

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

*Corso di Laurea Magistrale in Matematica e  
Applicazioni*

*Classe LM-40*



**Gruppi di riflessioni dei triangoli  
euclidei, sferici e iperbolici**

Tesi di Laurea in Geometria - MAT/03

**Relatori:**

Prof. Riccardo Piergallini

Prof. Stefano Isola

**Laureanda:**

Ilaria Giancamilli

---

ANNO ACCADEMICO 2016-2017

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria dei gruppi</b>	<b>4</b>
1.1 Definizioni fondamentali . . . . .	4
1.2 Presentazione di gruppi . . . . .	6
1.2.1 Classi laterali, tensori e la loro numerazione . . . . .	7
1.2.2 Il metodo di Reidemeister-Schreier . . . . .	10
1.3 Altri richiami algebrici . . . . .	11
1.4 Azioni di un gruppo su un insieme . . . . .	12
1.5 Gruppi di Coxeter . . . . .	13
<b>2 Introduzione alle Geometrie non euclidee</b>	<b>16</b>
2.1 La nascita delle geometrie non euclidee . . . . .	16
2.1.1 Le origini della Geometria, come la conosciamo noi oggi . . .	16
2.1.2 Apologia del Quinto Postulato . . . . .	19
2.1.3 Lobacevskij, Bolyai e Riemann . . . . .	22
2.2 La rivoluzione di Riemann . . . . .	25
2.2.1 Varietà . . . . .	25
2.2.2 Metriche . . . . .	30
2.2.3 Geodetiche . . . . .	33
2.2.4 Le isometrie . . . . .	36
<b>3 Tassellazioni e Triangoli</b>	<b>38</b>
3.1 Tassellazioni . . . . .	38
3.2 Triangoli . . . . .	40

---

<b>4</b>	<b>Classificazione e proprietà dei gruppi triangolari</b>	<b>43</b>
4.1	Gruppi triangolari . . . . .	43
4.1.1	Caso euclideo . . . . .	46
4.1.2	Caso sferico . . . . .	51
4.1.3	Caso iperbolico . . . . .	58
<b>A</b>	<b>Richiami preliminari di Topologia</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>71</b>

# Introduzione

Immaginiamo un triangolo. Tutti siamo portati a pensare a questa figura in modo euclideo, cioè pensiamo subito ad una linea spezzata chiusa costituita da tre segmenti, che si trova su un piano. Pensiamo ora ottenere altri triangoli ribaltando il triangolo su uno dei propri lati. Abbiamo così operato quella che in matematica viene chiamata riflessione. Iterando questo procedimento e applicandolo a tutti i lati dei triangoli via via ottenuti, si costruisce un insieme di triangoli, le cui proprietà dipendono dal triangolo di partenza. Per esempio sempre l'insieme di triangoli così costruito ricopre interamente il piano senza lasciare spazi vuoti, forma cioè una tassellazione.

lo scopo di questo lavoro è quello di formalizzare questa costruzione intuitiva estendendola anche a triangoli sferici e iperbolici, per poi determinare quali proprietà debba avere il triangolo di partenza affinché l'insieme dei triangoli generato costituisca una tassellazione. Per fare ciò, abbiamo preso, come punto di partenza, il lavoro di Coxeter [?] e alcuni risultati da lui raggiunti nello studio dei gruppi triangolari.

Iniziamo quindi con il definire che cosa si intende per triangolo euclideo, sferico ed iperbolico.

Per dare una definizione universale dobbiamo prima capire come sono fatte le superfici su cui noi consideriamo il triangolo e come sono fatti i segmenti su tali superfici. Un segmento, per come siamo abituati a pensarlo è una linea che, dati due punti, li collega e ha lunghezza minima. In matematica una curva che gode di tale proprietà viene definita geodetica. Bisogna, quindi avere bene in mente quali

---

siano le geodetiche che possiamo disegnare su una sfera e su un piano iperbolico (visto ad esempio secondo il modello del disco di Poincaré).

Soffermiamoci per un attimo sul perchè alcune definizioni di geometria euclidea, non sono valide se applicate alla sfera o al disco di Poincaré. Tutto parte dalla negazione del quinto postulato di Euclide, che afferma: data una retta e un punto esterno ad essa esiste una ed una sola retta passante per quel punto e parallela alla retta data.

Se pensiamo alla sfera: possiamo considerare le circonferenze di diametro massimo come rette sulla superficie. Risulta quindi immediato osservare che dato un punto esterno ad una retta, ogni circonferenza di diametro massimo passante per quel punto incontrerà la retta data. Dunque, sulla sfera non vale il quinto postulato.

Il disco di Poincaré rappresenta invece un modello di geometria iperbolica. Immaginiamo un disco di raggio unitario senza bordo. Per utilizzare un'immagine proposta dallo stesso Poincaré, supponiamo che in tale disco viva un omino e che sia presente un gas particolare che rimpicciolisce l'omino man mano che esso si avvicina al bordo del disco. Questo piccolo esempio ci aiuta a capire, senza entrare ora troppo nello specifico, come si possono misurare gli oggetti su questa particolare superficie.

Pensando a tali superfici come a superfici di Riemann, possiamo definire per ognuna una metrica e quindi, le curve geodetiche. Nel caso della sfera le geodetiche sono tutte le circonferenze di diametro massimo che si possono tracciare sulla superficie sferica, mentre, per il disco di Poincaré, chiamiamo geodetiche tutti i diametri e tutti gli archi di circonferenza che incontrano il bordo del disco perpendicolarmente. Dunque, dati tre punti non allineati (cioè non appartenenti alla stessa geodetica), tracciamo le tre geodetiche che li contengono a due a due. La parte di piano (euclideo, sferico o iperbolico) delimitata da tali geodetiche e le porzioni di geodetiche comprese tra i punti, viene definita triangolo. Si osserva che la somma degli angoli interni di un triangolo euclideo è  $\pi$  mentre quella di un triangolo sferico è  $> \pi$  e ancora nel caso iperbolico risulta essere  $< \pi$ .

Supponiamo che, dato un triangolo, esso abbia angoli di ampiezza  $\frac{\pi}{l}$ ,  $\frac{\pi}{m}$  e  $\frac{\pi}{n}$ . Indichiamo con  $L$  la riflessione del triangolo rispetto al lato opposto all'angolo di ampiezza  $\frac{\pi}{l}$  e analogamente facciamo per le riflessioni  $M$  e  $N$ . Considerando delle combinazioni finite di  $L$ ,  $M$ ,  $N$  e dei loro inversi, otteniamo il gruppo triangolare

$T^*(l, m, n)$  i cui elenti sono delle funzioni che, applicate al triangolo di partenza, individuano un insieme di triangoli tra loro tutti congruenti.

Ai fini del nostro lavoro sarà anche utili fornire una presentazione del gruppo  $T^*(l, m, n)$  ovvero esplicitare le riflessioni che permettono di ottenere tali triangoli e le relazioni, cioè le combinazioni di generatori, tramite le quali è possibile ottenere il triangolo di partenza. Ad esempio possiamo considerare come generatori di  $T^*(l, m, n)$ , le riflessioni  $L$ ,  $M$  e  $N$ . Risulta immediato che se applichiamo due volte una di queste riflessioni, ad esempio  $L$ , otteniamo il triangolo di partenza; dunque  $L^2$ ,  $M^2$  e  $N^2$  sono delle relazioni da inserire nella presentazione del gruppo. Altre poi sono  $(LM)^n$ ,  $(MN)^l$  e  $(NL)^m$ .

A questo punto, il lettore ha nozioni sufficienti per comprendere l'enunciatto del risultato principale del nostro lavoro, ovvero il Teorema 4.1.2 che afferma:

Il gruppo  $T^*(l, m, n)$  è un gruppo discreto di isometrie di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  o  $\mathbb{H}^2$  e il triangolo  $\Delta$  è un dominio fondamentale per  $T^*(l, m, n)$ . Inoltre  $T^*(l, m, n)$  ammette la presentazione data dai generatoti  $L$ ,  $M$  e  $N$  e dalle relazioni:

$$L^2 = M^2 = N^2 = (LM)^n = (MN)^l = (NL)^m = 1.$$

Le fonti che abbiamo maggiormente utilizzato per la dimostrazione sono stete [6] e [2].

Il lavoro è stato diviso in quattro capitoli; nel primo in cui vengono fornite alcune definizioni basilari di algebra e di teoria dei gruppi. Nel secondo vengono presentate, anche a livello storico, le geometrie non euclidee, la superficie sferica  $\mathbb{S}^2$  e iperbolica  $\mathbb{H}^2$  e le loro metriche. Nel terzo presentiamo brevemente il concetto di tassellazione di una superficie e definiamo i vari tipi di triangoli. Il quarto e ultimo capitolo è stato interamente dedicato alla dimostrazione del Teorema sopra citato.

# Capitolo 1

## Teoria dei gruppi

Lo scopo di questo capitolo è quello di fornire al lettore delle nozioni basilari di Teoria dei Gruppi che verranno poi riprese nel capitolo 4.

### 1.1 Definizioni fondamentali

Dando per scontata la definizione di gruppo, partiamo col definire la nozione di gruppo finitamente generato.

**Definizione 1.1.** Sia  $G = (G, \cdot)$  un gruppo. Un insieme  $I \subset G$  si dice **insieme di generatori di  $G$**  se e solo se ogni elemento  $x \in G$  può essere scritto come prodotto di elementi di  $I$  e dei loro inversi.

**Definizione 1.2.** Diciamo che un gruppo  $G$  è **finitamente generato** se e solo se ha un insieme finito di generatori.

Un caso speciale di gruppo finitamente generato è il seguente:

**Definizione 1.3.** Sia  $(G, \cdot)$  un gruppo moltiplicativo. Diciamo che  $G$  è **un gruppo ciclico** se esiste un elemento  $a \in G$  tale che  $G = \langle a \rangle$ , ovvero,  $\forall b \in G, \exists m \in \mathbb{Z}$

per cui  $b = a^m$ . In altre parole esiste un insieme di generatori per  $G$  che ha cardinalità pari a 1.

**Definizione 1.4.** Un gruppo  $(G, \cdot)$  si dice invece **libero** se e solo se esiste  $S$  sottoinsieme di  $G$  tale per cui ogni elemento di  $G$  può essere scritto, in modo unico, a meno di cancellazioni, ovvero a meno che nella scrittura di tale elemento non vi siano coppie del tipo  $gg^{-1}$ , come prodotto di elementi di  $S$  e dei loro inversi.

Sia  $S$  un insieme non vuoto. Indichiamo con l'insieme  $A(S) = \{a, a^{-1} : a \in S\}$  l'*alfabeto* sull'insieme  $S$ . Chiamiamo poi *lettera* ogni elemento di  $A(S)$  e *parola* una sequenza finita di lettere. L'insieme di tutte le parole viene rappresentato come  $W(S)$ . Si può osservare facilmente che  $S$  è incluso in  $W(S)$ , come insieme composto da parole di lunghezza pari a 1.

Definiamo una relazione di equivalenza su  $W(S)$  nel modo seguente: due parole sono equivalenti se si ottengono l'una dall'altra con un numero finito di operazioni che consistono nell'inserire o nel cancellare delle coppie del tipo  $aa^{-1}$  oppure  $a^{-1}a$ .

**Proposizione 1.1.1** (Proprietà universale di caratterizzazione dei gruppi liberi). *Sia  $S$  un insieme finito con cardinalità  $n$ ; indiciamo con  $F(S)$  (o con  $F_n$ ) il gruppo libero associato a  $S$ . Comunque fissato un gruppo  $G$  e un'applicazione  $f : S \rightarrow G$ , esiste un unico omomorfismo di gruppi  $\phi : F(S) \rightarrow G$  che estende  $f$ .*

**Definizione 1.5.** Sia  $X$  un insieme non vuoto. Denotiamo con  $S(X)$  l'**insieme delle permutazioni** su  $X$ , cioè l'insieme di tutte le funzioni biunivoche da  $X$  in  $X$ .

*Osservazione 1.* L'insieme delle permutazioni è un gruppo (non abeliano se  $|X| > 2$ ) rispetto alla composizione tra funzioni. Inoltre la cardinalità di tale insieme è pari a  $|S(X)| = |X|!$ .

**Teorema 1.1.2.** *Ogni gruppo finitamente generato è quoziente di un gruppo libero  $F_n$ .*



*Dimostrazione.* Sia  $G$  un gruppo finitamente generato con generatori  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; allora l'omomorfismo

$$\phi : F(S) \longrightarrow G$$

che estende a  $F(S)$  l'inclusione in  $G$  dell'insieme  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dei generatori, è un omomorfismo suriettivo. Per il teorema degli omomorfismi di gruppi, questo implica che  $G$  è isomorfo a  $F(S)/\text{Ker}\phi$ . Dunque  $G$  è isomorfo a un quoziente di  $F_n$ .  $\square$

## 1.2 Presentazione di gruppi

Tenendo a mente la relazione di equivalenza e l'omomorfismo  $\phi : F(S) \longrightarrow G$  introdotti qualche riga sopra, possiamo fornire la definizione di relazione in  $G$ :

**Definizione 1.6.** Una **relazione** in un gruppo  $G$ , è un insieme di parole nei generatori di  $G$  che, tramite  $\phi$ , corrispondono all'elemento identità di  $G$ .

Una relazione è quindi un elemento del nucleo di  $\phi$ .

**Definizione 1.7.** Una **presentazione** di un gruppo  $G$  mediante *generatori e relazioni* è una scrittura del tipo  $G = \langle X; R \rangle$  dove  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  è un insieme dei generatori del gruppo  $G$ , mentre  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  è un insieme di parole appartenenti al gruppo libero  $F(S)$  tale che è il più piccolo sottogruppo normale di  $G$  che contiene le relazioni  $R$ .

**Proposizione 1.2.1.** *Ogni gruppo  $G$  finitamente generato ammette una presentazione con generatori e relazioni.*

La dimostrazione di tale risultato fa riferimento al Teorema 1.1.2. Per approfondimenti vedere .

In generale, dato un gruppo  $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_m | r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$ , possiamo ottenere da una presentazione, un'altra equivalente utilizzando le cosiddette *trasformazioni di Tietze*:

- se la relazione  $r$  può essere ottenuta da  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , allora possiamo aggiungerla alle relazioni di  $G$ ;
- se una relazione  $r_i$  è ottenibile alle altre presenti nella presentazione, può essere cancellata;
- se  $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$  è una parola, possiamo aggiungere il simbolo  $x_j$  con  $j \neq 1, 2, \dots, n$ , all'insieme dei generatori, e la relazione  $x_j = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$  alle relazioni;
- se qualche relazione è del tipo  $x_jX$  con  $X$  una parola generata da  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ , allora possiamo togliere  $x_j$  dai generatori e  $x_jX$  dalle relazioni, sostituendo, in quest'ultime,  $x_j$  con  $X^{-1}$ .

Per approfondimenti e dimostrazioni consultare [? ].

### 1.2.1 Classi laterali, tensori e la loro numerazione

**Definizione 1.8.** Sia  $G$  un gruppo e  $H$  un suo sottogruppo e  $g \in G$ , chiamiamo allora **classe laterale destra di  $H$  in  $G$  di rappresentante  $g$**  di  $G$  l'insieme

$$Hg = \{hg | h \in H\}$$

e **classe laterale sinistra di  $H$  in  $G$  di rappresentante  $g$**  l'insieme:

$$gH = \{gh | h \in H\}.$$

**Definizione 1.9.** Un **trasversale destro** (o sistema di rappresentanti delle classi laterali di  $H$  in  $G$ ) è un sottoinsieme  $T$  di  $G$  tale che per ogni  $g \in G$

$$|Hg \cap T| = 1.$$

**Definizione 1.10.** Un insieme non vuoto  $S$  di  $G$  gode della **Proprietà di Schreier** se contiene tutti i segmenti iniziali dei suoi elementi; cioè:

$$w = x_1 \dots x_n \in S \Rightarrow x_1 \dots x_{n-1} \in S$$

dove la lunghezza di  $w$ ,  $l(w) = n \geq 1$ .

*Osservazione 2.* Un **trasversale di Schreier** per  $H$  in  $G$  è un trasversale che gode della proprietà di Schreier. Si noti che ogni insieme di Schreier, e quindi anche ogni trasversale di questo tipo, contiene la parola vuota  $e$ .

### Metodo per la determinazione delle classi laterali

Andiamo ora a spiegare il metodo di numerazione simmetrica dei laterali, proposto da Coxeter. Tale metodo viene utilizzato quando  $H$  è un sottogruppo del gruppo  $G = \langle X | R \rangle$  generato da un insieme  $Y$  di parole di  $X^{\pm 1}$ , ammesso che  $|X|$ ,  $|R|$ ,  $|Y|$  e  $|G : H|$  siano finite.

Questo sistema può essere applicato a ogni specifica presentazione di un gruppo finito  $G \langle X | R \rangle$  e fornisce, come informazioni, l'ordine di  $G$ , una rappresentazione fedele di  $G$  in termini di gruppo di permutazioni e un insieme di trasversali di Schreier per il sottogruppo normale generato dalle relazioni  $R$  in  $G$ , che indichiamo con  $\bar{R}$ .

Per ogni relazione  $r = x_1 \dots x_n \in R$ , con  $x_1 \dots x_n$  una parola ridotta in  $X \cup X^{-1}$ , costruiamo una tabella rettangolare avente  $n + 1$  colonne e un certo numero di righe (per ora non specificato), come la seguente:

	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
1		2	...	1
2			...	2

ne avremo tante quanti sono gli elementi di  $R$ .

