

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica



RIVESTIMENTI DI S^4 RAMIFICATI SU UNA SUPERFICIE ORIENTABILE

Tesi Sperimentale di Laurea in Geometria

Laureando:

Andrea Diamantini

Relatore:

Riccardo Piergallini

Anno Accademico 1999 – 2000

Indice

Introduzione	3
1 Varietà e Decomposizioni	5
1.1 Varietà topologiche, DIFF e PL	5
1.2 Varietà orientabili	7
1.3 Complessi Cellulari	8
1.4 Decomposizioni a manici	10
2 Rivestimenti ramificati	13
2.1 Definizioni e proprietà	13
2.2 Varietà come rivestimenti di sfere	17
2.3 Superfici in 4-varietà	20
3 Forme d'intersezione su 4-varietà	23
3.1 Forme bilineari	23
3.2 Forme di intersezione	26
3.3 Autointersezioni	29
3.4 Segnatura	29

4	Rappresentazione delle 4-varietà bordo	33
4.1	Dimostrazione algebrica	34
4.2	Dimostrazione topologica	37
4.3	Considerazioni conclusive	41
	Bibliografia	43

Introduzione

In questa tesi parleremo dei rivestimenti di 4-varietà ramificati su una superficie orientabile, che sono particolari rivestimenti con un sottinsieme singolare di codimensione 2.

Storicamente questo concetto nasce con lo studio delle Superfici di Riemann che ne forniscono anche il primo modello locale. Oggi i rivestimenti ramificati sono uno strumento irrinunciabile della topologia delle basse dimensioni e permettono di rappresentare qualsivoglia varietà (lo vedremo nel secondo capitolo) come rivestimento di una sfera, ramificato su un sottinsieme opportuno.

Preso quindi una 4-varietà M , sappiamo che esiste un rivestimento di S^4 ramificato su una superficie (sottinsieme di codim. 2) che la rappresenta. Ci interessa allora conoscere le caratteristiche topologiche del rivestimento a partire da quelle della varietà. Sostanzialmente vogliamo conoscere il numero di fogli del rivestimento e la superficie di ramificazione (con la sua monodromia). Spiegheremo dunque perchè conoscere queste informazioni ci permette di "ricostruire" la varietà M .

I risultati di Bernstein e Edmonds, che citeremo, ci dicono che sono necessari almeno m fogli per rappresentare ogni varietà di dimensione m . Quelli di

Piergallini (cfr. [32]) che è possibile rappresentare le 4-varietà con 4 fogli ramificate su una superficie singolare. Infine Piergallini e Iori in [17] rappresentano 4-varietà con 5 fogli, ramificate su una superficie localmente piatta.

Ancora aperta la seguente questione: data M^4 , vedere quando è possibile rappresentarla con un rivestimento con 4 fogli, ramificato su una superficie localmente piatta.

Il risultato principale di questa tesi ci permette di affermare che quando un rivestimento ha superficie di ramificazione *orientabile*, questo rappresenta una 4-varietà bordo. Oltre a fornire una esposizione dettagliata della dimostrazione algebrica, daremo una dimostrazione topologica completamente originale di questo fatto.

I numerosi risultati noti sulle superfici di ramificazione orientabili, di cui il più importante è probabilmente il Teorema di Kamada (vedi [18] e [19]) ci permettono poi una classificazione generale di siffatte varietà.

In ultimo vedremo i primi passi per dimostrare il viceversa del nostro teorema principale: data una varietà bordo, rappresentarla come rivestimento su S^4 con superficie di ramificazione orientabile.

Capitolo 1

Varietà e Decomposizioni

In questo primo capitolo richiameremo i concetti e i teoremi fondamentali della topologia che sfrutteremo, senza soffermarci su dimostrazioni e approfondimenti. Maggiori dettagli saranno reperibili sui testi classici della topologia cui faremo riferimento.

