'ultima relazione si ottiene:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\alpha\tau} f(\tau)) \leq \alpha e^{\alpha\tau} f(\tau) - \alpha e^{\alpha\tau} f(\tau) + Ce^{(\alpha-\beta)\tau}$$

ossia:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\alpha\tau} f(\tau)) \leq Ce^{(\alpha-\beta)\tau}$$

Integrando, come nella dimostrazione del lemma precedente, ambo i membri tra 0 e τ, si ottiene:

$$e^{\alpha\tau} f(\tau) \leq \frac{C}{\alpha-\beta}\, e^{(\alpha-\beta)\tau} + D$$

da cui segue immediatamente la prima tesi.

Consideriamo ora il caso $\alpha = \beta$; ragionando come sopra si ottiene facilmente:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\alpha\tau} f(\tau)) \leq C$$

da cui, integrando tra 0 e τ:

$$e^{\alpha\tau} f(\tau) \leq C\tau + D$$

da cui segue immediatamente la seconda tesi di questo lemma.

Conveniamo di indicare con f' la derivata di f rispetto a θ.

Lemma 3.8.8. $\|\kappa'\|_2$ *e* $\|\kappa'\|_4$ *sono limitate da costanti indipendenti da* τ

Dimostrazione

Consideriamo la quantità $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\kappa')^4\, d\theta$. Sfruttando l'equazione di evoluzione per κ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi} (\kappa')^4\, d\theta &= 4\int_0^{2\pi} (\kappa')^3 \frac{\partial\kappa'}{\partial\tau}\, d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} (\kappa')^3 \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\kappa}{\partial\tau}\, d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} (\kappa')^3(\kappa^2\kappa'' + \kappa^3 - \kappa)\, d\theta
\end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti ed integrando per parti otteniamo:

$$\begin{aligned}
4\int_0^{2\pi} [(\kappa')^3(\kappa^2\kappa'' + \kappa^3 - \kappa)]\, d\theta &= \int_0^{2\pi} [4(\kappa')^3(\kappa^2\kappa'')' + 4(\kappa')^3(\kappa^3)' - 4(\kappa')^3\kappa']\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [-4(\kappa')^4 - 12(\kappa')^2\kappa^2(\kappa'')^2 - 12(\kappa')^2\kappa''\kappa^3]\, d\theta
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Peter-Paul con $\varepsilon = 1$ possiamo sviluppare l'ultimo termine ed ottenere:

$$-\kappa^3(\kappa')^2\kappa'' = -\kappa\kappa'\kappa'' \cdot \kappa^2\kappa' \le \kappa^2(\kappa')^2(\kappa'')^2 + \frac{\kappa^4(\kappa')^2}{4}$$

Moltiplicando per 12:

$$-12\kappa^3(\kappa')^2\kappa'' \le 12\kappa^2(\kappa')^2(\kappa'')^2 + 3\kappa^4(\kappa')^2$$

Dunque possiamo scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi} (\kappa')^4\, d\theta \le \int_0^{2\pi} [-4(\kappa')^4 + 3\kappa^4(\kappa')^2]\, d\theta$$

Sia $f(\tau) = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\kappa')^4\, d\theta$; abbiamo già visto che $k(\tau) \longrightarrow 1$ se $\tau \longrightarrow \infty$, quindi, per τ sufficientemente grande, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} \le -4f + 3\int_0^{2\pi} (\kappa')^2\, d\theta$$

Usando la disuguaglianza di Hölder possiamo maggiorare l'ultimo termine con $Cf^{\frac{1}{2}}$ e dunque ottenere:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \leq -4f + Cf^{\frac{1}{2}}$$