Iniziamo col mettere il simbolo 1 nel primo e nell'ultimo posto della prima riga di ogni tabella. Consideriamo ora il posto vuoto vicino a qualche uno (non importa se sia quello a destra o a sinistra) e vi mettiamo il simbolo 2. Per esempio supponiamo che 2 sia a sinistra di 1 e che  $x_1$  sia tra loro. Otteniamo quindi l'informazione  $1x_1 = 2$  (che possiamo leggere anche come  $2x_1^{-1} = 1$ ). A questo punto scriviamo 2 nel primo e nell'ultimo posto della seconda riga di ogni tabella, e, ogni volta che in una tabella troviamo 1 a sinistra di un posto vuoto, con  $x_1$  tra essi o a destra di un posto vuoto con  $x_1^{-1}$  tra essi, possiamo inserire nella cella vuota 2. Analogamente se 2 si trova a destra (sinistra) di un posto vuoto con  $x_1$  ( $x_1^{-1}$ ) tra essi, possiamo scrivere 1 nella cella vuota. Questo è un processo puramente meccanico conosciuto come *lettura*. Certi che nessun altro spazio possa essere riempito con 2, con un ragionamento analogo si introduce un nuovo simbolo, nel nostro caso 3, e così via fino a che tutti gli spazi di tutte le tabelle siano riempiti. Si può ora osservare che il numero di righe è pari a  $|G|$ .

Adattiamo questo metodo al caso in cui il sottogruppo  $H$  di  $G$  sia generato da un insieme finito di generatori  $Y$ . In questo caso il metodo fornisce come informazioni: l'indice di  $H$  in  $G$ , una rappresentazione di  $G$  in termini di gruppo delle permutazioni delle classi laterali (destra) di  $H$  e dei trasversali per  $H$  in  $G$  che godono della proprietà di Schreier.

In questo caso le tabelle vengono completate molto più rapidamente poichè alle tabelle associate alle relazioni si aggiunge un'ulteriore tabella per ogni  $y \in Y$ , costituita però una sola riga. Ora si procede seguendo il metodo esposto nelle righe precedenti.

Per ulteriori chiarimenti si veda [4]

### 1.2.2 Il metodo di Reidemeister-Schreier

Il metodo di Reidemeister-Schreier ci permette, dato un gruppo  $G$  di cui conosciamo la presentazione, di scrivere la presentazione di un suo sottogruppo  $H$ .

Tale processo si compone di quattro fasi che forniscono le seguenti informazioni:

1. un insieme di trasversali di Schreier  $U$  di  $H$  in  $G$ ;
2. un insieme di generatori  $B$  di  $H$ ;
3. le relazioni  $\hat{R} = \hat{R}(X)$  di  $H$ ;
4. le relazioni  $\hat{S} = \hat{S}(B)$  di  $H$ .

L'implementazione del passo 1. dipende da come viene specificato  $H$ . Per quanto riguarda la nostra trattazione, considereremo il caso in cui  $H$  sia un sottogruppo generato da un dato insieme di parole  $Y = Y(X)$ . Di conseguenza basterà utilizzare la variante del metodo per la conta delle classi laterali descritta nelle righe precedenti.

I generatori  $B$  del passo 2. vengono costruiti a partire dai trasversali e sono del tipo  $ux\bar{u}x^{-1}$  con  $u \in U, x \in X$  e  $ux \notin U$  e dove  $\bar{u}x$  è il rappresentante canonico della classe laterale di  $ux$ . Dunque, per definire tali elementi, non possiamo limitarci a conoscere solo  $X$  e  $U$ , ma occorre anche definire la funzione  $f(X) \rightarrow U$  che, ad ogni parola  $w \in X^\pm$ , intesa come elemento di  $G$ , associa la rispettiva classe laterale  $\bar{w} \in U$ . Tali informazioni derivano immediatamente dal metodo utilizzato per la conta delle classi laterali.

Il passo 3 è puramente meccanico che consiste nel riscrivere le parole in  $\hat{R} = \{uru^{-1} | u \in U, r \in R\}$ .

L'ultimo passo è un processo di riscrittura dove ogni elemento di  $\hat{R}$  viene espresso in termini dei generatori di  $B$  utilizzando il seguente metodo: considero un generico elemento di  $\hat{R}$   $ur = ux_1 \dots x_n$ . Moltiplico per  $\bar{u}x_1^{-1}\bar{u}x_1$  ottenendo  $ux_1\bar{u}x_1^{-1}\bar{u}x_1x_2 \dots x_n$  dove ora  $ux_1\bar{u}x_1^{-1} \in B$  e  $\bar{u}x_1 \in U$ . Iterando questo procedimento per ogni ele-

mento di  $\hat{R}$  otteniamo  $\hat{S}$ .

Dunque  $H = \langle B|\hat{S} \rangle$  dove se  $|X| = r$ ,  $|R| = m$  e  $|G : H| = g$ , allora  $|B| = (r-1)g + 1$  e  $|\hat{S}| = mg$ . Per ridurre la cardinalità di  $B$  e di  $\hat{S}$ , possiamo utilizzare le trasformazioni di Tietze.

### 1.3 Altri richiami algebrici

Per approfondimenti si veda [? ].

Introduciamo ora la nozione di *caratteristica* di un anello unitario. Consideriamo  $(R, +, \cdot)$ , il corrispondente gruppo additivo  $(R, +)$  e, in questo gruppo, il sottogruppo ciclico generato da  $1_R$ . Vi sono due casi possibili:

**Caso 1:** il sottogruppo generato da  $1_R$  è isomorfo a  $(\mathbb{Z}, +)$ , cioè è infinito; allora si dice che  $(R, +, \cdot)$  ha caratteristica 0;

**Caso 2:** per qualche intero  $q \geq 2$ , il sottogruppo generato da  $1_R$  è isomorfo a  $(\mathbb{Z}_q, +)$ ; in questo caso si dice che  $(R, +, \cdot)$  ha caratteristica  $q$ .

**Definizione 1.11.** Un anello commutativo unitario  $(R, +, \cdot)$  si dice **campo**, se l'insieme dei suoi elementi invertibili  $\mathcal{U}(R)$  coincide con  $R - \{0\}$ , cioè se si ha che, per ogni  $a \neq 0_R$  in  $R$  è invertibile, e quindi esiste (un unico)  $b = a^{-1} \in R$  tale che  $a \cdot b = b \cdot a = 1_R$ .

**Definizione 1.12.** Se  $(K, +, \cdot)$  è un campo, definiamo **sottocampo minimo** di  $K$  l'intersezione di tutti i sottocampi di  $K$ .

**Definizione 1.13.** Sia  $(R, +, \cdot)$  un anello unitario. Si dice **modulo sinistro** su  $R$  un gruppo abeliano (additivo)  $(M, +)$  in cui ogni elemento  $r \in R$  determina un'operazione 1-aria, che indichiamo con  $a \mapsto r \cdot a$ , per ogni  $a \in M$ , e che soddisfa le quattro condizioni seguenti:

- per ogni scelta di  $r \in R$  e  $a, b \in M$ ,  $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$ ;
- per ogni scelta  $r, s \in R$  e  $a \in M$ ,  $(r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$ ;
- per ogni scelta  $r, s \in R$  e  $a \in M$ ,  $(r \cdot s) \cdot a = r \cdot (a \cdot s)$ ;
- per ogni  $a \in M$ ,  $1_R \cdot a = a$ .

In modo del tutto analogo è possibile definire anche il modulo destro.

**Definizione 1.14.** Un modulo su un campo  $(K, +, \cdot)$  si dice **spazio vettoriale** su  $K$ .

## 1.4 Azioni di un gruppo su un insieme

**Definizione 1.15.** Dato un insieme non vuoto  $X$  e un gruppo moltiplicativo  $G$ , si dice **azione del gruppo  $G$  sull'insieme  $X$** , una funzione

$$* : G \times X \longrightarrow X$$

$$(g, x) \longrightarrow g * x$$

tale che:

- $\forall x \in X, 1 * x = x$ ;
- $\forall x \in X, \forall g, h \in G, (gh) * x = g * (h * x)$ .

A ogni azione di un gruppo su un insieme, è associata, in maniera naturale, una relazione binaria su  $X$ , definita come segue:

$$\forall x, y \in X \text{ si pone } x \approx y \text{ se e solo se } \exists g \in G \text{ tale che } y = g * x.$$

Si osserva con molta facilità che tale relazione è una relazione di equivalenza.

**Definizione 1.16.** Data un'azione  $*$  di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$ , per ogni  $x \in X$  si dice **orbita di  $x$**  (sotto l'azione di  $G$ ), la classe di equivalenza  $O(x)$  di  $x$  rispetto alle relazione  $\approx$ .

Un'azione di un gruppo su un insieme si dice *transitiva*, se esiste un'unica orbita, definiamo invece un'azione *banale* se e solo se  $\forall x \in X$  si ha che  $O(x) = \{x\}$ .

**Definizione 1.17.** Sia  $*$  un'azione di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$ ,  $\forall x \in X$  si dice **stabilizzatore** di  $x$  rispetto all'azione di  $G$  ( o anche gruppo di isotropia) l'insieme:

$$G_x = \{g \in G : g * x = x\}.$$

È possibile dimostrare che, data un'azione  $*$  di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$ , per ogni  $x \in X$  si ha che  $G_x$  è un sottogruppo di  $G$  e che l'indice di  $G_x$  in  $G$ , è pari alla cardinalità dell'orbita di  $x$ .

Per approfondimenti e dimostrazioni relativi a questa sezione si veda [3].

## 1.5 Gruppi di Coxeter

Concludiamo questo capitolo con l'esposizione e la definizione di una particolare famiglia di gruppi: i gruppi di Coxeter. Un esempio di questo tipo di gruppi sono i gruppi triangolari che tratteremo nel capitolo 4.

Per poter fornire una definizione sufficientemente esaustiva partiamo dall'introdurre alcuni concetti preliminari:

**Definizione 1.18.** Dato un gruppo  $G$ , due suoi sottogruppi  $B$  e  $N$ , e  $S$  un insieme finito di classi laterali di  $B \cap N$  in  $N$ , chiamiamo la quadrupla  $(G, B, N, S)$  un **sistema di Tits** se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

- $B \cap N$  è un sottogruppo normale di  $N$ ;
- $N/(B \cap N)$  è generato da  $S$ ;



- $G$  è generato da  $B$  e  $N$ , dunque  $G = \langle B, N \rangle$ ;
- per ogni  $s \in S$  e  $w \in N/(B \cap N)$  allora:  $sBw \subseteq Bw \cup BswB$ ;
- per ogni  $s \in S$ ,  $B^s \neq B$ .

Il gruppo  $N/(B \cap N)$  viene chiamato *gruppo di Weyl* e lo si indica con la lettera  $W$ .

**Definizione 1.19.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  di caratteristica diversa da 2, e sia

$$f : V \times V \longrightarrow V$$

una forma bilineare simmetrica non degenera su  $V$ . Sia  $W$  un iperpiano di  $V$  tale che  $W \cap W^\perp = \{0\}$ . Definiamo una **riflessione**  $\rho$  di *asse*  $W$ , un'isometria non identica di  $V$  che fissa tutti gli elementi di  $W$ .

**Lemma 1.5.1.** *Siano  $V, f, W$  come sopra. Allora esiste un'unica riflessione  $\rho$  di asse  $W$ . Tale riflessione fissa tutti gli elementi di  $W$  e manda ogni elemento di  $W^\perp$  nel suo opposto.*

**Definizione 1.20.** Un **gruppo di riflessioni** è un gruppo generato da riflessioni di uno spazio euclideo<sup>1</sup>. Inoltre, il prodotto di due riflessioni in uno spazio euclideo coincide con la composizione di una rotazione e una traslazione.

**Definizione 1.21.** Sia  $n$  un intero positivo. Una **matrice di Coxeter**  $M = (m_{i,j})$  di rango  $n$  è una matrice simmetrica  $n \times n$  a coefficienti interi, in cui gli elementi della diagonale hanno tutti valore 1, mentre gli altri valore maggiore o uguale a 2. Un **sistema di Coxeter** associato ad una matrice di Coxeter  $M$  è una coppia  $(G, S)$  dove:

- $G$  è un gruppo;

---

<sup>1</sup>Uno **spazio euclideo** è una coppia  $(V, f)$  dove  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita sui numeri reali, e  $f$  è un prodotto scalare, cioè una forma bilineare simmetrica definita positiva su  $V$ .

- $S := \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  è un sottoinsieme di  $G$  tale che :

$$G = \{(s_i s_j)^{m_{i,j}} : 1 \leq i, j \leq n\}$$

**Definizione 1.22.** Un gruppo  $G$  si dice **gruppo di Coxeter** se esiste un suo sottoinsieme  $S$  tale che  $(G, S)$  è un sistema di Coxeter.

La cardinalità di  $S$ , come definito sopra, viene denominata *rango di Coxeter* di  $G$ .

Per approfondimenti e dimostrazioni relative a questa sezione, consultare [? ].

# Capitolo 2

## Introduzione alle Geometrie non euclidee

In prospettiva dei capitoli successivi, in cui parleremo di triangoli definiti non solo su piani euclidei ma anche su superfici ellittiche e iperboliche, è bene spendere alcune parole e fornire nozioni utili su tali oggetti geometrici.

### 2.1 La nascita delle geometrie non euclidee

#### 2.1.1 Le origini della Geometria, come la conosciamo noi oggi

Pensando alla parola *Geometria* ci vengono subito in mente punti, rette, piani, poligoni, poliedri e moltri altri oggetti che possiamo raffigurare e, che con una certa approssimazione, possiamo individuare nell'ambiente che ci circonda. Questa nostra conoscenza è frutto in parte dell'istinto primitivo dell'uomo di voler comprendere e leggere il mondo che lo circonda (non dimentichiamoci mai che *La Matematica è l'alfabeto con il quale Dio ha scritto l'universo* come ci disse Galileo Galilei), ma anche dell'istruzione che abbiamo ricevuto.

È ormai tradizione, infatti, che nelle nostre scuole l'approccio alla Geometria avviene seguendo il metodo ipotetico-deduttivo proposto e adottato dal matematico greco Euclide negli *Elementi* (circa 300 a.C.). L'opera, composta da tredici libri, inizia con i **termini**, le odierne **definizioni** per intenderci, gli **assiomi** e i **postulati** ovvero asserzioni, le prime riguardanti argomenti matematici in generale, i secondi concetti strettamente geometrici, la cui verità è considerata evidente. Ogni altra **proposizione** presente dei libri seguenti, risultava essere deducibile da essi e quindi dimostrabile.

I termini e i postulati di Euclide che torneranno utili nella nostra trattazione sono i seguenti:

Termini:

- Punto è ciò che non ha parti;
- Linea (o retta) è lunghezza senza larghezza;
- Superficie (o piano) è ciò che ha solo larghezza e lunghezza;
- Parallele sono quelle rette che essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano tra loro da nessuna delle due parti.

Postulati:

1. Tra due punti distinti si può sempre tracciare un segmento;
2. Ogni segmento si può prolungare indefinitamente;
3. dati un punto  $O$  e un segmento  $d$  è sempre possibile tracciare una circonferenza che ha centro in  $O$  e raggio  $d$ ;
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro;
5. Due rette  $s$  e  $t$  che, tagliate da una trasversale  $r$ , formano da una stessa parte due angoli interni  $\alpha$  e  $\beta$  la cui somma è minore di un angolo piatto finiscono con l'incontrarsi da quella parte (quindi non sono parallele).

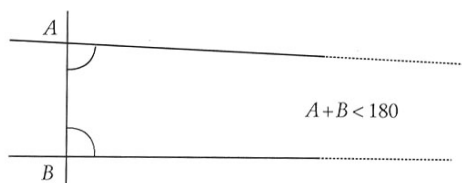


Figura 2.1: Rappresentazione grafica del quinto postulato di Euclide

Possiamo osservare che nel quarto postulato occorre aggiungere qualche precisazione riguardante la dicitura di "angolo retto". Euclide introduceva questa nozione nel modo seguente:

Si chiamano *supplementari* due angoli formati da una retta tagliata da una trasversale, e *retti* due angoli supplementari che sono uguali tra loro.

In questo modo il quarto postulato afferma che gli angoli che sono "retti" così definiti, sono tutti uguali tra loro, anche al variare delle rette che li generano.

Il postulato che, però, nel corso della storia ha generato più curiosità e controversie è il quinto. Possiamo subito notare che la formulazione proposta da Euclide è differente da quella che comunemente viene utilizzata e insegnata a scuola, ovvero:

**5\*** Dati una retta  $r$  e un punto  $C$  fuori da  $r$ , esiste una sola e una sola retta passante  $s$  per  $C$  e parallela a  $r$  (cioè priva di punti di intersezione con  $r$ ).

Tale riformulazione non è da attribuirsi allo stesso Euclide ma bensì a Proclo, matematico vissuto nel 400 d.C. il quale però, presenta questa la 5\* non come un postulato equivalente al quinto, ma come una proposizione che può essere dimostrata a partire dai cinque postulati della teoria euclidea. Contrariamente a quanto si pensa, però queste due diciture non sono del tutto equivalenti. In particolare possiamo osservare come il quinto postulato assicura che, sotto determinate ipotesi, due rette non sono parallele ed esso, vale non solo per la geometria euclidea, ma anche per la geometria ellittica (ciò sarà più chiaro in seguito). La proposizione data da Proclo invece caratterizza le geometrie euclidee e quindi, a livello formale,

risulta più stingente.

Vale la pena sottolineare che nella 5\* si pone l'accento sull' *unicità* della retta  $s$ ; ma l'esistenza di questa parallela si può dedurre come teorema sulla base degli altri quattro postulati.

A prescindere da come si voglia esprimere il quinto postulato però, bisogna prendere atto che anch'esso, insieme agli altri quattro, costituisce la base che Euclide scelse per la sua Geometria e sulla quale poi costruì le dimostrazioni dei successivi teoremi e proposizioni.

In effetti, pare incontestabile che tra due punti distinti ci sia una retta, o che si possa formare una circonferenza di centro e raggio assegnati, o che angoli retti siano uguali. Ma, per quanto riguarda il secondo e il quinto postulato, può nascere qualche ragionevole dubbio riguardo la loro evidenza. In entrambi i casi, sia quando si postula la possibilità di prolungare un segmento *indefinitamente*, sia quando si sostiene l'esistenza di rette che non si incontrano *mai*, si va a toccare il tema dell'*infinito*, argomento delicato non solo per la mentalità classica, ma anche per quella moderna.