1.1 Varietà topologiche, DIFF e PL

Definizione 1. *Varietà topologica di dimensione m è uno spazio topologico M di Hausdorff, II-numerabile e localmente euclideo, cioè tale che per ogni $p \in M$, esiste $U \subset M$ intorno aperto di p , esiste $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow U$ omeomorfismo.*

Se, più in generale, ammettiamo che ogni punto di M abbia un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}_+^m \stackrel{def}{=} \mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty[$, allora parleremo di *varietà con bordo*. In questo caso, l'insieme dei punti di M che hanno un intorno omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^m costituiscono l'*interno* di M , indicato

con $\text{Int } M$. Il complementare dell'interno è detto *bordo* ed è indicato col simbolo $\text{Bd } M$.

Una varietà compatta, connessa e senza bordo si dice *chiusa*; se è connessa non compatta e senza bordo, la varietà è *aperta*. È facile vedere che $\text{Int } M$ è una m -varietà senza bordo e $\text{Bd } M$, quando $\neq \emptyset$, è una $(m - 1)$ -varietà senza bordo.

Data una varietà, la coppia (φ, U) si dirà *carta locale* di M . Si trasporteranno su U , tramite l'omeomorfismo φ , le coordinate di \mathbb{R}^m in modo da avere un sistema di coordinate locali su U .

La famiglia $\mathcal{U} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ con $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di M , si dirà un'*atlante* per la varietà M . Da notare che grazie alla proprietà di II-numerabilità, gli atlanti si potranno considerare al più numerabili.

Prese due carte (φ, U) e (ψ, V) , l'omeomorfismo $\varphi \circ \psi^{-1}|_{U \cap V} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è il *cambiamento di carta* o di coordinate locali.

Presi due aperti $U, V \subset \mathbb{R}^m$, diremo che un'applicazione $f : U \rightarrow V$ è PL (piecewise linear) se esistono triangolazioni affini per U e V tali che f manda simplessi in simplessi in modo affine.

Definizione 2. Si definisce varietà PL una varietà topologica che ammette omeomorfismi PL come cambiamenti di coordinate.

Definizione 3. Varietà DIFF (differenziabile o C^∞) è una varietà topologica che ammette diffeomorfismi come cambiamenti di coordinate.

Osservazione 1. In generale, non è detto che due carte ammettano diffeo-

morfismi (omeo PL) come cambiamenti di coordinate. Quando ciò accade si dice che sono differenziabilmente (PL) compatibili.

Una varietà DIFF (PL) è quindi una varietà topologica dotata di un atlante formato da carte tutte differenziabilmente (PL) compatibili tra di loro.

Si hanno inoltre importanti relazioni fra i concetti sopra esposti, in quanto sussiste l'implicazione $\text{DIFF} \Rightarrow \text{PL}$. L'implicazione opposta non è in generale verificata, anche se è sempre vera quando $\dim M \leq 4$.

Se si considera l'equivalenza indotta dalla compatibilità delle strutture DIFF ammesse da una varietà, si può ottenere il seguente risultato, attribuito a Whitney.

Teorema 1. *Ogni varietà M^m , con $m \leq 3$, ammette un'unica struttura DIFF.*

I risultati e le definizioni esposte qui possono essere trovate in qualunque buon testo introduttivo alla topologia. Nella nostra esposizione ci siamo riferiti principalmente a [21] .

1.2 Varietà orientabili

Assumiamo M varietà DIFF; quando è possibile trovarne un atlante i cui cambiamenti di coordinate hanno tutti Jacobiano positivo, diremo M varietà *orientabile* .

Definizione 4. *Una varietà M si dice orientata quando è possibile fissare su di essa un atlante che ha solo cambiamenti di coordinate a Jacobiano positivo.*

L'orientabilità è, in realtà, una proprietà topologica: si può infatti esprimerla in termini di generatori per le omologie locali. Data M varietà topologica connessa senza bordo, si definisce la nozione di orientazione locale di un punto $p \in M$ come un generatore $\mu_p \in H_m(M, M - \{p\}) \cong \mathbb{Z}$. Allora M è orientabile se è possibile scegliere le orientazioni locali in tutti i punti in modo coerente. Questo vuol dire che $\forall p, q \in M$ fissati, ogni $h_t : M \rightarrow M$ isotopia d'ambiente con $h_1(p) = q$ tale che $h_{1*} : H_m(M, M - \{p\}) \rightarrow H_m(M, M - \{q\})$ manda μ_p in μ_q . Nel caso con bordo M è orientabile se lo è l'interno. Nel caso non connesso si applica la definizione alle componenti.