Osserviamo che la funzione f soddisfa l'ipotesi del lemma (3.8.6) con $p = 2$ e quindi avremo:

$$\left(\int_0^{2\pi} (\kappa')^4 \, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \leq \widetilde{c} \quad \Rightarrow \quad \left(\int_0^{2\pi} (\kappa')^4 \, d\theta\right)^{\frac{1}{4}} \leq \widetilde{D}$$

dove $\widetilde{D}$ non dipende da τ. Abbiamo trovato una limitazione superiore per $\|\kappa'\|_4$. Per quanto riguarda $\|\kappa'\|_2$, è sufficiente applicare la disuguaglianza di Hölder per ottenere:

$$\|\kappa'\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^{2\pi} 1^4 \, d\theta\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} (\kappa')^4 \, d\theta\right)^{\frac{1}{4}} \leq \widetilde{E}$$

dove $\widetilde{E}$ indipendente da τ.

Lemma 3.8.9. $\|\kappa''\|_2$ *è limitata da una costante indipendente da* τ.

Dimostrazione

Procedendo come nella dimostrazione del lemma precedente arriviamo a scrivere:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{2\pi} (\kappa'')^2 \, d\theta &= 2\int_0^{2\pi} \kappa''(2\kappa\kappa'\kappa'' + \kappa^2\kappa''' + 3\kappa^2\kappa' - \kappa')' \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [-4\kappa\kappa'\kappa''\kappa''' - 2\kappa^2(\kappa''')^2 - 6\kappa^2\kappa'\kappa''' + 2\kappa'\kappa'''] \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [-2(\kappa'')^2 - 2\kappa^2(\kappa''')^2 - 4\kappa\kappa'\kappa''\kappa''' - 6\kappa^2\kappa'\kappa'''] \, d\theta
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Peter-Paul possiamo maggiorare gli ultimi due termini nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
-4\kappa\kappa'\kappa''\kappa''' = -\kappa\kappa''' \cdot 4\kappa'\kappa'' &\leq \kappa^2(\kappa''')^2 + 4(\kappa')^2(\kappa'')^2 \\
-6\kappa^2\kappa'\kappa''' = -\kappa\kappa''' \cdot 6\kappa\kappa' &\leq \kappa^2(\kappa''')^2 + 9\kappa^2(\kappa')^2
\end{aligned}$$

Maggiorando in questo modo si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{2\pi} (\kappa'')^2 \, d\theta \leq -2\int_0^{2\pi} (\kappa'')^2 \, d\theta + C_1 \int_0^{2\pi} (\kappa')^2(\kappa'')^2 \, d\theta + C_2 \int_0^{2\pi} \kappa^2(\kappa')^2 \, d\theta$$

Per ottenere un limite superiore per la quantita $(\kappa')^2(\kappa'')^2$ utilizziamo il lemma precedente, dal quale si ricava:

$$\int_0^{2\pi} 12\kappa^2(\kappa')^2(\kappa'')^2\, d\theta = -\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}[(\kappa')^4 - 4(\kappa')^4 - 12\kappa^3(\kappa')^2 k'']\, d\theta$$

Sia M la limitazione inferiore di κ; usando la disuguaglianza di Peter-Paul possiamo maggiorare il termine $\kappa^3(\kappa')^2\kappa''$ e dunque otteniamo:

$$12M^2\int_0^{2\pi}(\kappa')^2(\kappa'')^2\, d\theta \leq -\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}[(\kappa')^4 + 12\varepsilon(\kappa'')^2 + \frac{3}{\varepsilon}\kappa^6(\kappa')^4]\, d\theta$$

Se poniamo $f = \displaystyle\int_0^{2\pi}(\kappa'')^2\, d\theta$, allora:

$$-\frac{\partial f}{\partial\tau} \leq -C_3 - \frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}(\kappa')^4\, d\theta + C_4 - f \tag{3.31}$$

Moltiplicando ambo i membri di (3.31) per e^τ e integrando tra 0 e τ otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}(e^t f)\, dt &\leq -C_3\int_0^\tau e^t\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^{2\pi}(\kappa')^4\, d\theta\right)\, dt + C_4 e^\tau \\ &\leq C_3\int_0^\tau\left(\int_0^{2\pi}(\kappa')^4\, d\theta\right)\, dt - \left[C_3 e^t\int_0^{2\pi}(\kappa')^4\, d\theta\right]_0^\tau + C_4 e^\tau\end{aligned}$$

Otteniamo dunque:

$$e^\tau f(\tau) \leq C_5 e^\tau + C_6 + C_4 e^\tau$$

da cui segue immediatamente la tesi.