L'infinito, nel pensiero greco, stava a significare un qualcosa di indeterminato, indecifrabile, incontrollabile (e per certi versi ciò vale ancora oggi), dunque come si poteva affermare con certezza il comportamento delle rette all'infinito?

Malgrado questi dubbi, è inevitabile riconoscere la necessità di accettare il quinto postulato in quanto, proprio grazie ad esso, è possibile tracciare senza ambiguità rette parallele, costruire triangoli simili, sviluppare una teoria coerente della similitudine, della proporzione, della riduzione in scala. Si è quindi cercato nel corso della storia di confermarlo, di dimostrarlo in modo da poterlo considerare un teorema e non un'intuizione degna di fiducia.

### 2.1.2 Apologia del Quinto Postulato

Per secoli i matematici non compresero fino in fondo il metodo adottato da Euclide per costruire la sua geometria, ecco perchè, nei secoli successivi, tentarono di trovare un sistema per poter mostrare la validità dei risultati ottenuti senza però

ricorrere al quinto postulato. In particolari tali tentativi seguivano tre tipologie di strategia:

- Sostituire il quinto postulato con altri di maggiore evidenza intuitiva;
- Riformulare la definizione di parallelismo in modo da rendere superfluo il postulato delle parallele;
- Dimostrare il postulato delle parallele in modo da inserirlo nell'edificio euclideo come teorema.

Uno dei primi a cimentarsi nell'impresa fu **Posidonio** (1° secolo a.C.) che riformulò la definizione euclidea di parallele (ovvero rette complanari che non si incontrano), proponendo di chiamare parallele le rette equidistanti. Tali definizioni tuttavia non sono equivalenti poichè, nonostante sia facilmente dimostrabile che due rette equidistanti non si incontrano, non è possibile provare che due rette che non si incontrano sono equidistanti, se non facendo riferimento al quinto postulato. In seguito lo stesso Proclo tentò di mostrare il postulato delle parallele, con una strategia fondata sull'ipotesi implicita che la distanza tra due rette parallele sia finita. Tale ipotesi però non può essere dimostrata se non ammettendo il postulato delle parallele. Ancora il matematico arabo **Nasîr-Eddin** (1201-1274) assunse che una linea, formata dai punti equidistanti da una retta sia una retta; e **J. Wallis** (1616-1703) tentò un approccio sfruttando il concetto intuitivo di similitudine tra figure piane, ma ancora una volta, in entrambi i casi, è implicito l'uso del quinto postulato.

È però con **Guglielmo Saccheri** (1667-1733) che la questione inizia ad acquistare interesse sotto diversi punti di vista. Nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus* (*Euclide liberato da ogni macchia*) Saccheri desiderava stabilire senza ombra di dubbio la validità del quinto postulato, fornendo la dimostrazione di esistenza e di unicità della parallela basandosi sulla base dei primi quattro indubitabili assiomi <sup>1</sup>. La sua dimostrazione parte dalla retta  $r$  e da due suoi punti distinti  $A$  e  $B$ ; per essi si tracciano due segmenti perpendicolari a  $r$  e di uguale

---

<sup>1</sup>Tutti i dubbi sul secondo postulato vennero messi a tacere di fronte alla sua evidenza lampante

lunghezza,  $AC$  e  $BD$  rispettivamente. Tracciando una retta passante per i punti  $C$  e  $D$ , si forma quello che oggi viene chiamato " *Quadrilatero di Saccheri* "  $ABCD$ .



Figura 2.2: Il quadrilatero di Saccheri

Saccheri riuscì a provare che i due angoli in  $C$  e  $D$  devono essere uguali; dunque vi erano tre possibili casi da analizzare:

1. I due angoli sono entrambi acuti;
2. I due angoli sono entrambi retti;
3. I due angoli sono entrambi ottusi.

Si può facilmente mostrare che l'ipotesi degli angoli retti, cioè il caso 2, e il quinto postulato sono equivalenti. Di conseguenza vanno escluse le altre due possibilità. Assumendo vera l'ipotesi dell'angolo ottuso, si deducono alcuni risultati quali:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di  $\pi$ ;
- Una perpendicolare e una obliqua a una stessa retta si incontrano sempre.

Quest'ultima proprietà, in particolare, permette a Saccheri di rigettare l'ipotesi dell'angolo ottuso: infatti da essa si può dedurre facilmente il postulato delle parallele, da cui, discende la validità degli angoli retti, in contraddizione con l'ipotesi assunta. Si passa quindi a contraddire il caso 1, dal quale però Saccheri ricavò solo una serie di conseguenze *singolari*, come ad esempio:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di  $\pi$ ;
- Si possono trovare una perpendicolare e un obliqua ad una stessa retta, che non si incontrano;



- Esistono coppie di rette asintotiche <sup>2</sup>;
- Data una retta  $r$  e un punto  $P$  fuori da essa, esistono due rette  $a$  e  $b$ , passanti per  $P$  tali per cui ogni retta passante per  $P$  che cade all'interno degli angoli formati da  $a$  e da  $b$ , che non contengono la perpendicolare da  $P$  a  $r$ , non incontra  $r$ , ogni retta che cade all'esterno di tali angoli incontra  $r$ ; le rette  $a$  e  $b$  sono asintotiche a  $r$ .

Tali stranezze indussero Saccheri a pensare di aver dimostrato in modo esaustivo l'impossibilità dell'ipotesi 1, provando quindi la validità del quinto postulato. In realtà le sue conclusioni, per quanto singolari, non portavano a nessuna evidente contraddizione, e dunque non furono sufficienti a "liberare Euclide da ogni macchia". Dunque nemmeno Saccheri riuscì a scrivere la parola fine per quanto riguarda l'accettabilità o meno del quinto postulato. Altri infatti, dopo di lui si cimentarono nell'impresa come Lambert, Lagrange, Farkas Bolyai e Karl Friedrich Gauss. In particolare Gauss, ritenuto uno dei più grandi matematici della storia, durante le ricerche volte a dimostrare il quinto postulato comprese che i suoi risultati non confermavano la validità di tale affermazione, ma invece, aprivano le porte ad una nuova geometria, diversa da quella conosciuta fin ora. Consapevole delle polemiche che questa notizia avrebbe potuto suscitare, Gauss se ne guardò bene dal diffonderla e decise di tenere per se i suoi risultati.

### 2.1.3 Lobacevskij, Bolyai e Riemann

Lo studio condotto da Saccheri ispirò i matematici dell'Ottocento, non tanto per affermare il quinto postulato, ma piuttosto per esplorare prospettive alternative. Due matematici coraggiosi, in particolare, decisero di intraprendere questa via e pubblicare i loro risultati: il russo **Nicolaj Lobacevskij** (1793-1856) e l'ungherese **Janos Bolyai** (1802-1860), figlio del Farkas sopra citato. Due figure, queste, per certi aspetti molto simili, ma le cui vicende si differenziano molto; il primo professore e poi rettore presso l'Università di Kazan', uomo maturo e ponderato, il

---

<sup>2</sup>Ovvero coppie di rette che si comportano all'infinito come si comporta un ramo d'iperbole con il suo asintoto.

secondo figlio d'arte, giovane e appassionato, lavorarono e giunsero, se pur in modo totalmente indipendente, alle stesse conclusioni riguardanti la dimostrazione del quinto postulato, ma i riscontri che ebbero i loro lavori furono del tutto differenti. Lobacevskij pubblicò sulla "Gazzetta di Kazan" il trattato *Sui principi della geometria* nel 1829, in cui erano racchiuse le basi di quella che costituì il primo esempio di geometria non euclidea. Si assumeva come postulato sostitutivo al quinto, una sua negazione, ovvero che:

Per un punto  $P$  fuori da una retta  $r$  passano più rette che non incontrano  $r$ .

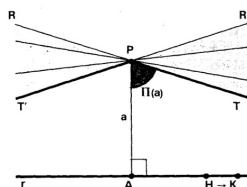


Figura 2.3: L'immagine mostra quelle che, secondo Lobacevskij, sono le rette esterne a  $r$ , passanti per  $P$ , ma non secanti alla retta

Riprendendo quindi la costruzione proposta da Saccheri nell'ipotesi degli angoli acuti, Lobacevskij definì *parallele* solo le rette  $a$  e  $b$  che delimitano gli angoli in cui vengono a cadere le non secanti. Egli mostrò inoltre che l'ampiezza di tali angoli dipende dalla distanza  $d$  per punto  $P$  dalla retta  $r$ ; più precisamente, indicando con  $\pi(d)$  la loro misura espressa in radianti, definì:

$$\pi(d) = 2 \arctan(\alpha^{-d}) \tag{2.1}$$

dove  $\alpha$  è una costante maggiore di 1. Perciò, come si potrebbe dimostrare anche con considerazioni geometriche, la funzione  $\pi(d)$  risulta continua e decrescente e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \pi(d) = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi(d) = 0.$$

Possiamo osservare che da questi risultati, la geometria Euclidea risulta un caso particolare dalla geometria proposta da Lobacevskij. Se infatti nella 2.1 anziché  $\alpha > 1$  poniamo  $\alpha = 1$ , otteniamo per  $\pi(d)$  il valore costante  $\frac{\pi}{2}$ .

Lobacevskij era ormai rettore quando pubblicò questo lavoro, e si guardò bene dal presentarlo come un'opera rivoluzionaria, anzi, lui stesso lo definì un mero esercizio della mente, e ciò gli permise di evitare polemiche e critiche da parte della comunità matematica dell'epoca.

Diverso invece fu il destino di Bolyai. Nonostante il padre più volte lo avesse intimato a non approfondire e ricercare una dimostrazione del quinto postulato, come ogni buon figlio che si rispetti, Janos continuò per la sua strada e pubblicò le sue ricerche come appendice dell'opera del padre *Tentamen*. Come già per Lobacevskij, l'idea di Bolyai era quella di assumere che per un punto esterno ad una retta data esistessero addirittura infinite rette parallele ad essa. Tale opera suscitò non poche polemiche tra i matematici dell'epoca e ciò influi molto sulla carriera di Bolyai, che venne ostacolata non poco.

Un ulteriore esempio di geometria non euclidea venne presentato qualche anno dopo da **Bernhard Riemann** che nel 1853 pubblicò *Sulle ipotesi che stanno alla base della Geometria* dove si considera come piano usuale una superficie sferica. Tale sistema non solo va a modificare il quinto postulato, ma anche il secondo; infatti ora si considera, come retta, una circonferenza di raggio massimo; e dunque non più estendibile in modo indefinito. Di conseguenza il quinto postulato assume la forma seguente:

Una retta  $s$  che passa per un punto <sup>3</sup>  $P$  esterno alla retta  $r$  finisce sempre per incontrare  $r$ .

Dunque non esiste alcuna retta passante per  $P$  parallela a  $r$ . Osserviamo inoltre che in questo modello proposto da Riemann, vale l'ipotesi degli angoli ottusi proposta da Saccheri; infatti, avendo riformulato il secondo postulato, la contraddizione individuata dal matematico italiano non sussiste, e dunque si possono ricavare alcuni risultati sorprendenti:

- Non esistono rette parallele;
- La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di  $\pi$ .

---

<sup>3</sup>In questo ambito con punto si intende in realtà una coppia di punti diametralmente opposti sulla superficie della sfera

I modelli di Lobacevskij-Bolyai e di Riemann sono stati in seguito battezzati dal matematico Klein con i nomi di *Geometria Iperbolica* e *Geometria Ellittica* rispettivamente, e ancora oggi sono così indicati. [1], [7]

## 2.2 La rivoluzione di Riemann

Sarebbe sciocco ridurre il contributo di Riemann soffermandoci solo su quanto detto nelle righe precedenti. È bene dunque approfondire il suo lavoro, che ha decisamente ampliato l'orizzonte della Matematica, e in particolare della Geometria.

Nella sua ricerca Riemann considera lo spazio in modo analitico anziché sintetico, ovvero si passa dal ragionare con rette, figure e punti visibili e rappresentabili, all'utilizzo di formule e strumenti analitici per descrivere gli oggetti trattati. In particolare sono tre i concetti centrali su cui si regge tutto il suo lavoro: il concetto di **m-varietà**, di **metrica** e di **geodetica**. Tutta questa impalcatura teorica, operativamente ha come scopo quello di riuscire a trovare un sistema che permetta di misurare distanze e grandezze su oggetti non regolari.

### 2.2.1 Varietà

Andiamo ora a introdurre una m-varietà che ci servirà per definire le varietà riemanniane. In questa parte daremo per scontate alcune conoscenze di base, che verranno riportate nell'appendice.

**Definizione 2.1.** Sia  $M$  uno spazio topologico di dimensione  $m$ , allora esso è detto **m-varietà topologica** se e solo se  $M$  è uno spazio di Hausdorff secondo numerabile e localmente euclideo a  $\mathbb{R}^m$ .

Fissato un punto  $x$  sulla nostra m-varietà, esiste sempre un intorno aperto di  $x$ ,  $U$  e un omeomorfismo  $\psi : U \rightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^m$ , grazie alla proprietà di essere localmente euclideo. La coppia  $(U, \psi)$  prende il nome di *carta locale* per la nostra

varietà  $M$ . L'insieme  $\mathcal{U} = \{(U, \psi) \text{ carte locali}\}$  è detto *atlante*.

Prima di proseguire introducendo le varietà differenziabili, è utile ricordare cosa si intende con applicazione differenziabile e diffeomorfismo.

**Definizione 2.2.** Siano  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$ , sia  $f : U \rightarrow V$  e sia  $\bar{x} \in U$ ; allora  $f$  si dice **differenziabile** se e solo se  $f \in \mathcal{C}^\infty$  in  $x$ , per ogni  $\bar{x} \in U$ .

**Definizione 2.3.** Chiamiamo **differenziale** l'applicazione lineare  $d_{\bar{x}}f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\exists \epsilon : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  infinitesimo di ordine superiore al primo tale che  $f(x) - f(\bar{x}) = d_{\bar{x}}f(x - \bar{x}) + \epsilon(x - \bar{x})$ .

**Definizione 2.4.** Una funzione  $f$  viene detta **diffeomorfismo** se e solo se  $f$  è differenziabile, invertibile e con inversa differenziabile.

**Definizione 2.5.** Due carte  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  della  $m$ -varietà topologica  $M$  tali che  $U \cap V \neq \emptyset$ , si dicono **differenziabilmente compatibili** se la funzione  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  è un diffeomorfismo.

Diremo poi che un **atlante** è **differenziabile** se e solo se tutte le sue carte sono differenziabilmente compatibili.

**Definizione 2.6.** Definiamo un atlante differenziabile massimale con il nome di **struttura differenziabile**  $\mathcal{S}$  e, chiamiamo poi la coppia  $M = (M, \mathcal{S})$ , dove  $M$  è una varietà topologica, **varietà differenziabile**.

Può essere utile a questo punto definire cosa si intende per applicazione differenziabile nel caso in cui essa venga applicata a delle varietà differenziabili:

**Definizione 2.7.** Siano  $M$  e  $N$  due varietà differenziabili, e sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione continua. Fissato un punto  $p \in M$ ,  $f$  è **differenziabile** in  $p$  se e solo se per ogni carta  $(U, \psi)$  che contiene  $p$ , appartenente a  $\mathcal{S}_M$  e per ogni carta  $(V, \phi)$  contenete  $f(p)$  in  $\mathcal{S}_N$ ,  $\phi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \phi(V \cap f(U))$  è

un'applicazione differenziabile in  $\psi(p)$ .

Inoltre:

**Definizione 2.8.** Date due varietà  $M$  e  $N$  esse si dicono **diffeomorfe** se e solo se esiste un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow N$ .

Oltre alla differenziabilità, introduciamo ora, un'altra proprietà delle varietà, definendo prima il rango:

**Definizione 2.9.** Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile in  $p \in M$ ; il **rango** in  $p$  di  $f$  è il rango della matrice jacobiana valutata in  $\psi(p)$  di  $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$ .

Si può mostrare facilmente che il rango non dipende dalla scelta di carte sulla varietà.

**Definizione 2.10.** Un'applicazione  $f$  definita come sopra, si dice **regolare in  $p$**  se è solo se il rango di  $f$  in  $p$  è massimo (cioè o è pari alla dimensione di  $M$  o a quella di  $N$ ). Inoltre diremo che  $f$  è **regolare** se e solo se è regolare in tutti i punti di  $M$ .

*Osservazione 3.* La composizione di funzioni regolari non è necessariamente regolare, lo è solo nel caso in cui risulti o iniettiva o suriettiva;

*Osservazione 4.* Se le varietà differenziabili  $M$  e  $N$  hanno la stessa dimensione, allora la funzione  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo se e solo se  $f$  è un omeomorfismo differenziabile regolare.

Definiamo ora lo spazio tangente in  $\mathbb{R}^m$ , per poi estendere questa definizione a una  $m$ -varietà:

**Definizione 2.11.** Dato  $\bar{x} \in U \subset \mathbb{R}^m$  definiamo  $T_{\bar{x}}U = \{v = \overrightarrow{\bar{x}\bar{x}}\}$  vettore tale che  $x \in \mathbb{R}^m$ .  $T_{\bar{x}}U$  è detto **spazio tangente a  $U$  in  $\bar{x}$** .

*Osservazione 5.* Lo spazio tangente  $T_{\bar{x}}\mathbb{R}^m$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^m$ .