Se M è compatta e connessa, il fatto che sia orientabile implica che $H_m(M, BdM) \cong \mathbb{Z}$ e un'orientazione corrisponde ad un generatore per questo gruppo; chiameremo μ **classe fondamentale** di M . Se M è compatta, connessa e non orientabile avremo invece $H_m(M, BdM) \cong 0$.

Per approfondimenti sugli argomenti esposti, si rimanda ai testi classici sull'omologia; ad esempio [22], [24], [36], [38].

1.3 Complessi Cellulari

In questa sezione richiameremo i concetti di complesso e applicazione cellulare. Per evitare inutili complicazioni restringeremo la nostra attenzione al caso compatto.

Definizione 5. *Si definisce n -cella una coppia (h, C) , dove C è uno spazio topologico e $h : B^n \rightarrow C$ è un omeomorfismo. Definiremo $h(S^{n-1})$ il bordo della cella C e lo chiameremo ∂C .*

Dato uno spazio topologico X e $f : \partial C \rightarrow X$ applicazione continua, si dice che X' si ottiene da X incollando una n -cella se $X' = C \cup_f X \stackrel{\text{def}}{=} C \sqcup X / y \sim f(y) \forall y \in \partial C$.

Definizione 6. (COMPLESSI CELLULARI). *Un complesso cellulare di dimensione n è uno spazio topologico che si rappresenta come unione di sottospazi $X = \bigcup_{i=0..n} X_i$. X_i viene detto i -scheletro di X e si costruisce incollando delle i -celle tra loro disgiunte ed in numero finito, eventualmente anche zero se $i < n$, ad X_{i-1} . X_0 è un insieme finito e non vuoto di punti.*

Un complesso di dimensione 1 si chiama anche *grafo*. Dato un grafo con un numero finito di celle, un sottografo contraibile si dice *albero*.

Definizione 7. (APPLICAZIONI CELLULARI). *Un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ tra complessi cellulari è detta cellulare se $f(X_i) \subset Y_i, \forall i$.*

Il seguente teorema è basilare per la teoria dei complessi.

Teorema 2. (APPROSSIMAZIONE CELLULARE). *Ogni applicazione continua tra complessi cellulari è omotopa ad un'applicazione cellulare.*

Definizione 8. (SOTTOCOMPLESSI). *Se X è un complesso cellulare, si definisce sottocomplesso Y un sottospazio di X unione delle sue celle. Naturalmente ogni sottocomplesso è a sua volta un complesso cellulare.*

Ogni varietà PL compatta ammette una decomposizione cellulare in cui le celle possono essere considerate poliedri come poliedri convessi di \mathbb{R}^n , con la struttura affine derivante dalle carte della struttura PL.

Ad ognuna di queste decomposizioni cellulari di una varietà PL, possiamo associare una *decomposizione duale* X^* in cui ogni k -cella è in corrispondenza

con una $(n - k)$ -cella di X . Per definirla procediamo nel seguente modo: le 0-celle di X^* sono i baricentri delle n -celle di X ; le i -celle, per $i > 0$ si costruiscono induttivamente prendendo per ogni $(n - i)$ -cella, una i -cella trasversale.

Considerando le decomposizioni duali, è possibile stabilire delle importanti relazioni tra l'omologia e la coomologia singolare di una varietà chiusa. Questo risultato è noto come Dualità di Poincarè ed è alla base dello studio delle teorie di omologia.

Teorema 3. (DUALITÀ DI POINCARÈ). *Se M è una n -varietà PL chiusa orientata, esiste un isomorfismo naturale $H_i(M) \longleftrightarrow H^{n-i}(M)$.*

Un quadro completo di questi argomenti si trova in [22] , [24] , [36] .