A questo punto possiamo dimostrare il seguente lemma:

Lemma 3.8.10. $\|\kappa'\|_\infty \longrightarrow 0$ *se* $\tau \longrightarrow \infty$

Dimostrazione

Il lemma 3.8.8 ci assicura che $\|\kappa'\|_2 < C_1$ mentre il lemma 3.8.9 ci assicura che $\|\kappa''\|_2 < C_2$ con C_1 e C_2 costanti reali indipendenti da τ. Possiamo prendere $C = \max\{C_1, C_2\}$ e applicare la disuguaglianza di Sobolev alla funzione $\kappa'(\theta)$. Otteniamo che $\|\kappa'(\theta)\|_\infty$ è una funzione limitata.

La limitatezza di $\|\kappa''(\theta)\|_2$ implica che la famiglia delle funzioni $\kappa'(\theta)$, al variare

di τ, è equicontinua, dunque esiste una sua sottosuccessione $\kappa'_\alpha(\theta)$ che converge uniformemente ad una funzione $g(\theta)$. La successione delle primitive di $\kappa'_\alpha(\theta)$ dovrà convergere alla primitiva di $g(\theta)$; ma sappiamo che $\kappa(\theta)$ converge uniformemente a 1 e lo stesso vale per ogni sua sottosuccessione. Dunque $\kappa'_\alpha(\theta) \longrightarrow 0$ e perciò $g \equiv 0$.
Siccome questo vale per ogni sottosuccessione di $\kappa'(\theta)$, si ha che $\kappa'(\theta, \tau)$ converge uniformemente a 0 per $\tau \longrightarrow +\infty$, da cui segue immediatamente la tesi.

Ci proponiamo ora di ottenere delle limitazioni per le derivate di ordine basso di κ che abbiano l'ulteriore proprietà di tendere a 0 in maniera esponenziale.

Lemma 3.8.11. *Per ogni $0 < \alpha < 1$ è possibile trovare una costante A tale che, per ogni $\tau > A$ vale:*

$$\int_0^{2\pi} (\kappa'')^2 \, d\theta \geq 4\alpha \int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta$$

Dimostrazione
Sappiamo che: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\kappa(\theta)} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{\kappa(\theta)} \, d\theta = 0$. Integrando per parti otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin\theta \frac{\kappa'(\theta)}{[\kappa(\theta)]^2} \, d\theta &= 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos\theta \frac{\kappa'(\theta)}{[\kappa(\theta)]^2} \, d\theta &= 0
\end{aligned}$$

Inoltre, dalla periodicità di κ, segue:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\kappa'(\theta)}{[\kappa(\theta)]^2} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\kappa(\theta)}\right) d\theta = 0 \tag{3.32}$$

Ripercorrendo la dimostrazione della disuguaglianza di Wirtinger e sfruttando (3.32) si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)'\right]^2 d\theta \geq \int_0^{2\pi} 4\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2 d\theta$$

Possiamo sviluppare il termine a sinistra della disuguaglianza precedente e ottenere:

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)'\right]^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\kappa''\kappa^2 - 2\kappa(\kappa')^2}{\kappa^4}\right)^2$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\kappa'')^2}{\kappa^4} - 4\frac{(\kappa')^2\kappa''}{\kappa^5} + 4\frac{(\kappa')^4}{\kappa^6} \right] d\theta$$