Possiamo poi andare a definire l'applicazione, data un'applicazione  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'applicazione tangente, come segue:

**Definizione 2.12.** Siano  $U$  e  $V$  due intorni di  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  rispettivamente. Definiamo l'**applicazione tangente**  $T_{\bar{x}}f : T_{\bar{x}}U \rightarrow T_{f(\bar{x})}V$  come l'applicazione che manda ogni  $v \in T_{\bar{x}}U$  in  $w = d_{\bar{x}}f(x - \bar{x})$

L'applicazione tangente gode delle seguenti proprietà:

1. vale la regola della catena nella composizione di funzioni, ovvero:

$$T_{\bar{x}}(g \circ f) = T_{f(\bar{x})}g \circ T_{\bar{x}}f$$

2. se  $m = n$ ,  $T_{\bar{x}}f$  è un isomorfismo se e solo se  $f$  è un diffeomorfismo locale.

Possiamo inoltre definire su  $T_{\bar{x}}U$  una base canonica  $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \dots, \bar{e}^m)$ , grazie alla quale possiamo scrivere ogni elemento  $v \in T_{\bar{x}}U$  come  $v = \sum_{i=1}^m v^i \bar{e}^i$ . Sia poi  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile; possiamo definire

$$vg = \frac{\partial g}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x})}{t}$$

da cui introduciamo l'applicazione  $v : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $g \rightarrow vg$ . Questa nuova funzione gode delle seguenti proprietà:

1.  $\forall v, w \in T_{\bar{x}}U$  e  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  vale che  $(av + bw)g = avg + bwg$ ;
2.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  e  $\forall g, h \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ,  $v(ag + bh) = avg + bvh$ ;
3. vale la regola di Leibnitz, ovvero  $\forall g, h \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ,  $v(g \circ h) = (vg)h(\bar{x}) + g(\bar{x})(vh)$ .

Ciò ci permette di scegliere come base per  $T_{\bar{x}}U$  la base canonica  $(\frac{1}{\partial x^1}, \frac{1}{\partial x^2}, \dots, \frac{1}{\partial x^m})$ .

Andiamo quindi ad adattare queste definizioni alle  $m$ -varietà. Per farlo consideriamo l'insieme di tutte le curve differenziabili uscenti da  $p$

$$\Gamma_p M = \{\alpha : I \longrightarrow M : \alpha(0) = p\}$$

dove  $\alpha$  è una parametrizzazione differenziabile regolare. Definiamo poi una relazione di equivalenza tramite la funzione

$$\gamma_\phi : \alpha \in \Gamma_p M \longrightarrow \gamma_\phi(\alpha) = (\phi \circ \alpha)'(0) = T_0(\phi \circ \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \in T_{\phi(p)}\mathbb{R}^m$$

che mi permette di dire che due curve che hanno lo stesso vettore velocità sono equivalenti.

**Definizione 2.13.** Definiamo lo **spazio tangente ad una  $m$ -varietà  $M$  nel punto  $p$**   $T_p M = \Gamma_p M / \sim_{\gamma_\phi}$ .

*Osservazione 6.* Possiamo definire una funzione  $\tau_\phi : T_p M \longrightarrow T_{\phi(p)}\mathbb{R}^m$  definita come:  $\tau_\phi = \pi^{-1} \circ \gamma_\phi$  dove  $\pi$  è la proiezione canonica di  $\Gamma_p M$  su  $T_p M$ .  $T_p M$  è uno spazio vettoriale ben definito, poichè non dipenda dalla scelta della carta  $(U; \phi)$ , ciò rende  $\tau_\phi$  un isomorfismo.

Analogamente a quanto detto per  $\mathbb{R}^m$  possiamo definire un'applicazione tangente tra varietà:

**Definizione 2.14.** Sia  $f : M \longrightarrow N$  un'applicazione differenziabile tra varietà differenziabili. Definiamo  $T_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$  l'**applicazione tangente** che a  $v = [\alpha] \longrightarrow w = [f \circ \alpha]$ .

Da qui in avanti ci concentreremo sulle 2-varietà, ovvero sulle superfici.



## 2.2.2 Metriche

**Definizione 2.15.** Una funzione  $d : X \times X \rightarrow [0; +\infty[$ , con  $X$  spazio topologico, si definisce **metrica** se e solo se soddisfa le seguenti proprietà:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$ ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Una funzione che sicuramente soddisfa tali proprietà è il prodotto scalare, definito come segue:

**Definizione 2.16.** Dato uno spazio vettoriale  $V$  su un capo  $\mathbb{K}$ , definiamo la funzione  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  **prodotto scalare** se sono soddisfatte le condizioni:

- $g$  è simmetrica:  $g(v, w) = g(w, v)$ ;
- $g$  è bilineare;
- $g$  è definito positivo:  $g(v, v) > 0 \forall v \neq 0$ .

**Definizione 2.17.** Uno **spazio metrico** la coppia  $(X, d)$  dove  $X$  è un insieme e  $d$  è una metrica.

**Definizione 2.18.** Uno **spazio topologico associato allo spazio metrico** è uno spazio con la topologia indotta dalla metrica  $d$  ovvero  $\mathcal{T}_d = \{A \in X : \forall x \in A \exists \epsilon > 0 : B_d(x, \epsilon) \subset A\}$  dove con  $B_d(x, \epsilon)$  indichiamo la boccia aperta di centro  $x$  e raggio  $\epsilon$  nella topologia indotta dalla metrica.

*Osservazione 7.* Ogni  $m$ -varietà può essere immersa in uno spazio euclideo in modo differenziabile e regolare, in uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^{2m+1}$ . Ciò mi permette di pensare la  $m$ -varietà come una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{2m+1}$ . Da ciò segue che c'è una struttura metrica intrinseca sulla varietà; infatti considero  $p$  e  $T_p M \subseteq T_p \mathbb{R}^n$  con  $n \geq 2m + 1$  posso restringere la norma (cioè il prodotto scalare) definito su  $\mathbb{R}^n$  a  $T_p M$ . Questo

mi permette di avere una struttura metrica sulla varietà in cui, per ogni punto, ho un prodotto scalare che varia in maniera differenziabile in funzione del punto.

**Proposizione 2.2.1.** *Sia  $M$  una  $m$ -varietà differenziabile e si consideri una famiglia di prodotti scalari su  $T_p M, \forall p \in M$  che variano in modo differenziabile da punto a punto. Siano  $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $w = \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  e  $\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j$ ; chiedere che  $g_{ij}$  siano differenziabili (viste come applicazioni da  $U$  a  $\mathbb{R}$ ) equivale a chiedere che,  $\forall V, W$  campi di vettori su  $M$ , la funzione  $\langle V, W \rangle$ , definita punto per punto come  $\langle V, W \rangle_p = \langle V_p, W_p \rangle$  sia differenziabile.*

**Definizione 2.19.** Definiamo l'operatore  $ds : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  tale che al vettore  $v$  viene mandato in  $\|v\|_p$ . Indichiamo con **elemento di lunghezza** di una  $m$ -varietà

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{i,j} dx^i dy^j \quad (2.2)$$

**Teorema 2.2.2.** *Sia  $M$  una  $m$ -varietà differenziabile. Per ogni  $M$  esiste  $g = (g_p)_{p \in M}$ , dove  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , struttura riemanniana su  $M$ .*

Abbiamo ora tutti gli elementi per definire una  $m$ -varietà riemanniana:

**Definizione 2.20.** La coppia  $(M, g^M)$ , dove  $M$  è una  $m$ -varietà e  $g^M$  è la metrica riemanniana su  $M$ , viene detta **varietà riemanniana**.

Detto in parole povere tutta questa struttura costruita da Riemann ci permette, se pur in modo indiretto, di poter definire su un oggetto irregolare delle coordinate, e quindi di poter misurare le distanze e costruire su esso in modo analitico.

D'ora in avanti considereremo le 2-varietà. A tal proposito il piano euclideo, quello iperbolico e la sfera sono 2-varietà riemanniane (o superfici di Riemann). Consideriamo, per esempio il piano euclideo e su esso la metrica indotta dal prodotto scalare, dunque:

$$(\mathbb{R}^2, ds^2 = dx^2 + dy^2).$$

Nel caso della sfera, possiamo considerare quest'ultima come una superficie immersa in  $\mathbb{R}^3$  e dunque restringere la metrica indotta dal prodotto scalare su  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{S}^2$  ottenendo:

$$(\mathbb{S}^2, ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Considerando prima le coordinate sferiche ( $x = \sin \theta_1 \cos \theta_2$ ,  $y = \sin \theta_1 \sin \theta_2$  e  $z = \cos \theta_2$ ), e passando poi alla proiezione stereografica dove  $\theta_1 = \theta$  e  $\theta_2 = \arccos \frac{2\rho}{\rho^2+1}$ , invece, abbiamo

$$(\mathbb{S}^2, ds^2 = \frac{4}{(\rho^2 + 1)^2}(\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2))$$

Infine, se pensiamo al piano iperbolico come al semipiano positivo di  $\mathbb{R}^2$ , abbiamo che:

$$(\mathbb{H}^2, \frac{1}{y^2} \cdot (dx^2 + dy^2))$$

*Osservazione 8.* Sia  $M$  una varietà riemanniana, e sia  $N \subset M$  sottovarietà differenziabile. Posso considerare  $g^N = g^M|_N$  come metrica su  $N$ , in modo che  $g_p^N = g_p^M|_{T_p N} : T_p N \times T_p N \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definizione 2.21.** Sia  $M$  una varietà riemanniana e  $N$  una sottovarietà differenziabile di  $M$ ; allora  $(N, g^M|_N)$  viene detta **sottovarietà riemanniana**.

**Definizione 2.22.** Siano  $(M, g^M)$  e  $(N, g^N)$  due varietà riemanniane; sia  $f : M \rightarrow N$  un diffeomorfismo (locale).  $f$  viene detta **isometria (locale)** se  $\forall p \in M, T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  è un'isometria euclidea, ovvero  $\forall v, w \in T_p f$

$$g_p^M(v, w) = g_{f(p)}^N(T_p f(v), T_p f(w))$$

**Definizione 2.23.** Sia  $f$  un'applicazione differenziabile tra le varietà  $M$  e  $N$ . Allora

- $f$  è **isometrica** se  $\forall p \in M, T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  è un'isometria euclidea;

- $f$  è **conforme** se e solo se  $T_p f$  è una similitudine lineare per ogni  $p \in M$  (in altre parole se  $k(p)g_p^M(v, w) = g_{f(p)}^N(T_p f(v), T_p f(w))$ );
- $f$  è **simile** se e solo se è conforme con  $k(p)$  costante.

Possiamo quindi definire una *conformità* come un diffeomorfismo conforme, una **similitudine** come un diffeomorfismo simile; e come **isometria**, un diffeomorfismo isometrico. Inoltre osserviamo che:

$$Isom(M, g) \subset Sim(M, g) \subset Conf(M, g)$$

### 2.2.3 Geodetiche

**Definizione 2.24.** Sia  $C \subset M$  chiuso ammissibile. Definiamo allora il **volume** di  $C$  come:

$$Vol_m C = \int_C \omega^g = \int_g \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m$$

Possiamo osservare che:

- Se  $m = 1$ ,  $C$  è una curva e  $Vol_1 C$  corrisponde alla lunghezza di  $C$ , se  $m = 2$ ,  $C$  è una superficie, e  $Vol_2 C$  è l'area;
- sia  $N$  una sottovarietà differenziabile di  $M$  con  $dim N = n \leq dim M = m$ ; posso trovare  $\omega^{g|_N}$  e per  $C$  contenuto in  $N$  chiuso ammissibile, definire  $Vol_n C = \int_C \omega^{g|_N}$ .

**Definizione 2.25.** Consideriamo  $C \subset M$  una curva differenziabile regolare e sia  $\gamma : I \rightarrow C$  una sua parametrizzazione; definiamo la **lunghezza della curva**  $C$  come:

$$Lung C = \int_I \|\gamma'(t)\|_g dt \tag{2.3}$$

**Definizione 2.26.**  $\forall p, q \in M$ , definiamo la **distanza geodetica** tra due punti:

$$dg(p, q) = \inf_C LungC \quad (2.4)$$

Osserviamo che:

- nella definizione 2.26, si usa l'inf perchè non è detto che esista una curva che colleghi  $p$  e  $q$  che abbia lunghezza minima;
- se  $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$  curve regolari con parametrizzazioni regolari  $\gamma_i = I_i \rightarrow C_i, \forall 1 \leq i \leq k$  concatenate, dove  $I_j = [a_j, b_j]$  e  $\gamma_1(a_1) = p, \gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$  e  $\gamma_k(b_k) = q$ , allora  $LungC = \sum_i LungC_i$ ;
- la distanza geodetica  $dg$  è una funzione distanza che induce, su  $M$  la topologia di parenza e che fa corrispondere le isometrie riemanniane tra varietà, alle isometrie tra varietà riemanniane.

**Proposizione 2.2.3.** *Sia  $N \subset M$  sottovarietà differenziabile, allora  $dg_{|N}(p, q) \geq dg(p, q), \forall p, q \in N$ .*

**Proposizione 2.2.4.** *Sia  $(M, g)$  varietà riemanniana,  $\exists!$  un operatore:*

$$(v, W) \longrightarrow \nabla_v W \in T_p M$$

dove  $v \in T_p M$  è un vettore e  $W$  è un campo vettoriale; tale che:

- è  $R$ -lineare;
- soddisfa la regola di Leibniz ovvero  $\nabla_v(fW) = \frac{\partial f}{\partial v} W(p) + f(p) \nabla_v W$ ;
- $\nabla_V W$  è un campo di vettori e vale  $\nabla_V W - \nabla_W V = [VW]$  con  $V$  campo di vettori;
- $\nabla_v g(W_1, W_2) = \nabla_v \langle W_1, W_2 \rangle_g = g_p(\nabla_v W_1, W_2(p)) + g_p(W_1(p), \nabla_v W_2)$ .

*Osservazione 9.*  $\nabla_v$  è un operatore locale poiché dipende solo da come è fatto  $W$  intorno a  $p$ .

**Definizione 2.27.** La parametrizzazione  $\gamma : I \rightarrow M$  viene detta **parametrizzazione geodetica** se  $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0 \forall t \in I$ , ovvero se il campo dei vettori velocità risulta essere parallelo lungo la curva  $C = \gamma(t)$ .

**Definizione 2.28.** Data una parametrizzazione geodetica  $\gamma$ , allora la curva  $C = \gamma(I)$  viene detta **curva geodetica** (o semplicemente geodetica).

**Definizione 2.29.**  $N \subset M$  viene detta **sottovarietà riemanniana totalmente geodetica** se e solo se tutte le geodetiche di  $N$  sono anche geodetiche di  $M$ .

**Definizione 2.30.**  $(M, g)$  varietà riemanniana si dice **completa** se e solo se il dominio di esistenza delle geodetiche  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  uscente da  $p$  con velocità  $v \in T_p M$  coincide con  $\mathbb{R} \forall v \in T_p M$ .

**Teorema 2.2.5. (Hopf-Rinow)**  $(M, g)$  è una varietà riemanniana geodeticamente completa se e solo se  $(M, dg)$  è uno spazio metrico completo.

**Lemma 2.2.6.** Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana geodeticamente completa,  $\forall p, q \in M, \exists C_{p,q}$  arco geodetico di lunghezza minima tale che  $L(C_{p,q}) = dg(p, q)$ .

In parole più povere, una geodetica è la curva, appartenente alla superficie, di lunghezza minima che collega due punti distinti.

Pensando alle superfici  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$ , considerate in precedenza, possiamo andare a individuare le geodetiche di tali superfici. In particolare nel caso euclideo le geodetiche sono le rette, su  $\mathbb{S}^2$ , come superficie immersa in  $\mathbb{R}^3$  sono le circonferenze di diametro massimo, mentre, se consideriamo la sua proiezione stereografica sul piano, in questo caso le geodetiche sono tutte le rette uscenti dall'origine e le circonferenze (si faccia riferimento alla figura 4.8). Per il piano iperbolico invece, a seconda del modello scelto per rappresentarlo, possiamo avere geodetiche differenti; nel caso si scelga il disco di Poincaré, le geodetiche saranno tutti i diametri del

disco e gli archi circonferenza interni ad esso perpendicolari al bordo, mentre, nel modello del semipiano, saranno tutte le rette verticali e le semicirconferenze perpendicolari all'asse  $x$ . Per approfondimenti e dimostrazioni si veda [? ].

### 2.2.4 Le isometrie

Dedichiamo ora qualche riga alle isometrie, in particolare a quelle di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$ . Per approfondimenti e dimostrazioni consultare [? ] e [? ].

Le funzioni che fanno parte di  $Isom(\mathbb{R}^2)$  si possono distinguere in quattro categorie:

- le traslazioni di un vettore  $v$ ,
- le rotazioni di un angolo  $\theta$ ,
- le riflessioni rispetto ad un asse,
- le glisoriflessioni, cioè composizioni di riflessioni e traslazioni.

Ai fini del nostro lavoro, ci soffermeremo maggiormente sulle riflessioni.

Per quanto riguarda la sfera, essendo essa una superficie contenuta nello spazio euclideo, possiamo considerare come  $Isom(\mathbb{S}^2)$  le isometrie  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  tali che  $f(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$ . In particolare, se consideriamo le riflessioni. Proiettando la sfera stereograficamente, otteniamo che una riflessione rispetto ad una circonferenza data (anche rispetto a circonferenze degeneri, cioè rispetto alle rette uscenti dall'origine) è una funzione che lascia fissi i punti della circonferenza e che ad ogni punto interno ad essa fa corrispondere un punto esterno e viceversa in modo da invertire le lunghezze. Detto in modo più formale, fissiamo una circonferenza  $\mathcal{C}$  e chiamiamo con  $P$  il suo centro. Sia  $S$  un punto interno alla circonferenza e  $\rho$  la riflessione rispetto a  $\mathcal{C}$ . Allora il punto  $Q = \rho(S)$  è tale per cui

$$||\overline{PQ}|| \times ||\overline{PS}|| = 1.$$

Infine consideriamo le riflessioni del piano iperbolico. Sia  $\mathcal{C}$  l'asse di riflessione (costituito ovviamente da una geodetica). La riflessione  $\gamma$  è definita nel modo seguente:

$$\gamma(P) = \begin{cases} P_{se}P \in \mathcal{C} \\ Q_{se}P \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

dove  $d(P, \mathcal{C}) = d(Q, \mathcal{C})$ .