1.4 Decomposizioni a manici

In questo paragrafo illustreremo una tecnica molto utilizzata per rappresentare le varietà. Un'ottima trattazione dell'argomento si può trovare in [21] .

Per k -manico di dimensione n , $0 \leq k \leq n$, intenderemo uno spazio H^k omeomorfo a $B^k \times B^{n-k}$. Considereremo anche $B^k \times B^{n-k}$ con la sua struttura PL o con la sua struttura DIFF, ottenuta lisciando gli angoli (in modo che diventi diffeomorfo a B^n).

Data una varietà con bordo W^n potremo costruire un'altra varietà T della stessa dimensione incollando un k -manico. Questa operazione si effettua nel modo seguente: si prende un'immersione $j : \text{BdB}^k \times B^{n-k} \longrightarrow \text{Bd}W$ e si pone $T = W \cup_j B^k \times B^{n-k}$.

Nel caso PL, T avrà una struttura PL indotta da W , se j è una immersione

PL. Nel caso DIFF, non basta assumere j immersione differenziabile regolare per avere una struttura DIFF su T , ma bisogna lisciare gli spigoli. Comunque quest'operazione può essere realizzata in modo unico a meno di diffeomorfismi.

Definizione 9. (FUNZIONI DI MORSE). *Data M varietà DIFF, diremo che una funzione DIFF $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è di Morse se*

- f è regolare in un intorno di $Bd M$;
- df , come sezione del fibrato cotangente a M , è trasversale alla sezione nulla.

È chiaro dalla definizione che una funzione di Morse avrà solo punti critici isolati. In coordinate locali, una funzione f è di Morse se e solo se la matrice Hessiana $H_p f$ ha rango massimo in ogni punto critico p . Il numero degli autovalori negativi di $H_p f$ in un punto critico viene detto *indice* del punto stesso. Il teorema seguente garantisce l'esistenza di funzioni di Morse.

Teorema 4. *Su ogni varietà DIFF compatta M esiste una funzione di Morse f tale che*

- $f(Bd M) = 0$;
- $f(p_i) = i$, per ogni punto critico p_i .

Inoltre, l'insieme delle funzioni di Morse è un aperto denso in $C^\infty(M)$.

Questo risultato è lo strumento che serve per dimostrare quello che è uno dei risultati più importanti della topologia differenziabile: il seguente

Teorema 5. (DECOMPOSIZIONE A MANICI). *Ogni varietà DIFF compatta connessa M^n ammette una presentazione del tipo $M = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots$*

$\subset W_n$, dove W_i si ottiene da W_{i-1} incollando un numero finito di i -manici per $i = 1, 2, \dots, n$ e W_0 è unione disgiunta di bocce.

Da questo teorema segue in particolare che ogni varietà DIFF compatta ha il tipo d'omotopia di un complesso cellulare finito. Chiameremo infine *corpo di manici* di genere g una varietà M^n che ammette una decomposizione con uno 0-manico e g 1-manici.

Capitolo 2

Rivestimenti ramificati

In questo capitolo daremo la definizione di rivestimento ramificato, soffermandoci sulle sue proprietà topologiche e differenziabili.

In particolare, introdurremo il concetto di complesso di spezzamento di un rivestimento (ramificato) e vedremo come si ricostruisce lo spazio totale a partire dallo spazio base, dal complesso di spezzamento e dalle informazioni algebriche contenute nella monodromia.

2.1 Definizioni e proprietà

Introdurremo ora il concetto di rivestimento ramificato, per poi vedere i risultati principali di rappresentazione di n -varietà come rivestimenti ramificati di S^n .

Definizione 10. *Un'applicazione $f : M^m \rightarrow N^n$, con M^m e N^n varietà con bordo, è detta propria se $f(\text{Bd } M) \subset \text{Bd } N$ e $f(\text{Int } M) \subset \text{Int } N$.*

Nel nostro caso considereremo spesso applicazioni tra varietà compatte,

che saranno proprie anche secondo la definizione della topologia generale, cioè controimmagini di compatti vanno in compatti.