Usando la disuguaglianza di Peter-Paul possiamo maggiorare il termine negativo dell'espressione precedente:

$$-4\frac{(\kappa')^2\kappa''}{\kappa^5} \le 4\varepsilon\frac{(\kappa'')^2}{\kappa^4} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{(\kappa')^4}{\kappa^6}$$

Otteniamo dunque:

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)' \right]^2 d\theta \le (1+4\varepsilon) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\kappa''}{\kappa^2} \right)^2 d\theta + \left(4 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_0^{2\pi} \frac{(\kappa')^2}{\kappa^4} d\theta$$

Poiché $\|\kappa\|_\infty \to 0$, prendendo τ abbastanza grande, possiamo considerare $\kappa \approx 1$ e quindi, per $0 < \alpha < 1$:

$$4\alpha \int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta \le \int_0^{2\pi} (\kappa'')^2 \, d\theta$$

Lemma 3.8.12. *Per ogni $0 < \alpha < 1$ è possibile trovare una costante C tale che: $\|\kappa'\|_2 \le Ce^{-2\alpha\tau}$*

Dimostrazione

Consideriamo la quantità $\int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta$ e, usando l'integrazione per parti, deriviamola rispetto a τ. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau} \int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} [\kappa'(\kappa)^2\kappa'' + \kappa^3 - (\kappa)'] \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [2\kappa'(\kappa^2\kappa'')' + 6\kappa^2(\kappa')^2 - 2(\kappa')^2] \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [-2\kappa^2(\kappa'')^2 + 6\kappa^2(\kappa')^2 - 2(\kappa')^2] \, d\theta \end{aligned}$$

Usando il lemma precedente, per ogni $0 < \alpha < 1$, possiamo trovare una costante A tale che per ogni $\tau > A$ vale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau} \int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta &\le -8\alpha \int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta + 6 \int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta - 2 \int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta \\ &= (-8\alpha + 4) \int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta \\ &\le -4\alpha \int_0^{2\pi} (\kappa')^2 \, d\theta \end{aligned}$$

Da ciò segue che $\|\kappa'\|_2^2 \le Ce^{-4\alpha\tau}$ e dunque la tesi.

Lemma 3.8.13. *Per ogni* $0<\alpha<1$ *è possibile trovare una costante* C *tale che:* $\|\kappa''\|_2 \leq Ce^{-2\alpha\tau}$

Dimostrazione

Usando l'equazione di evoluzione per κ e l'integrazione per parti possiamo calcolare:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}(\kappa'')^2\,d\theta &= 2\int_0^{2\pi}\kappa''(\kappa^2\kappa''+\kappa^3-\kappa)''\,d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\kappa''(2\kappa\kappa'\kappa''+\kappa^2\kappa'''+3\kappa^2\kappa'-\kappa')'\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}[-2\kappa^2(\kappa''')^2-4\kappa\kappa'\kappa''\kappa'''-6\kappa^2\kappa'\kappa'''+2\kappa'\kappa''']\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}[-2(\kappa'')^2-2\kappa^2(\kappa''')^2-4\kappa\kappa'\kappa''\kappa'''-6\kappa^2\kappa'\kappa''']\,d\theta
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Peter-Paul possiamo maggiorare gli ultimi due termini nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
4\kappa\kappa'\kappa''\kappa''' = \kappa\kappa'''\cdot\kappa'\kappa'' &\leq 4\varepsilon\kappa^2(\kappa''')^2+\frac{1}{\varepsilon}(\kappa')^2(\kappa'')^2 \\
6\kappa^2\kappa'\kappa''' = \kappa\kappa'''\cdot\kappa\kappa' &\leq 6\varepsilon\kappa^2(\kappa''')^2+\frac{3}{2\varepsilon}\kappa^2(\kappa')^2
\end{aligned}$$