# Capitolo 3

## Tassellazioni e Triangoli

### 3.1 Tassellazioni

Riportiamo alcune definizioni fondamentali riguardo alla tassellazione di uno spazio. Per approfondimenti invitiamo il lettore a consultare [6].

Indichiamo con  $X$  il piano, sia esso euclideo, sferico o iperbolico, su cui viene costruita la tassellazione.

**Definizione 3.1.** Si definisce **tassellazione del piano** un ricoprimento formato dai poligoni  $\{D_i\}_{i \in I}$  tali che:

$$X = \bigcup_{i \in I} D_i \quad e \quad int(D_i) \cap int(D_j) = \emptyset \quad i \neq j.$$

Ogni singolo poligono viene detto **tassello**.

La tassellazione più semplice, e probabilmente la più facile, a cui possiamo pensare è quella in cui vengono usati come tasselli dei quadrati disposti in modo da formare una scacchiera.

Il concetto di congruenza tra tasselli, implica l'esistenza di un gruppo di mappe che mandano il piano euclideo in sé stesso (generalmente un gruppo di movimenti rigidi) che permette di definire poligoni della stessa forma e dimensione in parti differenti del piano. Ovviamente il concetto di tassellazione può essere generalizzato ad ogni spazio per il quale può essere definito un gruppo di auto-mappe con le proprietà dei movimenti rigidi, ovvero ad ogni spazio su cui è definito un gruppo di isometrie.

Per esempio, nel caso della tassellazione a scacchiera del piano euclideo, la tassellazione è trattamente associata ad un sottogruppo  $T$  di un gruppo di movimenti euclidei in modo tale che ogni quadrato risulti un elemento del sottogruppo.  $T$  è costituito dalle traslazioni  $t_{m,n}$  del tipo:

$$t_{m,n} : z \mapsto z + m + ni$$

e ogni quadrato è nella mappa del quadrato iniziale  $s_{0,0}$  di lato 1, tramite l'azione di  $t_{m,n}$ .

**Definizione 3.2.** Una tassellazione viene detta **tassellazione canonica** se presenta le seguenti caratteristiche:

- i tasselli sono poligoni congruenti;
- due tasselli che non sono identici o non hanno punti in comune, o hanno un vertice in comune, o un lato;
- sia  $T_0$  un tassello della tassellazione fissato e  $S$  un suo lato. Allora esiste esattamente un solo lato  $S'$  e un movimento rigido  $M(S)$  tale che  $S$  e  $S'$  sono congruenti,  $S'$  è l'immagine di  $S$  tramite  $M(S)$  e  $T_0$  viene mandato nel tassello  $T_0(S)$  che ha i punti di  $S'$  in comune con  $T_0$ . È ammesso anche che  $S$  e  $S'$  coincidano e in tal caso  $M(S)$  risulta essere la riflessione di  $T_0$  rispetto al lato  $S$ .
- Siano  $S_1, S_2, \dots, S_n$  i lati del tassello  $T_0$ . Allora le funzioni  $M(S_i)$  generano un gruppo  $D$ , detto **gruppo della tassellazione canonica**, tale che ogni tassello della tassellazione è immagine di  $T_0$  tramite un elemento di  $D$ .

Sia  $H$  un gruppo di isometrie su  $X$ . Sia  $P$  un punto in  $X$  e sia  $H(P)$  l'orbita di  $P$  sotto  $H$ , ovvero l'insieme di tutte le immagini di  $P$  sotto l'azione di  $H$ . Un punto  $Q$  viene detto *punto limite* di  $P$  se in ogni insieme aperto contenente  $Q$  ci sono infiniti punti che appartengono all'orbita  $H(P)$ . Le immagini del punto  $P$  sotto l'azione di diversi elementi del gruppo, vengono considerate come differenti punti di  $H(P)$ . Questo implica che un punto fisso  $P$  di ogni mappa  $h \in H$  sia automaticamente un punto limite di  $P$  se  $h$  è di ordine infinito.

È possibile dire che il gruppo  $H$  è *discontinuo* in una parte  $\bar{X}$  di  $X$  se  $\bar{X}$  è un insieme aperto che viene mappato ogni volta in sé stesso da ogni elemento di  $H$  e se, per ogni punto  $P \in \bar{X}$ , nessun punto limite di  $P$  si trova in  $\bar{X}$ .

**Definizione 3.3.** Due punti  $P$  e  $P'$  in  $X$  si dicono **equivalenti mediante  $H$**  se esiste un elemento  $h \in H$  tale che  $P'$  sia l'immagine di  $P$  sotto l'azione di  $h$  e si indica con  $P \sim P'$ .

**Definizione 3.4.** Assumendo che  $H$  sia discontinuo in  $\bar{X}$ , si chiamerà **dominio fondamentale di  $H$**  una regione  $D(H)$  che possiede le seguenti proprietà:

- $D(H)$  è l'unione di un insieme aperto  $D'$  contenuto in  $\bar{X}$ , e dei punti del bordo  $D'$  stesso, tali che non sono punti limiti di  $H$ ;
- ogni punto in  $\bar{X}$  è equivalente ad un punto in  $D(H)$ , e nessun punto dell'insieme aperto  $D'$  è equivalente ad un differente punto in  $D'$  o ad un punto sul bordo di  $D'$ .

## 3.2 Triangoli

Cerchiamo ora di capire come sono fatti e definire i triangoli sulla sfera e sul piano iperbolico. La fonte utilizzata per questa parte è [8].

**Definizione 3.5.** Siano  $x, y$  e  $z$  punti di  $\mathbb{S}^2$  non collineari (ovvero non c'è una circonferenza di raggio massimo passante per questi tre punti), sia  $H(A, B, C)$  il semipiano che contiene la più grande circonferenza passante per  $x$  e  $y$  e con  $z$  al suo interno. Il **triangolo** con vertici  $x, y, z$  è l'insieme  $H(x, y, z) \cap H(y, z, x) \cap H(z, x, y)$ .

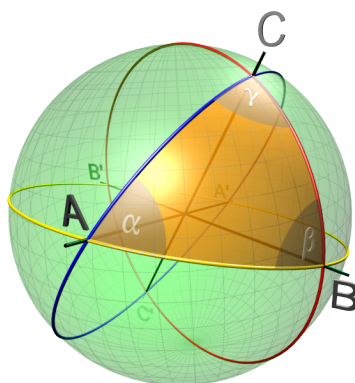


Figura 3.1: La figura mostra un triangolo sferico.

**Teorema 3.2.1.** Ogni triangolo sferico  $T$  con angoli  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  ha area pari a:

$$\text{Area}(T) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi \quad (3.1)$$

**Corollario 3.2.2.** Per ogni triangolo sferico  $T$  con angoli  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  si ha che:

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Per quanto riguarda invece il piano iperbolico:

**Definizione 3.6.** Siano  $x, y, z$  punti non collineari (cioè non esiste una geodetica che li contenga tutti). Siano  $L_2$  e  $L_3$  i raggi da  $x$  a  $y$  e da  $x$  a  $z$  rispettivamente. Definiamo un angolo in  $x$  come la coppia ordinata di raggi  $(L_2, L_3)$ .  $L_2$  determina una geodetica detta  $L^*$ .  $L_3 - \{x\}$  è contenuto in una componente connessa detta  $\Sigma$ , di  $\mathbb{H}^2 - L^*$ , analogamente per  $L_2 - \{z\}$ , detta  $\Sigma'$ . Sia  $A_1 = \Sigma \cap \Sigma'$  l'interno dell'angolo sopra citato; analogamente definiamo  $A_2$  e  $A_3$ . Chiamiamo quindi

triangolo  $T(x, y, z) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ .

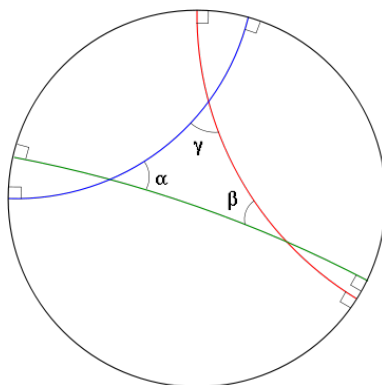


Figura 3.2: La figura mostra un triangolo iperbolico.

**Teorema 3.2.3.** *Per ogni triangolo iperbolico  $T$  di angoli  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  l'area del triangolo risulta:*

$$\text{Area}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (3.2)$$

**Corollario 3.2.4.** *Per ogni triangolo iperbolico di angoli  $\alpha, \beta, \gamma$  si ha che:*

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

# Capitolo 4

## Classificazione e proprietà dei gruppi triangolari

In questo capitolo proveremo a mostrare come le presentazioni dei gruppi triangolari si possono realizzare in termini di gruppi di isometrie generate dalle riflessioni sui lati di opportuni triangoli e come esse possano generare una tassellazione della superficie. La fonte principale è 6 .

### 4.1 Gruppi triangolari

Andiamo ora a definire un caso particolare del gruppo di Coxeter (Def 1.22): il gruppo triangolare. Dimostreremo, inoltre, un teorema che ne descrive la presentazione e che permette di interpretare tali gruppi, come gruppi di isometrie generate dalle riflessioni sui lati di opportuni triangoli, che garantiscono una tassellazione del piano euclideo, sferico e iperbolico, a seconda dei casi. Per fare ciò proveremo prima con il Lemma 4.1.1 che, a seconda del gruppo triangolare considerato, posso avere una tassellazione di uno specifico piano; mentre con il Teorema 4.1.2 mostreremo che a partire da un gruppo triangolare  $T(l, m, n)$  esso genera una tassellazione dello spazio.

**Definizione 4.1.** Definiamo la quantità

$$\delta = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

e sia  $\Delta$  un triangolo con angoli di ampiezza  $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ .  $\Delta$  esiste nel piano iperbolico se  $\delta < 1$ , nel piano euclideo se  $\delta = 1$  e sulla sfera se  $\delta > 1$ . Siano  $L_0, M_0, N_0$  rispettivamente i lati di  $\Delta$  opposti agli angoli di ampiezza  $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ , e siano  $L, M, N$  rispettivamente le riflessioni del particolare piano  $X$  (sferico, iperbolico o euclideo) rispetto alle geodetiche in cui i lati  $L_0, M_0, N_0$  giacciono.

**Definizione 4.2.** Indichiamo con  $T^*(l, m, n)$  il sottogruppo delle isometrie di  $X$  generato da  $L, M$  e  $N$ ; indichiamo invece con  $T(l, m, n)$  il sottogruppo delle isometrie di  $T^*(l, m, n)$  che preservano l'orientazione.

**Lemma 4.1.1.** *A meno dell'ordine, le uniche terne  $l, m, n$  di interi positivi  $\geq 2$  per i quali  $\delta$  definita in 4.1, soddisfa le condizioni  $\delta = 1$  (caso euclideo) e  $\delta > 1$  (caso sferico) sono riportate nella seguente tabella:*

$\delta = 1$			$\delta > 1$		
$l$	$m$	$n$	$l$	$m$	$n$
2	3	6	2	2	$n \geq 2$
2	4	4	2	3	3
3	3	3	2	3	4
			2	3	5

mentre in tutti gli altri casi,  $\delta < 1$  (caso iperbolico).

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità possiamo assumere che  $l \leq m \leq n$  con  $l, m, n \in \mathbb{N}$ .

Dividiamo la dimostrazione in diversi casi:

- Caso  $\delta = 1$

Possiamo notare che, per verificare questa condizione  $l$  deve essere minimo 2 e massimo 3.

- $l = 2$

In questo caso abbiamo che

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

dunque  $m$  risulterà essere almeno 3 e al massimo 4. Di conseguenza  $n$  assumerà valori 6 e 4 rispettivamente;

- $l = 3$

otteniamo che

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$$

di conseguenza  $m = n = 3$ .

- Caso  $\delta > 1$

Per verificare tale condizione occorre necessariamente  $l = 2$ . Otteniamo così che

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

e ciò è vero solo se  $m = 2$  o  $m = 3$ .

- $m = 2$

In questo caso otteniamo  $\frac{1}{n} > 0$  vero per ogni scelta di  $n$  in  $\mathbb{N}$ ;

- $m = 3$

Otteniamo che  $\frac{1}{n} > \frac{1}{6}$  e ciò vale solo per  $n = 3$ ,  $n = 4$  e  $n = 5$ .

In tutti gli altri casi, per  $l \geq 4$  risulterà sempre  $\delta < 0$ .

□

**Teorema 4.1.2.** *Il gruppo  $T^*(l, m, n)$  è un gruppo discreto di isometrie di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  o  $\mathbb{H}^2$  e il triangolo  $\Delta$  è un dominio fondamentale per  $T^*(l, m, n)$ . Inoltre  $T^*(l, m, n)$*



ammette la presentazione data dai generatoti  $L$ ,  $M$  e  $N$  e dalle relazioni:

$$L^2 = M^2 = N^2 = 1 \quad (4.1)$$

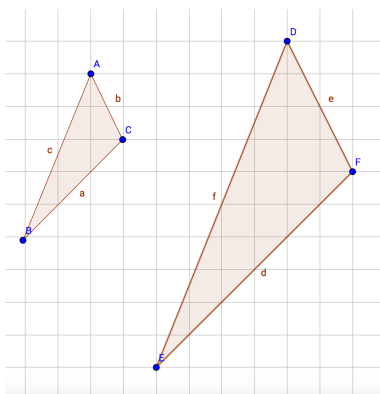
$$(LM)^n = (MN)^l = (NL)^m = 1. \quad (4.2)$$

Dividiamo la dimostrazione di questo teorema nei tre casi.

### 4.1.1 Caso euclideo

Prima di procedere con la dimostrazione vera e propria, soffermiamoci su alcune osservazioni:

*Osservazione 10.* Ricordiamo che  $Isom\mathbb{R}^2 \subset Sim\mathbb{R}^2$ . Consideriamo poi due triangoli simili  $\Delta$  e  $\Delta'$  e sia  $s$  la similitudine tale che  $s(\Delta) = \Delta'$ .



Siano ora  $R$  e  $R'$  i gruppi generati dai lati di  $\Delta$ ,  $a, b, c$  e dai lati di  $\Delta'$   $d, e, f$  rispettivamente. Tali gruppi sono coniugati in  $Sim\mathbb{R}^2$ , in particolare sono isomorfi; infatti:

$$d = s^{-1}as$$

$$e = s^{-1}bs$$

$$f = s^{-1}cs.$$

Dunque risulta che  $R' = s^{-1}Rs$ . Ciò ci permette di dire che, più in generale,  $T^*(l, m, n) \cong T^*(m, n, l) \cong T^*(n, l, m) \cong T^*(l, n, m) \cong T^*(m, l, n) \cong T^*(n, m, l)$ . Un ragionamento analogo può essere applicato anche a  $T(l, m, n)$ .

*Osservazione 11.* Sia  $R = \langle a, b, c \rangle = \{x_1, x_2, \dots, x_n | x_i = a, b, c\}$  e  $R_+ = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n} | x_i = a, b, c\} = \{(x_1, x_2), \dots, (x_{2n-1}, x_{2n}) | x_i = a, b, c\} = \langle ab, ac, bc, ba, ca, cb \rangle$ . Osserviamo però che  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$ ; analogamente per  $ca$  e  $cb$ . Dunque risulta che  $R_+ = \langle ab, ac, bc \rangle$ . Infine  $(ab)^{-1}(ac) = b^{-1}a^{-1}ac = b^{-1}c = bc$ , e quindi  $R_+ = \langle ab, ca \rangle$ .

Analizziamo quindi ognuna delle tre casistiche presentate nel lemma 4.1.1. [6]

*Caso 1: Gruppo  $T(2, 3, 6)$*

Per quanto scritto nell'osservazione 10, possiamo considerare il gruppo  $T(6, 3, 2)$ . Esso è generato da  $u$  e  $v$  che, visti come movimenti euclidei sono definiti nel seguente modo:

$$u : z \longrightarrow \epsilon z \quad v : z \longrightarrow \epsilon^2(z - 1) + 1 \quad (\epsilon = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i). \quad (4.3)$$

Tali applicazioni individuano il triangolo di coordinate  $(0, 0), (1, 0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  e possiamo pensare a  $u$  come a una rotazione di  $\frac{\pi}{3}$  attorno all'origine, mentre a  $v$  come a una rotazione di  $\frac{2}{3}\pi$  attorno al punto  $(1, 0)$ .

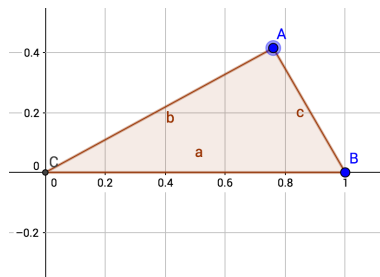


Figura 4.1: La figura mostra il triangolo  $T(6, 3, 2)$  individuato dalle funzioni  $u$  e  $v$ .