Definizione 11. *Un rivestimento ramificato $p : M \rightarrow N$ è un'applicazione PL e propria tra due varietà compatte n -dimensionali, tale che la sua restrizione al complementare di un sottocomplesso di M di codimensione 2, è un rivestimento ordinario finito.*

- L'insieme $L \subset M$ dei punti in cui p non è un omeo locale è l'insieme singolare di p .
- L'insieme $F = p(L) \subset N$ è l'insieme di ramificazione.
- L'insieme $\tilde{L} = p^{-1}(F) - L$ è l'insieme pseudo-singolare.

Si avrà quindi chiaramente che

$$p : M - p^{-1}(F) \rightarrow N - F$$

è un rivestimento ordinario.

Si può provare che nei punti in cui F è localmente piatto in N (cioè possiedono intorni omeomorfi a B^n), il rivestimento ammette un modello locale del tipo

$$\begin{aligned} p_{loc} : B^{m-2} \times B^2 &\longrightarrow B^{m-2} \times B^2 \\ (w, z) &\mapsto (w, z^k) \end{aligned}$$

k si grado locale di p ed è un invariante topologico. Il fattore B^{m-2} parametrizza localmente F e B^2 è la fibra del fibrato normale. Il suo bordo S^1

corrisponde ad un cappio (*meridiano*) che gira intorno a F : pertanto il numero naturale k conta i giri che il rivestimento fa localmente attorno a F ed è costante sulle componenti connesse della parte localmente piatta di B stesso:

Ad un rivestimento ramificato si può far corrispondere la **monodromia** del rivestimento ordinario associato. Questo sarà un omomorfismo

$$\rho : \pi_1(N - F, *) \longrightarrow \Sigma_d$$

che a $[\omega] \in \pi_1(N - F, *)$ fa corrispondere la permutazione della fibra sopra $*$ ottenuta sollevando ω . Quindi la permutazione associerà ad un punto $x \in p^{-1}(*)$ il punto $\tilde{\omega}(1)$, dove $\tilde{\omega} : [0, 1] \longrightarrow M - \tilde{L}$ è l'unico sollevamento di ω tale che $\tilde{\omega}(0) = x$. Nel seguito sottintenderemo la scelta del punto base.

Assumiamo anche di aver numerato (in modo qualunque) la fibra sopra il punto base stesso, così da poter utilizzare il gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{1, \dots, d\}$. Il numero d è il *grado del rivestimento*. Diremo che un rivestimento è **semplice** se la monodromia di un meridiano qualunque è una trasposizione.

Osservazione 2. *Sarà equivalente affermare che p è semplice se $\sharp p^{-1}(y) \geq d - 1$ per ogni punto y che ha un intorno localmente piatto.*

Dati N , F e ρ è possibile ricostruire il rivestimento ramificato. Per provare questo diamo prima la definizione seguente.

Definizione 12. (Complessi di spezzamento). *Un complesso di spezzamento per F è un sottocomplesso $K \subset N$ tale che $F \subset K$, $N - K$ è connesso per archi e la monodromia è banale su $N - K$.*

Esistono sempre complessi di spezzamento relativi a qualunque insieme di ramificazione e a qualunque monodromia ρ . Per vederlo consideriamo una triangolazione X di N (per cui F sia sottocomplesso). La decomposizione duale X^* avrà come 1-scheletro un grafo finito trasversale a X_{n-1} ed un albero massimale $A \subset X_1^*$ ci dà un modo per connettere le n -celle di X . Il nostro K sarà formato dalle $(n - 1)$ -celle di X che non incontrano A . Così avremo $F \subset X_{n-2} \subset K$ e $N - K$ contraibile, quindi semplicemente connesso e con monodromia banale.

Vediamo ora come si ricostruisce p a partire da N , F e ρ . Intanto si prende un complesso di spezzamento K per F e si taglia N lungo K , cioè si prende $N' = Cl(N - W)$ dove W è un intorno regolare di K .