Se poniamo $I=I(\tau)=\displaystyle\int_0^{2\pi}(\kappa'')^2\,d\theta$ possiamo scrivere:

$$I \leq \int_0^{2\pi}[-2(\kappa'')^2-2\kappa^2(\kappa''')^2+4\varepsilon\kappa^2(\kappa''')^2+\frac{1}{\varepsilon}(\kappa')^2(\kappa'')^2+6\varepsilon\kappa^2(\kappa''')^2+\frac{3}{2\varepsilon}\kappa^2(\kappa')^2]d\theta$$

Scegliamo ε molto piccolo e prendiamo A sufficientemente grande in modo che, per $\tau>A$, si ha che $\|\kappa'\|$ è una quantità molto piccola. In questo modo otteniamo, per $\overline{\alpha}<1$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}(\kappa'')^2\,d\theta \leq \int_0^{2\pi}[-2\overline{\alpha}(\kappa'')^2-2\overline{\alpha}\kappa^2(\kappa'')^2]\,d\theta+Ce^{-4\overline{\alpha}\tau}$$

Per τ molto grande sappiamo che κ approssima 1; inoltre, per la disuguaglianza di Wirtinger (vedere sezione 3.4) si ha:

$$-2\overline{\alpha}\int_0^{2\pi}(\kappa''')^2\,d\theta \leq -2\overline{\alpha}\int_0^{2\pi}(\kappa'')^2\,d\theta$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}(\kappa'')^2\, d\theta \leq -4\overline{\alpha}\int_0^{2\pi}(\kappa'')^2\, d\theta + Ce^{-4\overline{\alpha}\tau}$$

Dal lemma 3.8.13 segue che:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}(\kappa'')^2\, d\theta \leq \widetilde{C}e^{-4\alpha\tau} \qquad \forall\ \alpha < \overline{\alpha}$$

da cui segue immediatamente la tesi.

Un corollario immediato degli ultimi due lemmi è il seguente:

Corollario 3.8.14. *Per ogni* $0 < \alpha < 1$ *esiste* C *tale che* $\|\kappa'\|_\infty \leq Ce^{-2\alpha\tau}$

Dimostrazione

I lemmi (3.8.12) e (3.8.13) garantiscono che la funzione $\kappa'(\theta)$ soddisfa le ipotesi della disuguaglianza di Sobolev, da cui segue, dunque, la tesi.

Lemma 3.8.15. *Per ogni* α *tale che* $0 < \alpha < 1$, *è possibile trovare una costante* C *tale che:*$\|\kappa''\|_4 \leq Ce^{-\alpha\tau}$

Dimostrazione

Usando l'equazione di evoluzione per κ e integrando per parti si ottiene facilmente:

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} = \int_0^{2\pi}[-12\kappa^2(\kappa'')^2(\kappa''')^2 - 24\kappa\kappa'(\kappa'')^3\kappa''' - 36\kappa^2\kappa'(\kappa'')^2\kappa''' - 4(\kappa'')^4]\, d\theta$$

dove si è posto: $f(\tau) = \displaystyle\int_0^{2\pi}(\kappa'')^4\, d\theta$. Usando la disuguaglianza di Peter-Paul possiamo maggiorare il secondo e terzo addendo nell'integrale a destra:

$$\begin{aligned}
-24\kappa\kappa'(\kappa'')^3\kappa''' &\leq 24\varepsilon\kappa^2(\kappa''')^2 + \frac{6}{\varepsilon}(\kappa')^2(\kappa'')^4 \\
-36\kappa^2\kappa'(\kappa'')^2\kappa''' &\leq 36\varepsilon\kappa^2(\kappa''\kappa''')^2 + \frac{9}{\varepsilon}\kappa^2(\kappa')^2(\kappa'')^2
\end{aligned}$$

Se τ è sufficiente grande ed ε sufficientemente piccolo, per $\alpha < 1$ si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} \leq -4\alpha f + Ce^{-8\alpha\tau}$$

La tesi segue immediatamente dal lemma (3.8.7).