In altre parole  $u$  lo possiamo vedere come composizione delle riflessioni rispetto ai lati  $ab$ , mentre  $v$  rispetto a  $ca$ . Risultano evidenti le seguenti relazioni:

$$u^6 = v^3 = (uv)^2 = 1 \quad (4.4)$$

che definiscono le relazioni di  $T(6, 3, 2)$ . Osserviamo inoltre che gli elementi:

$$v_0 = vu^4 : z \mapsto \epsilon^6 z - \epsilon^2 + 1; \quad v_2 = u^2vu^2 : z \mapsto \epsilon^6 z - \epsilon^4 + \epsilon^2 \quad (4.5)$$

generano un sottogruppo abeliano normale libero  $A$  di  $T$ , di indice 6 che ammette gli elementi  $u^\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots, 5$ ) come rappresentanti delle classi laterali. Per mostrare ciò consideriamo il gruppo generato da  $u$  e  $v$  con le relazioni 4.3. Aggiungendo ad esse la relazione  $vu^{-2} = 1$  è possibile trovare un omomorfismo che manda  $T$  nel gruppo ciclico di indice 6 generato da  $u$ . Utilizzando il metodo di Reidemeister-Schreier (Sezione 1.2.2), otteniamo, come generatori del nucleo di tale omomorfismo, i seguenti elementi:

$$v_\mu = u^\mu vu^{4-\mu} \quad (\mu = 0, \dots, 5).$$

Le relazioni  $v^3 = 1$  e  $(uv)^2 = 1$ , assieme alle loro coniugate, producono le relazioni:

$$v_0v_2v_4 = v_1v_3v_5 = 1 \quad v_0v_3 = v_1v_4 = v_2v_5 = 1$$

che permettono di esprimere tutte le  $v_\mu$  in termini di  $v_0$  e  $v_2$ . In più è possibile dedurre da esse la relazione  $v_0v_2 = v_2v_0$ . Osserviamo che il gruppo  $T(6, 2, 3)$  è generato dagli elementi corrispondenti alle isometrie aventi le equazioni 4.3, inoltre essi soddisfano anche le relazioni 4.4 per  $u$  e  $v$ .

Possiamo dire, inoltre, che il gruppo astratto definito dai generatori  $u$  e  $v$  e dalle relazioni 4.4 ammette la seguente soluzione del *word problem*: ogni elemento del gruppo ha un'unica espressione del tipo:

$$u^\nu v_0^k v_2^l \quad (\nu = 0, 1, \dots, 5; k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.6)$$

Ciò ci permette di dire che gli elementi generatori di  $T(6, 2, 3)$  non soddisfano altre relazioni che non derivino da 4.4.

Utilizzando ora le espressioni di  $u, v_0, v_2$  come isometrie (4.3 e 4.5), possiamo ottenere la seguente espressione:

$$u^\nu v_0^k v_2^l : z \mapsto \epsilon^\nu z + \epsilon^\nu [k(1 - \epsilon^2) + l(\epsilon^2 - \epsilon^4)]. \quad (4.7)$$

Quest'ultima coincide con l'identità se e solo se 4.6 è l'elemento unitario, ovvero quando  $\nu = k = l = 0$ .

Per concludere consideriamo il quadrilatero  $Q$  che ha come vertici i vertici del triangolo  $\Delta$  e il punto  $(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

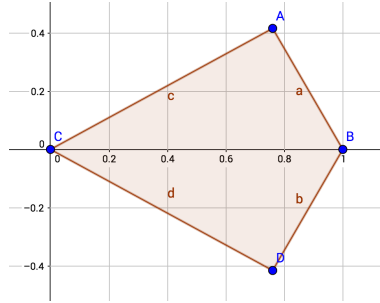


Figura 4.2: La figura mostra il quadrilatero  $Q$ , ottenibile tramite l'unione di  $\Delta$  e  $\Delta' = a(\Delta)$ .

Facendo agire  $u^\nu$  (con  $\nu = 0, \dots, 5$ ) su  $Q$  otteniamo un esagono regolare. Ora, per  $\nu = 0$ , le traslazioni 4.7, applicate a tale esagono, producono una tassellazione del piano euclideo.

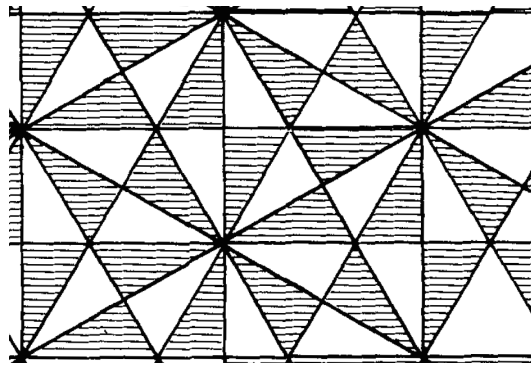


Figura 4.3: Tassellazione di  $\mathbb{R}^2$  generata da  $T(6, 2, 3)$ .

*Caso 2: Gruppo  $T(3, 3, 3)$*

Possiamo osservare che  $T(3, 3, 3)$  è un sottogruppo di indice 2 del gruppo  $T(2, 3, 6)$ . Infatti, consideriamo  $\Delta$  il triangolo nella figura 4.1, e  $\Delta'$  il triangolo ottenuto riflettendo  $\Delta$  rispetto a  $b$ , allora  $\Delta \cup \Delta'$  forma un triangolo equilatero di vertici  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$  e  $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ , ovvero la regione fondamentale di  $T(3, 3, 3)$ .

In modo analogo al caso precedente definiamo i generatori  $u$  e  $v$  come segue:

$$u : z \mapsto \epsilon^2 z \quad v : z \mapsto \epsilon^2(z - \epsilon) + \epsilon \quad (4.8)$$

che rappresentano rispettivamente una rotazione di  $\frac{2}{3}\pi$  intorno all'origine e intorno al punto  $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ . Anche in questo caso risultano evidenti le relazioni:

$$u^3 = v^3 = (uv)^3 = 1.$$

Se al gruppo generato da tali relazioni, da  $u$  e da  $v$  aggiungiamo, come prima, la relazione  $vu^{-2} = 1$ , è possibile mandare questo gruppo, con un omomorfismo, nel gruppo ciclico di ordine 3 generato da  $u$ . Il nucleo di tale omomorfismo, che indichiamo con  $A$ , è un gruppo libero abeliano generato da:

$$v_0 = vu^{-1} : z \mapsto z + \epsilon + 1 \quad v_1 = uvu^{-2} : z \mapsto z + \epsilon^2 - 1 \quad (4.9)$$

e avente, come rappresentanti delle classi laterali di  $T(3, 3, 3)$   $1, u, u^2$ .

Come regione fondamentale di  $A$ , è possibile considerare lo stesso esagono del caso precedente, come illustra la figura:

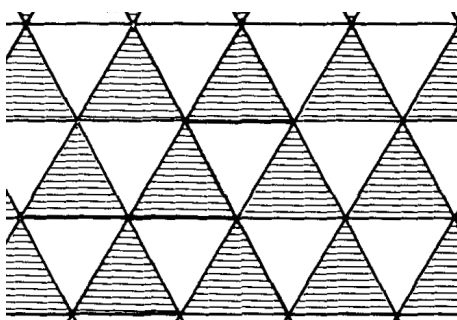


Figura 4.4: Tassellazione di  $\mathbb{R}^2$  generata da  $T(3, 3, 3)$ .

Caso 3: Gruppo  $T(2, 4, 4)$

In questo caso abbiamo a che fare con il triangolo  $\Delta$  che ha come vertici i punti  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$  e  $(1; 1)$ . Come prima possiamo definire:

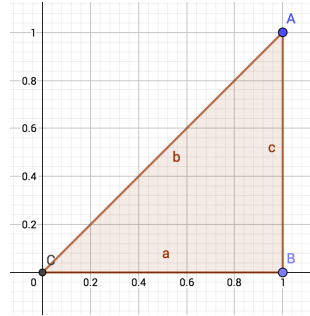


Figura 4.5: Il triangolo  $\Delta$ .

$$u : z \mapsto \epsilon^2 z \quad v : z \mapsto \epsilon^4(z - 1) + 1 \quad (\epsilon = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i). \quad (4.10)$$

Osserviamo però che considerando  $\Delta \cup \Delta'$ , dove  $\Delta'$  si ottiene applicando a  $\Delta$  la riflessione rispetto al lato  $b$ , otteniamo un quadrilatero. Dunque otteniamo una situazione simile ad una tassellazione a scacchiera, come vediamo in figura:

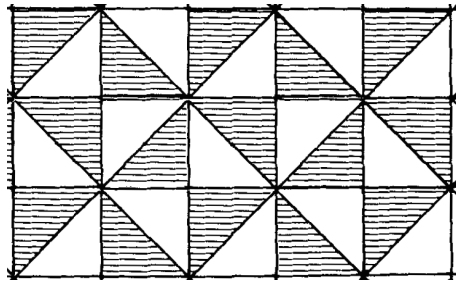


Figura 4.6: Tassellazione di  $\mathbb{R}^2$  generata da  $T(2, 4, 4)$ .

### 4.1.2 Caso sferico

Andiamo ora ad analizzare le casistiche presentate dal Lemma 4.1.1, per il caso  $\delta > 0$ .

Analogamente al caso euclideo, se indichiamo con  $L$ ,  $M$  e  $N$  i lati opposti agli angoli  $l$ ,  $m$ , e  $n$  rispettivamente, possiamo considerare i generatori del gruppo triangolare come:

$$u = LM, \quad v = NL. \quad (4.11)$$

*Caso 4: Gruppo  $T(2, 2, n)$*

Sia  $\epsilon = e^{i\frac{\pi}{n}}$ . Consideriamo su  $S^2$  il triangolo  $\Delta$  che ha vertici nei punti  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, -1)$  e  $(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n}, 0)$ .

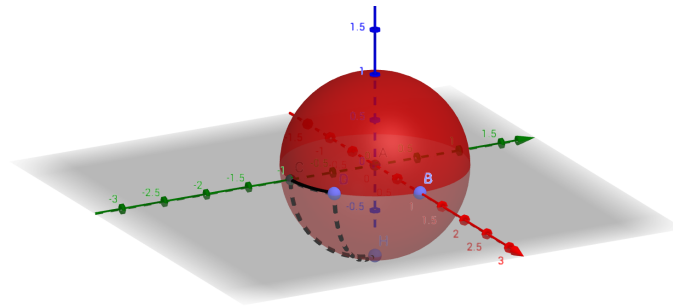


Figura 4.7: La figura mostra, fissato  $n$ , il triangolo che genera il gruppo  $T(2, 2, n)$ .

D'ora in avanti non lavoreremo però sulla sfera, ma bensì sulla proiezione stereografica realizzata proiettando sul piano  $z = 0$ . Dunque i vertici del triangolo avranno coordinate  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$  e  $(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n})$  rispettivamente.

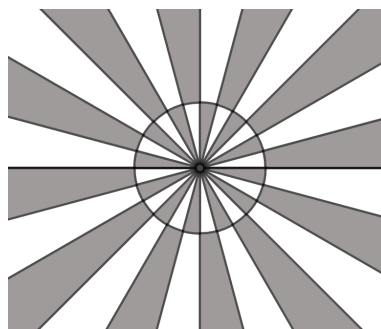


Figura 4.8: La figura mostra, fissato  $n$ , la proiezione stereografica della sfera tassellata dal gruppo  $T(2, 2, n)$ .

I moti associati a  $u$  e  $v$  possono essere definiti rispettivamente dalle seguenti matrici:

$$U = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.12)$$

per cui vale:

$$U^n = V^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Osserviamo che la matrice  $U$  definisce una rotazione di  $\frac{2\pi}{n}$ , nel piano  $z = 0$  attorno all'origine, mentre  $V$  rappresenta una rotazione di  $\pi$  della sfera attorno all'asse  $x$  e un'ulteriore rotazione di  $\frac{\pi}{n}$  nel piano  $z = 0$  attorno all'origine. Individuiamo quindi, come relazioni che generano  $T(2, 2, n)$  le seguenti:

$$u^n = v^2 = (uv)^2 = 1 \quad (4.14)$$

dove  $uv$  rappresenta una rotazione della sfera attorno all'asse passante per i punti  $(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n}, 0)$  e  $(-\cos \frac{\pi}{n}, -\sin \frac{\pi}{n}, 0)$ . Il gruppo generato da  $u$  e  $v$  e dalle relazioni 4.14 è di ordine  $2n$ , e ognuno dei suoi elementi può essere espresso unicamente nella forma

$$u^\nu v^\lambda \quad (\nu = 0, \dots, n; \lambda = 0, 1). \quad (4.15)$$

La riflessione di  $\Delta$  rispetto all'asse reale, produce un triangolo  $\Delta'$  tale per cui  $Q = \Delta \cup \Delta'$  forma la regione fondamentale di  $T(2, 2, n)$ . I corrispondenti movimenti sulla sfera di 4.15 spostano  $\Delta \cup \Delta'$  di  $2n$  posizioni differenti, generando così una tassellazione della sfera.

Prima di concludere questo caso osserviamo che le stesse matrici  $U$  e  $V$  generano un gruppo  $B$  di ordine  $4n$  definito dalle relazioni

$$U^n = V^2 = (UV)^2,$$

dove  $U^n = V^2$  appartiene al centro<sup>1</sup> di tale gruppo.  $B$  non è però isomorfo a  $T^*(2, 2, n)$  nonostante sia anch'esso di ordine  $4n$  e possieda, nel caso  $n =$

---

<sup>1</sup>Sia  $G$  del gruppo ed è di ordine 2. Definiamo centro di un gruppo l'insieme  $C = \{c | gc = cg \forall g \in G\}$



$2m$ , un elemento centrale di ordine 2. Tale elemento genera un fattore diretto di  $T^*(2, 2, 2m)$ . Esso è rappresentato dalla mappa antipodale della sfera<sup>2</sup>, che possiamo esprimere come  $Nu^m$ . Verifichiamo quindi che  $T^*(2, 2, 2m)$  è dato da:

$$L^2 = M^2 = N^2 = 1, \quad u^{2m} = v^2 = (uv)^2 = 1, \quad (4.16)$$

dove  $Nu^m$  appartiene al centro. Esso, ovviamente, non è un elemento del sottogruppo  $T(2, 2, 2m)$  poichè non ha lunghezza pari. Inoltre  $Nu^m$  è di ordine 2, infatti:

$$Nu^m Nu^m = (NuN^{-1})^m u^m = v^{-1} u^{-m} v u^m = (v^{-1} uv)^{-m} u^m$$

e  $v^{-1} uvu = v^{-2} (vu)^2 = 1$  che implica  $v^{-1} uv = u^{-1}$ .

*Caso 5: Gruppo tetraedrico  $T(3, 3, 2)$*

Mostriamo subito che una tassellazione della sfera fatta da triangoli  $\Delta$  con angoli di ampiezza  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{2}$ , si ottiene inscrivendo un tetraedro regolare in una sfera e, considerando come vertici della tassellazione, sia i vertici del tetraedro, che le proiezioni, a partire dal centro della sfera, dei punti medi dei lati e dei baricentri delle facce.

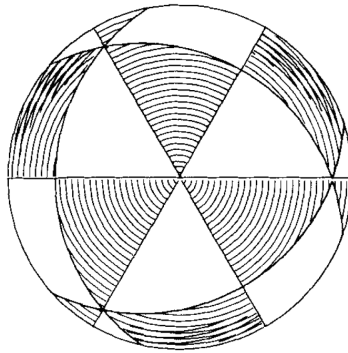


Figura 4.9: Tassellazione del gruppo tetraedrico di  $\mathbb{S}^2$ .

---

<sup>2</sup>La mappa antipodale è quella funzione  $f : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ .

Il gruppo  $T(3, 3, 2)$ , isomorfo a  $T(2, 3, 3)$ , è il sottogruppo di  $T^*(3, 3, 2)$  composto dalle parole di lunghezza pari e generato da  $u$  e  $v$  come in 4.11, e definito dalle relazioni:

$$u^3 = v^3 = (uv)^2 = 1. \quad (4.17)$$

Esse possono essere rappresentate sotto forma di matrici unitarie  $U$  e  $V$ :

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(-1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(-1-i) \\ \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{bmatrix} \quad UV = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Questo gruppo è isomorfo a  $A_4$ , ovvero al gruppo alternante delle permutazioni su quattro parole. Esso corrisponde al gruppo delle rotazioni della sfera che portano il tetraedro originale in se stesso, cioè alle simmetrie dirette del tetraedro.

In questo caso la regione fondamentale  $Q$  non sarà un quadrilatero, ma un triangolo, che ha per vertici due vertici del tetraedro e la proiezione del baricentro della faccia sulla quale giacciono entrambi i vertici, e i cui angoli hanno ampiezza  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{3}$ . Dunque  $Q = \Delta \cup \Delta'$  dove  $\Delta'$  si ottiene come riflessione di  $\Delta$  rispetto o al lato  $M$ , o al lato  $N$ .

La tassellazione della sfera associata al gruppo tetraedrico può essere trasferita sul piano complesso tramite la proiezione stereografica, ottenendo:

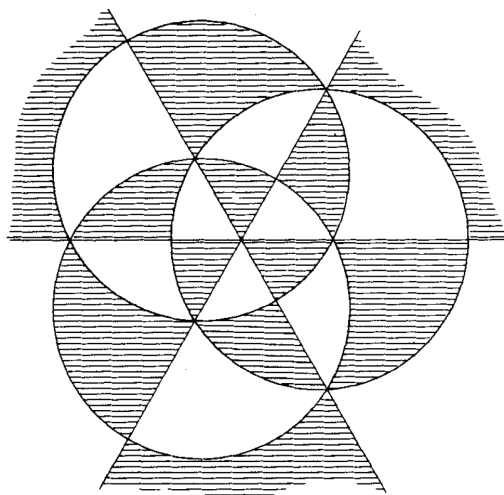


Figura 4.10: Proiezione stereografica della tassellazione generata dal gruppo tetraedrico.

*Caso 6: Gruppo ottaedrico  $T(2, 3, 4)$*

Anche in questo caso, una tassellazione della sfera con triangoli  $\Delta$  di angoli  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{4}$ , si ottiene in modo analogo al caso del gruppo tetraedrico, inscrivendo però un ottaedro regolare.

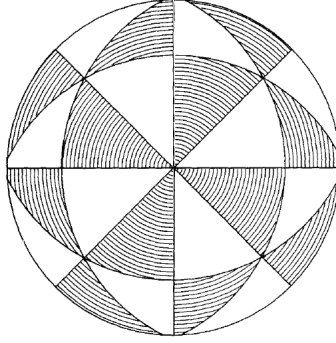


Figura 4.11: Tassellazione del gruppo ottaedrico di  $\mathbb{S}^2$ .