Il $\pi_1(N - F)$ sarà generato da certi meridiani μ_1, \dots, μ_s trasversali a K , che fanno un giro intorno a F e che incontrano geometricamente le $(n - 1)$ -celle di K una volta.

Nei punti dove i meridiani incontrano le $(n - 1)$ -celle di K orienteremo i primi in modo che, scelta un'orientazione sulle $(n - 1)$ -celle, si ottenga una delle due orientazioni di N . Una volta tagliato N lungo K potremo decidere se la cella ottenuta è negativa o positiva a seconda che il meridiano entri o esca da essa. Naturalmente per ogni cella positiva ce ne sarà una negativa, infatti le celle corrispondenti erano identificate prima di tagliare.

Si considerino ora d copie disgiunte di N' ($= fogli$), numerate da 1 a d (ognuna avrà celle positive e negative come precisato sopra); mediante la monodromia incolliamo una faccia positiva σ di N'_i con quella negativa corrispondente di $N'_{\rho(\mu_l)(i)}$ se μ_l è il meridiano che dà il segno a σ .

2.2 Varietà come rivestimenti di sfere

I rivestimenti ramificati possono essere usati per rappresentare le varietà; nella nostra esposizione ci occuperemo solamente di varietà chiuse, PL. Vale infatti il seguente teorema, dimostrato da J. W. Alexander [1] nel 1920.

Teorema 6. *Ogni varietà M^m chiusa PL è un rivestimento ramificato di S^m .*

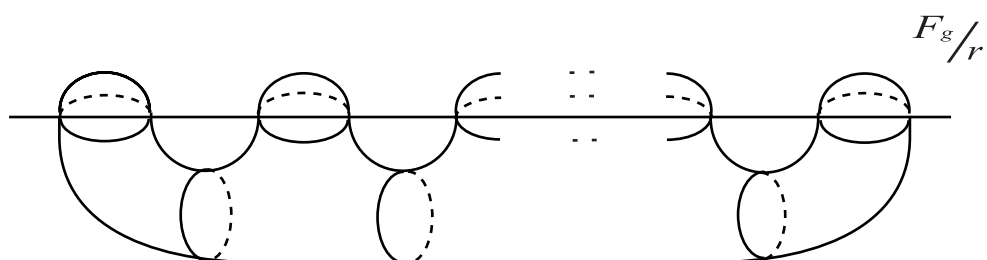
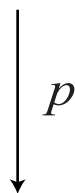
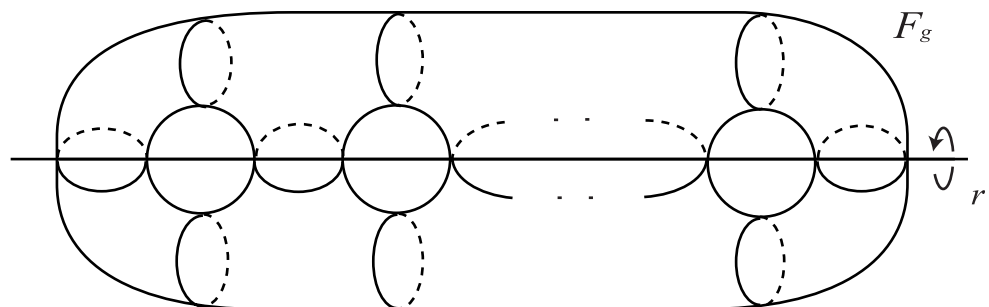
Stabilito che ogni varietà è rappresentabile come rivestimento di una sfera, ramificato su un insieme F opportuno, nascono due problemi di natura tecnica per l'effettiva rappresentazione di una varietà:

- É possibile trovare un limite superiore, dipendente solo dalla dimensione m , al numero di fogli necessari per ricostruire la varietà?
- É possibile trovare, per ogni varietà M , un rivestimento p che la rappresenti con insieme di ramificazione F non-singolare?