Lemma 3.8.16. *Per ogni* $0 < \alpha < 1$ *è possibile trovare una costante* C *tale che* $\|\kappa'''\|_2 \leq Ce^{-2\alpha\tau}$.

Dimostrazione

Posto $f(\tau) = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\kappa''')^2\, d\theta$, possiamo usare, come per il lemma precedente, l'equazione di evoluzione di κ, l'integrazione per parti e la disuguaglianza di Wirtinger, e ottenere, per τ sufficientemente grande e α tra 0 e 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \leq -4\alpha f + Ce^{-4\alpha\tau}$$

La tesi segue immediatamente applicando il lemma (3.8.7).

Il lemma che segue generalizza i risultati fin qui ottenuti:

Lemma 3.8.17. *Sia* $l \geq 4$ *e* $0 < \alpha < 1$. *Supponiamo che:*

- $\|\kappa^{(l-1)}\|_2 \leq C_1 e^{-2\alpha\tau}$
- $\|\kappa^{(j)}\|_\infty \leq C_2 e^{-2\alpha\tau} \qquad j = 1, 2, ..., l-2$

Allora $\|\kappa^{(l)}\|_2 \leq C_3 e^{-2\alpha\tau}$ *e* $\|\kappa^{(l-1)}\|_\infty \leq C_4 e^{-2\alpha\tau}$.

Dimostrazione

Integrando per parti e usando l'equazione di evoluzione di κ rispetto a τ otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi} (\kappa^l)^2\, d\theta &= 2\int_0^{2\pi} \kappa^{(l)}(\kappa^2\kappa'' + \kappa^3 - \kappa)^{(l)} \\ &= 2\int_0^{2\pi} [\kappa^{(l)}(\kappa^2\kappa'' + \kappa^3)^{(l)} - 2(\kappa^{(l)})^2]\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [-2\kappa^{(l+1)}(\kappa^2\kappa'' + \kappa^3)^{(l-1)} - 2(\kappa^{(l)})^2]\, d\theta \end{aligned}$$

A questo punto possiamo derivare i termini in parentesi tonda ed effettuare i prodotti; tralasciando i coefficienti binomiali, che saranno inglobati nelle costanti successive, si può espandere:

$$\int_0^{2\pi} [-2\kappa^{(l+1)}(\kappa^2\kappa'' + \kappa^3)^{(l-1)} - 2(\kappa^{(l)})^2]\, d\theta$$

nella forma:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \{ \; &- \; 2\kappa^2(\kappa^{(l+1)})^2 && (3.33)\\
&- \; 2(\kappa^2)'(\kappa)^{(l)}\kappa^{(l+1)} && (3.34)\\
&- \; 2(\kappa)^{(l+1)}(\kappa'')^2\kappa^{(l-1)} && (3.35)\\
&- \; 2\kappa^{(l+1)}(\kappa^2)^{(j)}\kappa^{(l+1-j)} \qquad 2 \leq j \leq l-2 && (3.36)\\
&- \; 2(\kappa)^{(l+1)}(\kappa^2)^{(l-1)}\kappa'' && (3.37)\\
&- \; 2(\kappa)^{(l+1)}(\kappa^3)^{(l-1)} && (3.38)\\
&- \; 2(\kappa^{(l)})^2\} \; d\theta && (3.39)
\end{aligned}
$$