I generatori di  $T(2, 3, 4)$ ,  $u$  e  $v$  come in 4.11, soddisfano le relazioni:

$$u^4 = v^3 = (uv)^2 = 1,$$

dove esse corrispondono rispettivamente alle matrici  $U$  e  $V$  definite come segue:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{(i+1)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(-1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Possiamo dunque osservare che  $u$  e  $v$  generano tutte le rotazioni che mandano un ottaedro regolare, inscritto nella sfera unitaria, in se stesso. Il gruppo  $T^*(4, 3, 2)$  è il prodotto diretto di  $T(4, 3, 2)$  con un gruppo di ordine 2 generato da  $(LMN)^3$ , che rappresenta la mappa antipodale. Poichè  $(LMN)^3$  coinvolge un numero dispari di fattori  $L, M, N$ , non può essere contenuto in  $T(4, 3, 2)$ . Anche se esso appartiene al centro ed è di ordine 2, deve comunque generare un fattore diretto di  $T^*(4, 3, 2)$ . Come nei casi precedenti, illustriamo la proiezione stereografica della tassellazione:

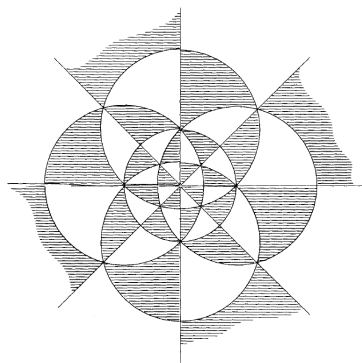


Figura 4.12: Proiezione stereografica della tassellazione generata dal gruppo ottaedrico.

*Caso 7: Gruppo icosaedrico  $T(2, 3, 5)$*

Analogamente ai due casi precedenti, possiamo ottenere una tassellazione della sfera con triangoli  $\Delta$  con angoli di ampiezza  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{5}$  andando a considerare un icosaedro inscritto nella sfera, le proiezioni dei punti medi dei suoi spigoli e quelle dei baricentri delle sue facce.

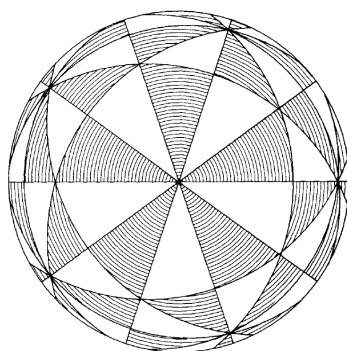


Figura 4.13: Tassellazione del gruppo icosaedrico di  $\mathbb{S}^2$ .

Il sottogruppo di  $T^*(2, 3, 5)$ ,  $T(2, 3, 5)$  di indice 2, è costituito dalle rotazioni della sfera che mandano l'icosaedro regolare inscritto in se stesso. Ne segue dunque che  $T(2, 3, 5)$  è di ordine 60 ed è isomorfo a  $A_5$  (cioè al gruppo alterno di cinque simboli).

$T(2, 3, 5)$  è generato da  $u$  e  $v$  definiti come in 4.11, a cui sono associate le matri-

ci:

$$U = \begin{bmatrix} -\epsilon^2 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{bmatrix} \quad V = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \epsilon^3 - \epsilon & 1 - \epsilon^4 \\ \epsilon - 1 & \epsilon^2 - \epsilon^4 \end{bmatrix} \quad (\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}), \quad (4.20)$$

e definito dalle relazioni

$$u^5 = v^3 = (uv)^2 = 1$$

.

Il gruppo  $T^*(2, 3, 5)$ , anche in questo caso, risulta essere prodotto diretto di  $T(2, 3, 5)$  e un gruppo ciclico di ordine 2 generato da  $C = (LMN)^5$ . Per tutti i dettagli vedi [6] e [5]. Riportiamo, infine, anche per questo caso la proiezione stereografica della tassellazione della sfera:

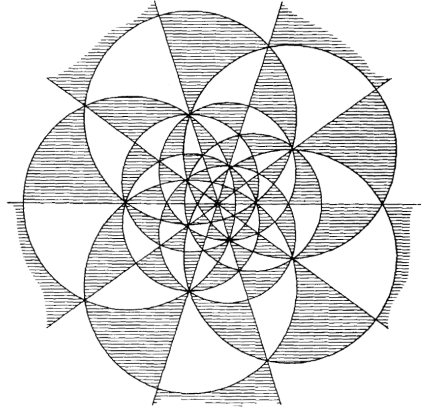


Figura 4.14: Proiezione stereografica della tassellazione generata dal gruppo icosaedrico.

### 4.1.3 Caso iperbolico

Partiamo dal dimostrare che  $T(l, m, n)$  genera una tassellazione del piano iperbolico. In questo caso, mostrare tale affermazione non è semplice come nei casi precedenti. Per ulteriori dettagli si veda [2].

Consideriamo  $w = f(z)$  immagine di una funzione  $f$  che parametrizza un triangolo di angoli  $\pi\lambda$ ,  $\pi\mu$  e  $\pi\nu$ . Tramite essa possiamo associare ad ogni triangolo, un

triangolo non-euclideo nel piano  $|w| < 1$  tramite una trasformazione di Möbius. Partendo da quest'ultimo triangolo, possiamo costruire altri triangoli non-euclidei ottenuti tramite le riflessioni sui suoi lati. Tutti questi triangoli o sono congruenti al triangolo di partenza (rispetto alla metrica non-euclidea) o sono simmetrici ad esso. Vogliamo mostrare che tale costruzione permette di costruire una tassellazione del piano.

Per questo, possiamo assumere, senza perdita di generalità, che il vertice  $A$  del triangolo iniziale, con angolo  $\frac{\pi}{l}$ , si trova in  $w = 0$ , mentre il vertice  $B$  giace sull'asse reale positivo. Allora i lati  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  sono segmenti in senso euclideo. Tramite una sequenza ciclica di riflessioni che mantengono  $A$  come punto fisso, possiamo coprire l'intorno di  $w = 0$  con  $2l$  triangoli che insieme formano un poligono non euclideo  $\Pi_1$ . Indichiamo i triangoli ottenuti in questo modo, come triangoli del primo ordine. Ogni vertice di  $\Pi_1$  è in comune con due triangoli del primo ordine che sono immagini gli uni degli altri, sotto l'azione delle riflessioni rispetto al lato che hanno in comune. Aggiungiamo che la posizione particolare di  $A$  è stata scelta solo per facilitare la costruzione più facile da visualizzare.

Il processo appena descritto può essere applicato a un qualunque altro vertice di un triangolo del primo ordine; ciò permette di avere un numero pari di triangoli nessuno dei quali ha punti in comune con gli altri, ammeno che due di essi non siano coincidenti. Possiamo creare un questo modo un poligono  $\Pi_2$  che è triangolato per mezzo dei triangoli che abbiamo già costruito.  $\Pi_2$  contiene  $\Pi_1$  al suo interno. I triangoli di  $\Pi_2$  che non appartengono a  $\Pi_1$  sono chiamati triangoli del secondo ordine.

Andremo ora a mostrare che:

**Proposizione 4.1.3.** *La costruzione sopra indicata può essere implementata indefinitamente e, ad ogni passo, produce un insieme di triangoli di ordine maggiore, e che il totale dei triangoli ottenuti in questo modo costituisce una rete che ricopre completamente e semplicemente il piano non-euclideo.*

Per mostrare la prima parte della Proposizione 4.1.3, è sufficiente mostrare che

per ogni numero naturale  $k$ , i triangoli di ordine  $k$  non si sovrappongono con i triangoli di ordine più basso (se ce ne sono) né tra di loro.

Possiamo assumere che i numeri  $l$ ,  $m$  e  $n$  sono tutti  $\geq 3$ . Dimostriamo per induzione, assumendo che la prima parte della Proposizione 4.1.3 sia vera per tutti gli ordini incluso  $k - 1$ . Allora i triangoli di ordine  $k - 1$  sono disposti "a ghilanda" attorno al poligono  $\Pi_{k-2}$ , formando quindi una specie di anello delimitato dai perimetri di  $\Pi_{k-2}$  e  $\Pi_{k-1}$  (vedi Figura 4.15).

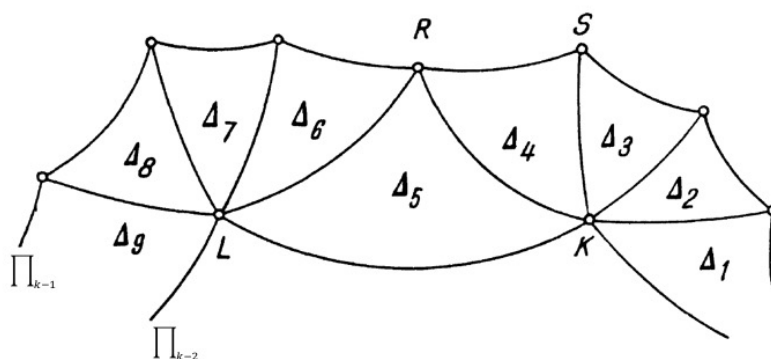


Figura 4.15

Osserviamo, anche con l'ausilio della figura, che se un vertice triangolo  $\Delta_j$  non appartiene a  $\Pi_{k-2}$  allora si trova in  $\Pi_{k-1}$ .

Ogni vertice  $R$  è in comune con un certo numero  $r$  di triangoli  $\Delta_j$ . Se uno tra questi triangoli ha come lato  $\overline{KL}$  appartenente al perimetro di  $\Pi_{k-2}$ , allora  $r = 3$ . Se  $S$ , d'altra parte, è un vertice di  $\Pi_{k-1}$  tale che i triangoli che si incontrano in  $S$  hanno solo un vertice in comune con  $\Pi_{k-2}$ , allora  $r = 2$ . Poichè stiamo assumendo che i numeri  $l$ ,  $m$  e  $n$  sono  $\geq 3$ , tutti gli angoli di  $\Pi_{k-1}$  risultano essere  $\leq \pi$  e questo implica che, solo nel caso euclideo,  $\Pi_{k-1}$  è convesso.

Per la convessità di  $\Pi_{k-1}$  segue che ogni  $\overline{RS}$  di tale poligono appartiene ad una retta non-euclidea che passa per  $M$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $M'$  del poligono, come nella Figura 4.16.

Perciò uno dei due semipiani  $MM'N'$  e  $MM'N$  è interamente esterno al poligono  $\Pi_{k-1}$ . Dunque  $RS$  e  $ST$  sono due lati consecutivi del poligono, dunque l'interno

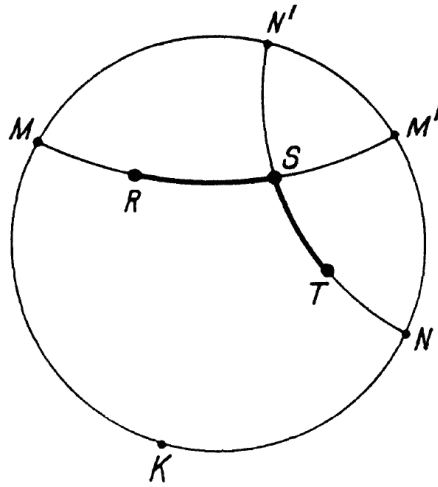


Figura 4.16

di  $\Pi_{k-1}$  si trova nell'angolo  $MSNK$ .

I triangoli di ordine  $k$ -esimo di questa rete giacciono tutti all'esterno di  $MSNK$  e possiamo facilmente vederlo grazie all'aiuto di un movimento non-euclideo che sposta  $S$  nell'origine  $O$  e porta  $MS$  e  $NS$  in linee rette euclidee. Questo prova la prima parte di 4.1.3.

Per mostrare che i triangoli di ordine  $k$ -esimo non si sovrappongono gli uni con gli altri, iniziamo con il distinguere tali triangoli in due tipologie: quelli che hanno due vertici in comune con  $\Pi_{k-2}$ , che denotiamo con  $Z_1, Z_2, \dots$  e gli altri, che indichiamo con  $E_1, E_2, \dots$ . Ora congiungiamo ogni vertice di  $\Pi_{k-1}$  con l'origine  $O$  tramite dei segmenti retti. Se uno di questi segmenti ha come estremo un vertice comune a due triangoli di ordine  $(k-1)$ , allora il segmento forma con ognuno dei lati adiacenti di  $\Pi_{k-1}$  un angolo di ampiezza  $\leq \frac{2\pi}{3}$ . Se un segmento ha per estremo un vertice di  $\Pi_{k-1}$  dove  $r = 3$ , assumiamo come ipotesi induttiva che tale segmento, allo stesso modo, forma angoli di ampiezza  $\leq \frac{2\pi}{3}$  con i due lati adiacenti di  $\Pi_{k-1}$ . Assumendo per buono questo fatto, consideriamo il lato  $RS$  di  $\Pi_{k-1}$  e il triangolo  $Z_1$  avente  $RS$  come lato; allora, dal fatto che  $l, m$  e  $n$  sono  $\geq 3$ , segue che  $Z_1$  giace tra due segmenti consecutivi:  $OR$  e  $OS$ , come in figura 4.17. Questo implica che non vi sono triangoli del tipo  $Z_1, Z_2, \dots$  che si possono intersecare.



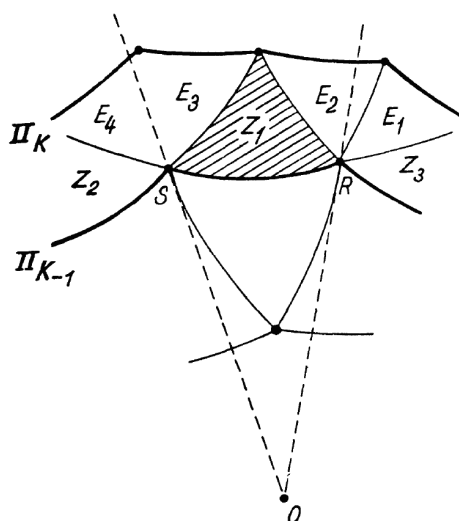


Figura 4.17

Ora consideriamo due triangoli consecutivi qualunque  $Z_i$ , e li chiamiamo  $Z_1$  e  $Z_2$ , che hanno un vertice in comune che indichiamo con  $R$ , come in figura 4.18

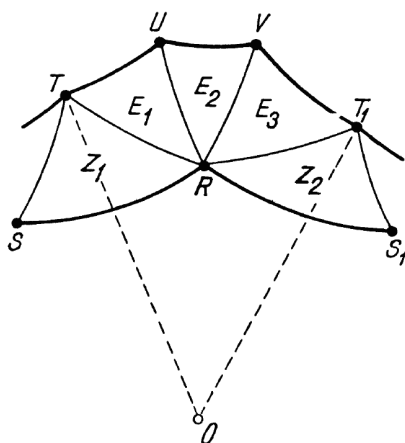


Figura 4.18

così come i triangoli  $E_1, E_2, \dots$  si trovano tra  $Z_1$  e  $Z_2$ , ottenuti riflettendo il triangolo rispetto ai propri lati e lasciando  $R$  come punto fisso. Tutti gli angoli interni del poligono non-euclideo  $OTUV\dots T_1O$  sono  $< \pi$ , quindi il poligono è convesso; dunque, tutti i triangoli  $E_1, E_2, \dots$  sono compresi tra  $OT$  e  $OT_1$ . Applicando questa considerazione a tutti i triangoli di ordinata  $k$  una corona chiusa attorno a  $\Pi_{k-1}$  di

cui il bordo esterno risulta essere il perimetro di  $\Pi_k$ . Tali triangoli ricoprono la parte del piano iperbolico compresa tra  $\Pi_{k-1}$  e  $\Pi_k$ .

Resta da provare che le ipotesi induttive assunte qualche riga sopra per  $\Pi_{k-1}$  restino valide anche applicate a  $\Pi_k$ . Il triangolo  $Z_1$  è compreso tra i segmenti  $OR$  e  $OS$ , quindi il segmento  $OT$  deve intersecare  $Z_1$ . Ora  $Z_1$  è uno dei tre triangoli che hanno come vertice  $T$  e si trova proprio tra gli altri due, dunque ognuno dei due angoli tra  $OT$  e i due lati del poligono che hanno come estremo  $T$ , avrà ampiezza  $\leq \frac{2\pi}{3}$ . Dunque possiamo procedere con la nostra costruzione per individuare il poligono  $\Pi_{k+1}$  e così via.

Infine dobbiamo mostrare che la rete di triangoli così ottenuta ricopre completamente il piano iperbolico (visto come disco di Poincarè  $|w| < 1$ ). A tale scopo, consideriamo un triangolo  $\Delta^*$  qualsiasi della rete e indichiamo con  $A$ ,  $B$  e  $C$  i suoi vertici; consideriamo anche il poligono  $\Pi^*$  il cui interno contiene tutti i triangoli che hanno un vertice o un lato in comune con  $\Delta^*$ . La distanza  $d$  tra  $\Delta^*$  e  $\Pi^*$  è indipendente dalla scelta di  $\Delta^*$  poichè tutti i triangoli della rete sono congruenti o simmetrici a meno di riflessioni (rispetto alla metrica non euclidea). Poichè ogni punto  $w_0$  della rete si trova all'interno o sul bordo di un triangolo, ne segue che il disco non-euclideo di centro  $w_0$  e raggio  $d$  è tutto contenuto nella rete formata dai triangoli.

Ora se  $\Gamma$  è la regione ottenuta dall'unione dell'interno di tutti i poligoni  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , ..., allora  $\Gamma$  non può avere punti del bordo che si trovano in  $|w| < 1$  e dunque, essendo  $\Gamma$  interamente contenuto in  $|w| < 1$ , deve coincidere con tutto il disco.