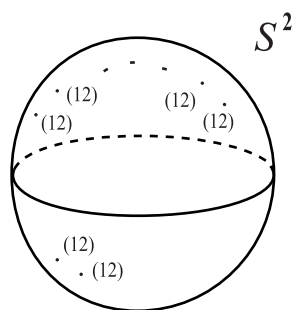
Per quanto riguarda la prima problematica, I. Bernstein e A. L. Edmonds in [2] stabiliscono che, se un limite superiore esiste, non può essere minore di m . Infatti il toro m -dimensionale T^m è un rivestimento ramificato di S^m con m fogli e non è possibile rappresentarlo con $m - 1$ fogli. Nello stesso articolo provano che, in generale, non è possibile richiedere F non singolare.

Noi vedremo che per dimensioni $m \leq 4$, la risposta alle due domande è positiva.

Teorema 7. *Ogni superficie orientabile T_g di genere g , si può rappresentare come rivestimento di S^2 con 2 fogli, ramificato su $2g + 2$ punti (come mostrato nella figura).*



\cong



Vale inoltre, dato un rivestimento ramificato $p : F \longrightarrow G$ con F e G superfici orientabili, il seguente risultato, noto come **formula di Hurwitz**:

$$\chi(F) = \chi(G) - \sum_i d_{x_i}(p) - 1$$

con x_i che varia fra i punti di F . Questo importante risultato sui rivestimenti di superfici ci permette di classificarle solo in base ad una loro rappresentazione con un rivestimento ramificato su un insieme noto di punti.

Per quanto riguarda la dimensione 3, il seguente teorema di rappresentazione venne dimostrato indipendentemente da H. M. Hilden [10], U. Hirsch [15] e J. M. Montesinos [26] nel 1974.

Teorema 8. *Ogni 3-varietà è un rivestimento semplice con 3 fogli di S^3 , ramificato su un link.*

Dim. Per dimostrare questo, introdurremo alcuni concetti tipici della topologia delle basse dimensioni (cfr. [33]).

Definizione 13. *Uno SPEZZAMENTO DI HEEGAARD di una 3-varietà M^3 è una sua presentazione come l'unione di due corpi di manici M_1^3 e M_2^3 con bordo comune $\partial M_1^3 = \partial M_2^3$.*

Lemma 1. *Ogni 3-varietà orientabile possiede uno spezzamento di Heegaard.*

Torniamo ora alla dimostrazione del nostro teorema. Data M^3 , si prende un suo spezzamento di Heegaard. $M \cong H_g \cup_f H_g$ dove:

- H_g è un corpo di manici di genere g ;
- $f : T_g \rightarrow T_g$ omeo di incollamento, con $T_g = \text{Bd } H_g$.

Si prende poi un rivestimento di S^2 ramificato su $2g+2$ punti e lo si estende a B^3 . La ramificazione consisterà in $g+1$ archi banali, ognuno con la propria monodromia.

Il rivestimento cercato sarà $p : M \longrightarrow S^3$, così costruito:

$$H_g \cup_h H_g \longrightarrow B^3 \cup_k B^3$$

dove $k : S^2 \longrightarrow S^2$ è un omeomorfismo che si estende a tutto B^3 . \square

La dimostrazione completa del teorema si trova negli articoli già citati. Ulteriori approfondimenti sono in [11] e [29].

Finalmente, in dimensione 4, abbiamo questi due risultati, dimostrati da Piergallini e Iori in [17] e [32].

Teorema 9. *Ogni 4-varietà è un rivestimento semplice di S^4 con 4 fogli, ramificato su una superficie immersa trasversalmente.*

Teorema 10. *Ogni 4-varietà è un rivestimento semplice di S^4 con 5 fogli, ramificato su una superficie localmente piatta.*

Ancora aperto il problema della rappresentazione di una 4-varietà con 4 fogli e superficie di ramificazione localmente piatta.

2.3 Superfici in 4-varietà

Per quanto riguarda le superfici di ramificazione dei rivestimenti di 4-varietà, Kamada in [18] ha ottenuto il seguente importante risultato, sfruttando il concetto di 2-treccia, che andiamo a introdurre.