Le quantità (3.34),...,(3.38) possono essere limitate usando la disuguaglianza di Peter-Paul, in termini di (3.29) e, rispettivamente, delle seguenti quantità:

$$C_1 \cdot \frac{\left((\kappa^2)'\right)^2 \left(\kappa^{(l)}\right)^2}{\kappa^2} \tag{3.40}$$

$$C_2 \cdot \frac{\left((\kappa^2)''\right)^2 \left(\kappa^{(l-1)}\right)^2}{\kappa^2} \tag{3.41}$$

$$C_3 \cdot \frac{\left((\kappa^2)^{(j)}\right)^2 \left(\kappa^{(l+1-j)}\right)^2}{\kappa^2} \tag{3.42}$$

$$C_4 \cdot \frac{\left((\kappa^2)^{(l-1)}\right)^2 (\kappa'')^2}{\kappa^2} \tag{3.43}$$

$$C_5 \cdot \frac{(\kappa^3)^{(l-1)}}{\kappa^2} \tag{3.44}$$

Inoltre (3.40) può essere limitato in termini di (3.39) pur di prendere τ abbastanza grande (in questo caso, infatti, κ vale approssimativamente 1). Sia $\overline{\alpha} \in (\alpha, 1)$; i termini (3.41) e (3.43) sono limitati da $Ce^{-4\alpha\tau}$ usando le limitazioni sulla norma infinita per le derivate di ordine basso e le limitazioni sulla norma 2 per le derivate di ordine $l-1$.

I termini in (3.42) sono limitati da $Ce^{-4\overline{\alpha}\tau}$ usando le limitazioni sulla norma infinita.

Infine il termine (3.33) è limitato da $-\int_0^{2\pi} (\kappa^{(l)})^2 \, d\theta$ usando la disuguaglianza di

Wirtinger e il fatto che κ converge uniformemente a 1.

Otteniamo dunque:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}(\kappa^{(l)})^2\ d\theta \leq -4\overline{\alpha}\int_0^{2\pi}(\kappa^{(l)})^2\ d\theta + Ce^{-4\overline{\alpha}\tau}$$

La tesi segue immediatamente dal lemma (3.8.7).

A questo punto possiamo enunciare il teorema principale di questa sezione, dal quale ricaveremo come corollario, il risultato che ci proponevamo di dimostrare:

Teorema 3.8.18. $\left\|\frac{\partial^l\kappa}{\partial\theta^l}\right\|_\infty \leq C(l)e^{-2\alpha\tau} \quad l \geq 1 \quad 0 < \alpha < 1$

Dimostrazione

Segue per induzione dal lemma precedente.

Corollario 3.8.19. $\left\|\frac{\partial^l k}{\partial\theta^l}\right\|_\infty \leq \overline{C}(l)(T-t)^{\alpha-\frac{1}{2}} \quad l \geq 1 \quad 0 < \alpha < 1$

Dimostrazione

Segue immediatamente sostituendo a κ del teorema precedente, la sua espressione in termini di k.

Abbiamo dimostrato che, per le curve originali, le derivate di qualsiasi ordine della curvatura rispetto a θ, tendono a 0 in maniera esponenziale; questo ci permette di concludere che la famiglia di curve converge ad una circonferenza in maniera C^∞.

Bibliografia

[1] A. Do Carmo, *Differential Geometry*, Prentice Hall 1976.

[2] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica 2*, Liguori editore 1996.

[3] M. Gage, *An isoperimetric inequality with applications to curve shortening* , Duke Math. J. 50 (1983), 1225-1229.

[4] M. Gage, *Curve shortening makes convex curves circular* , Invent. Math. 76 (1984), 357-364.

[5] M. Gage, *Deforming curves on convex surfaces to simple closed geodesics* , Indiana Univ. Math. J. 39 (1990), 1037-1059.

[6] M. Gage, *Curve shortening on surfaces*, Ann. Sci. E'cole Norm. Sup. 23 (1990), 229-256.

[7] M. Gage & R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves* , Differential Geometry 23 (1986), 69-96.

[8] R. Osserman, *Bonnesen style isoperimetric inequalities* , Amer. Math Monthly 86 (1979).

[9] L. Piccinini & G. Stampacchia, *Ordinary Differential Equations in* R^n*, Problems and methods*, Springer 1984.

[10] M. H. Protter & H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall 1967.

[11] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri 1994.