Per concludere ora la dimostrazione del Teorema 4.1.2 resta da mostrare che le relazioni 4.1e 4.2 definiscono una presentazione per  $T(l, m, n)$  nel caso in cui  $\delta < 1$  e che  $T(l, m, n)$  rappresenta un gruppo discreto di isometrie. Per fare ciò consideriamo due diverse casistiche:

*Caso 8:  $l, m, n$  tutti diversi tra loro*

Sia  $\Omega = W(L, M, N)$  una parola nei generatori  $L$ ,  $M$  e  $N$ , di  $T^*(l, m, n)$  che definisca una particolare isometria del piano iperbolico. Sia  $\Delta = \Omega(\Delta_0)$  l'immagine di  $\Delta_0$  sotto l'azione di  $\Omega$ . Poichè  $\Delta_0$  sotto l'azione di un elemento di  $T^*(l, m, n)$  tassella il piano iperbolico,  $\Delta$  e  $\Delta_0$  avranno un punto interno in comune se e solo se essi ciucnidono; in tal caso  $\Omega$  sarebbe l'applicazione identità.

Per facilitare la spiegazione, inseriamo un'immagine che rappresenta la tassellazione del piano iperbolico generata dal gruppo  $T^*(2, 3, 7)$ .

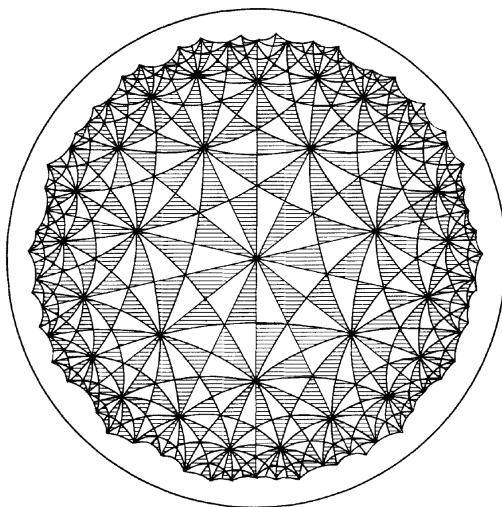


Figura 4.19: Tassellazione di  $\mathbb{H}^2$  del gruppo  $T^*(2, 3, 7)$ .

Enunciamo ora un Lemma di valenza generale, ma che in questo caso, riportiamo secondo le nostre esigenze:

**Lemma 4.1.4.** *L'immagine  $\Delta_\nu$  di  $\Delta_0$  ottenuta secondo l'azione:*

$$\gamma_\nu = h_1 h_2 \dots h_\nu$$

*in  $T^*(l, m, n)$  è adiacente all'immagine  $\Delta_{\nu+1}$  ottenuta sotto l'azione di*

$$\gamma_{\nu+1} = \gamma_\nu h_{\nu+1};$$

*inoltre il lato comune tra  $\Delta_{\nu+1}$  e  $\Delta_\nu$  è il lato di  $\Delta_\nu$  associato a  $h_{\nu+1}$ , dove, con  $h_i$  indichiamo un'opportuna parola  $W$  costituita dai generatori di  $T^*(l, m, n)$ ,  $L$ ,  $M$*

e  $N$ . Questo è vero anche per  $\nu = 0$ , se denotiamo l'elemento unitario con  $h_0$ .

Grazie a tale risultato è possibile assegnare una catena  $C$  di triangoli  $\Delta_\nu$  a  $\Omega$ . Dato che  $L$ ,  $M$  e  $N$  sono di ordine due, si può assumere che  $W$  sia scritta nella forma

$$W = g_1 g_2 \dots g_n$$

dove ogni  $g_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) denota uno tra  $L$ ,  $M$  o  $N$  e dove  $g_\nu$  e  $g_{\nu+1}$  non denotano mai lo stesso generatore. La catena  $C$  consente di individuare un poligono chiuso  $\Pi$  nel seguente modo: scelto un punto  $P_0$  interno a  $\Delta_0$ , si denoti con  $P_\nu$  la sua immagine in  $\Delta_\nu$ . Si considerino anche i punti medi  $Q_\lambda^{(0)}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) dei lati di  $\Delta_0$  e si denotino i corrispondenti punti medi su  $\Delta_\nu$  con  $Q_\lambda^{(\nu)}$ . Si uniscano  $P_\nu$  e  $P_{\nu+1}$  con il particolare punto medio del lato in comune tra  $\Delta_{\nu+1}$  e  $\Delta_\nu$ . Allora  $\Pi$  è il poligono orientato che ha come bordo la spezzata che comincia e finisce con  $P_0$ . Tale poligono potrebbe intersecare se stesso; ciò significa che esiste  $\mu$  tale che  $\Delta_\nu = \Delta_{\nu+\mu}$  con  $0 \leq \nu < \nu + \mu \leq n$ , e vale almeno una tra  $0 < \nu$  e  $\nu + \mu < n$ . In questo caso esiste una sottoparola di  $g_n$  formata da  $\mu$  simboli all'interno di  $W$ , che rappresenta l'elemento unitario di  $T^*(l, m, n)$  e, scegliendo lo più breve sottoparola non banale di questo tipo, è possibile associarla ad un poligono semplice  $\Pi$ . Si può dunque assumere che esiste una parola  $W$  con queste proprietà, a cui associare il poligono  $\Pi$ .

Poiché  $\Pi$  ha area finita, solo un numero finito di triangoli appartenenti alla tassellazione del piano iperbolico possono avere punti interni al poligono. Ogni  $\Delta_\nu$  coinvolto nella costruzione di  $\Pi$  ha almeno un vertice appartenente alla parte interna  $I^*$  del poligono (dall'assioma di Pasch<sup>3</sup>). Sia  $P$  un particolare vertice dentro  $\Pi$ , appartenente ad uno dei triangoli di  $C$  e siano  $\Delta_\nu, \dots, \Delta_{\nu+k}$  i triangoli consecutivi della catena che forma  $\Pi$  e che si incontrano in  $P$ . (Se  $\nu + \mu \geq n$ , basta ridurlo modulo  $n$ ). Allora  $k > 0$  dato che almeno due triangoli consecutivi della catena si incontrano in  $P$ , precisamente quelli che hanno, come lato in comune, quello che ha come estremi  $P$  e un punto esterno a  $\Pi$ . Siano  $\Delta_\nu, \Delta_{\nu+1}, \dots, \Delta_{\nu+k}; \Delta'_1, \dots, \Delta'_s$  gli insiemi di triangoli distinti della tassellazione che si incontrano in  $P$ ; è possibile assumere che essi si susseguano nell'ordine in cui sono scritti, in modo che ciascuno

---

<sup>3</sup>L'assioma di Pasch dice che se una retta interseca un lato di un triangolo, allora essa o passa per il vertice opposto a tale lato, o intersecherà un altro lato.

abbia un lato in comune con il precedente e che  $\Delta'_s$  abbia un lato in comune con  $\Delta_\nu$ . Ora è possibile sostituire in  $C$  i triangoli  $\Delta_\nu, \Delta_{\nu+1}, \dots, \Delta_{\nu+k}$  con la sequenza  $\Delta_\nu \Delta'_s, \dots, \Delta'_1, \Delta_{\nu+k}$  e modificare  $\Pi$  di conseguenza, ottenendo in tal modo un nuovo poligono  $\Pi'$ . Allora  $P$  è fuori da  $\Pi'$  e, per come è stato costruito,  $\Pi'$  stesso non contiene punti alcun punto esterno a  $\Pi$ . Ripetendo questo procedimento, poichè il numero totale dei vertici della tassellazione che appartengono alla parte interna di  $\Pi'$  è minore del corrispondente numero per  $\Pi$ , tale processo terminerà dopo un numero finito di passi, dando come risultato il poligono  $\Pi^*$  che non ha alcuna parte interna.

Queste condizioni geometriche, a livello algebrico, si traducono come segue. La sostituzione dei  $i$  triangoli  $\Delta_\nu, \Delta_{\nu+1}, \dots, \Delta_{\nu+k}$  con la sequenza  $\Delta_\nu \Delta'_s, \dots, \Delta'_1, \Delta_{\nu+k}$ , indica che nella parola  $W(L, M, N)$ , che definisce  $\Pi$ , si sostituiscono  $k$  simboli di una delle parole:

$$(LM)^n, \quad (MN)^l, \quad (NL)^m,$$

con l'inverso del prodotto dei rimanenti simboli; in altre parole, abbiamo utilizzato le relazioni 4.2. Applicando questo processo più volte otterremo la parola  $W^*$  che definisce il poligono  $\Pi^*$ , che ricordiamo essere un poligono senza parte interna. Dunque, ad un certo punto, sul bordo di  $\Pi$  si succederanno un segmento e lo stesso segmento percorso con orientazione opposta. Questo significa che in  $W^*$  uno dei generatori  $L, M, o N$  è seguito da se stesso. Utilizzando ora la relazione 4.1, capiamo bene che tale coppia di simboli in  $W^*$  può essere omessa. Iterando questo processo si arriva alla parola vuota.

Risulta quindi provata la tesi nel caso  $l, m, n$  interi distinti.

*Caso 9:  $m = n$*

Osserviamo subito che in questo caso il triangolo  $\Delta_0$  è isoscele. Dunque è possibile bisecare il triangolo disegnando l'altezza relativa al lato  $L$ , ottenendo così due triangoli  $\Delta'_0$  con angoli di ampiezza  $\frac{\pi}{2l}, \frac{\pi}{m}$  e  $\frac{\pi}{2}$ . Tali angoli sono distinti, fatta eccezione nel caso in cui  $m = 2l$  dove basterà ripetere questo processo ottenendo

un triangolo  $\Delta''_0$  i cui angoli abbiano ampiezza

$$\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2m} \quad \frac{\pi}{4}$$

. Ora tali angoli sono tutti distinti tra loro poichè  $m > 2$  e  $\delta < 0$ .

Supponiamo però che quest'ultimo procedimento non sia necessario, e che quindi  $\Delta'_0$  abbia gli angoli tutti distinti. Per quanto detto anche nei casi precedenti, tale triangolo costituisce la regione fondamentale di un gruppo  $T'$  generato dalle riflessioni  $L$ ,  $N$ , e  $P$  e definito dalle relazioni:

$$L^2 = N^2 = P^2 = 1 \quad (LN)^m = (NP)^{2l} = (PL)^2 = 1, \quad (4.21)$$

dove  $P$  è la riflessione dell'altezza di  $\Delta_0$  (e ovviamente il lato di  $\Delta'_0$ ). Osserviamo che  $\Delta_0 = \Delta'_0 \cup \Delta'_1$  dove  $\Delta'_1$  è la riflessione di  $\Delta'_0$  rispetto al lato  $P$ . Risulta semplice verificare che vale

$$PNP = M.$$

Resta ora da mostrare che  $L$ ,  $N$  e  $PNP$  generano il sottogruppo  $T^*$  di  $T'$  di indice 2 che ha come rappresentanti delle classi laterali 1 e  $P$  ed è definito dalle relazioni 4.1 e 4.2 dove  $M = PNP$ .

Tramite il metodo di Reidemeister-Schreier possiamo osservare che  $T^*$  è generato da  $L$ ,  $N$ ,  $PLP$  e  $PNP = M$ . Poichè  $(PL)^2 = 1$  abbiamo che  $L = PLPLL = PLPL^2 = PLP$  e quindi le relazioni che generano  $T^*$  sono:

$$L^2 = N^2 = 1 = (PLP^{-1})^2 = (PNP^{-1})^2 = M^2 = 1$$

e

$$(LN)^m = 1, \quad (PNP^{-1})^m = (PLP^{-1}PNP^{-1})^n = (LM)^m = (LM)^n = 1,$$

$$(NP)^{2l} = (NPNP)^l = (NM)^l = 1, \quad (PN)^{2l} = (PNPN)^l = (MN)^l = 1.$$

Tali relazioni coincidono con quelle di  $T^*$  oppure sono derivabili da esse.

Se è il triangolo  $\Delta_0''$  ad avere angoli di ampiezza differenti, occorre costruire la regione fondamentale per  $T'$  unendo quattro triangoli, ottenendo così  $T^*$  come sottogruppo di indice 4 del gruppo delle riflessioni dei lati di  $\Delta_0''$ .

Con questo si conclude la dimostrazione del Teorema 4.1.2.

Per completezza, aggiungiamo anche il seguente risultato per concludere la trattazione del caso iperbolico:

**Teorema 4.1.5.** *Sia  $T(l, m, n)$  il sottogruppo di indice 2 del gruppo triangolare  $T^*(l, m, n)$ , costituito dalle isometrie dirette; allora  $T(l, m, n)$  è generato da  $A = LM$  e  $B = MN$  e definito dalle relazioni:*

$$A^n = B^l = (AB)^m = 1.$$

*Inoltre gli elementi  $\neq 1$  di ordine finito di  $T(l, m, n)$  sono coniugati delle potenze di  $A$ ,  $B$ , o  $AB$ .*

# Appendice A

## Richiami preliminari di Topologia

**Definizione A.1.** Si definisce **topologia**  $\mathcal{T}$  è una famiglia di sottoinsiemi aperti di un insieme  $X$  dove  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ <sup>1 2</sup> che gode delle seguenti proprietà:

1.  $\emptyset$  e  $X$  appartengono a  $\mathcal{T}$ ;
2.  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$  ovvero l'unione di aperti di  $\mathcal{T}$  è un aperto di  $\mathcal{T}$ ;
3.  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{T}$  ovvero l'intersezione finita di insiemi di  $\mathcal{T}$  è un insieme di  $\mathcal{T}$ .

**Definizione A.2.** Definiamo la coppia  $X = (X, \mathcal{T})$  **spazio topologico** dove  $X$  è un insieme qualunque e  $\mathcal{T}$  è la topologia ad esso associata.

**Definizione A.3.** Un **omeomorfismo** tra due spazi topologici  $X$  e  $Y$  è una funzione continua  $f : X \rightarrow Y$  biunivoca e con inversa continua.

---

<sup>1</sup>Con  $\mathcal{P}(X)$  indichiamo l'insieme delle parti di  $X$  ovvero, l'insieme che contiene tutti gli insiemi che si possono realizzare con gli elementi di  $X$ .

<sup>2</sup>Ovvero  $A \subset X$  aperto  $\iff A \in \mathcal{T}$ .



---

**Definizione A.4.** Uno spazio topologico  $X$  è detto **spazio di Hausdorff** (o anche  $T_2$ ) se e solo se  $\forall x \neq y \in X, \exists U$  e  $V$  aperti di  $X$  tali che  $x \in U$  e  $y \notin U$ ,  $y \in V$  e  $x \notin V$  con  $U \cap V = \emptyset$ .

**Definizione A.5.** Sia  $x \in X$  con  $X$  spazio topologico, definiamo **sistema di intorni**  $\mathcal{I}_x$  l'insieme degli intorni  $I$  di  $x$  dove  $\exists A \in \mathcal{T}$  tale che  $x \in A \subset I$ .

**Definizione A.6.** Dato un sistema di intorni  $\mathcal{I}_x$  allora  $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{I}_x$  è detta **base di intorni** per  $x \in X$  se e solo se  $\forall I \in \mathcal{I}_x \exists B \in \mathcal{B}_x$  tale che  $B \subset I$ .

**Definizione A.7.** Uno spazio topologico  $X$  è **secondo numerabile (II-numerabile)** se e solo se  $\forall x \in X \exists \mathcal{B}_x$  base di intorni numerabili e  $\exists D \subset X$  denso<sup>3</sup> e numerabile.

**Definizione A.8.** Uno spazio topologico è **localmente euclideo** se  $\forall x \in X, \exists U \subset X$  intorno aperto di  $x$  ed  $\exists \phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$  omeomorfismo.

**Definizione A.9.** Dato l'insieme  $V$  e le operazioni bilineari  $+$  e  $\cdot$ , indichiamo con **spazio vettoriale** sul campo  $\mathbb{K}$  la tripletta  $(V, +, \cdot)$  se e solo se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1.  $(V, +)$  è un gruppo abeliano <sup>4</sup>
2. l'operazione  $\cdot$  è un prodotto esterno di  $V$  su  $\mathbb{K}$ . <sup>5</sup>

---

<sup>3</sup>Un insieme  $E \subset X$  è denso se e solo se l'insieme  $\bar{E} = \{x \in X : \forall I \in \mathcal{I}_x, I \cap E \neq \emptyset\}$

<sup>4</sup>Dato l'insieme  $V$  e l'operazione binaria  $+: V \times V \rightarrow V$  la coppia  $(V, +)$  è un gruppo abeliano se:

- $+$  è associativa;
- esiste un elemento neutro rispetto a  $+$ ;
- ogni elemento  $v \in V$  ammette un inverso rispetto a  $+$ ;
- vale la proprietà commutativa.

<sup>5</sup>Un'operazione  $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$  è detta prodotto esterno se soddisfa le seguenti proprietà:

- $\cdot$  è associativo;
- l'elemento neutro di  $\cdot$  definito su  $\mathbb{K}$ , e elemento neutro anche in per  $\cdot$  definito su  $\mathbb{K} \times V$ ;
- $\cdot$  è distributivo rispetto all'operazione  $+$  definita sia su  $V$  che su  $\mathbb{K}$ .

# Bibliografia

- [1] *Matematica nel 2000*, Aprile 1998.
- [2] Constantin Carathéodory. *Theory of functions of a complex variable*, volume 1. American Mathematical Soc., 2001.
- [3] G. M. Piacentini Cattaneo. *Algebra: un approccio algoritmico*. Decibel, 2001.
- [4] David Lawrence Johnson. *Presentations of groups*, volume 15. Cambridge university press, 1997.
- [5] F Klein. Vorlesungen ueber die theorie des ikosaeders. *Teubner, Leipzig*, 1888.
- [6] Wilhelm Magnus. *Noneuclidean tessellations and their groups*, volume 61. Academic Press, 1974.
- [7] S. Tordini S. Leonesi e C. Toffalori. *Matematica, miracoli e paradossi*. Springer, 2011.
- [8] David Singerman. *Triangle groups and maps*. Marzo 2016.