Definizione 14. (2-TRECCE CHIUSE). Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ un intorno tubolare di S^2 e $p : W \rightarrow S^2$ la proiezione. Una 2-treccia chiusa è una superficie chiusa $F \subset W$ (anche con più di una componente) tale che $p|_F : F \rightarrow S^2$ sia un rivestimento ramificato. F è semplice se lo è p come rivestimento.

Teorema 11. (KAMADA). Ogni superficie $F \subset \mathbb{R}^4$ chiusa orientabile (non necessariamente connessa) è isotopa ad una 2-treccia chiusa semplice.

Ovviamente quanto detto vale anche nel caso delle superfici in S^4 . Kamada in [19] ha sviluppato anche una tecnica per rappresentare le trecce bidimensionali mediante grafi finiti che chiama *carte*. Questi grafi si ottengono semplicemente considerando una qualunque proiezione delle superfici in R^3 e prendendo la chiusura del luogo dei punti doppi. Si arriva ad un grafo in R^3 , che proiettato in modo generico in R^2 ci dà la carta. Sono noti i movimenti che legano due carte che rappresentano trecce equivalenti.

Questi risultati sulle superfici *orientabili* sono molto importanti perchè ci forniscono un ottimo strumento di lavoro, soprattutto nel caso particolare di superfici (orientabili) che sono insieme di ramificazione di un rivestimento fra 4-varietà. Non esistono tuttora risultati per le varietà non orientabili analoghi a questi.

Sul problema dell'immersione di una superficie in una 4-varietà, ci atterremo a queste definizioni. Qui F sta per superficie ed M è una generica 4-varietà.

Definizione 15. F si dice IMMERSA in M se esiste $i : F \hookrightarrow M$ immersione (IMMERSION).

Definizione 16. *F si dice LOCALMENTE IMMERSA in M se esiste $j : F \hookrightarrow M$ immersione locale, cioè una funzione continua localmente iniettiva. Diremo punti SINGOLARI quei punti $y \in M$ tali che $\sharp j^{-1}(y) > 1$.*

Capitolo 3

Forme d'intersezione su 4-varietà

Introdurremo adesso velocemente le forme bilineari simmetriche per poi studiare le forme d'intersezione ed enunciare il Teorema della G-segnatura. Per una visione globale sugli argomenti esposti si rimanda a [5], mentre maggiori approfondimenti su temi più specifici si trovano in [8], [9], [14], [20], [34], [37] e verranno segnalati via via nel testo.

3.1 Forme bilineari

Sia A un gruppo libero abeliano finitamente generato. $\varphi : A \times A \longrightarrow \mathbb{Z}$ si dice *forma bilineare* su A se :

$$\varphi(a + c, b) = \varphi(a, b) + \varphi(c, b)$$

$$\varphi(na, b) = n\varphi(a, b)$$

$$\varphi(a, b + d) = \varphi(a, b) + \varphi(a, d)$$

$$\varphi(a, nb) = n\varphi(a, b)$$

per ogni scelta di $a, b, c, d \in A ; n \in \mathbb{Z}$.

φ si dice *simmetrica* se e solo se $\varphi(a, b) = \varphi(b, a) \forall a, b \in A$

La forma viene definita *non degenera* se $\det \varphi = \pm 1$ rispetto ad una qualunque base di A ; chiaramente $(\varphi)_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ con $\{v_1, \dots, v_n\}$ base per A .

Definiamo **rango** e **segnatura** come segue:

$$\begin{aligned} rk \varphi &= rk A = rk A^+ + rk A^- \\ sign \varphi &= rk A^+ - rk A^- \end{aligned}$$

con A^\pm qualunque sottogruppo massimale su cui φ è definita positiva/negativa.

Definiamo inoltre il **tipo** di φ

$$\begin{aligned} \varphi \text{ pari} &\stackrel{def}{\iff} \varphi(a, a) \equiv 0 \text{ mod } 2 \text{ per ogni } a \in A \\ \varphi \text{ dispari} &\stackrel{def}{\iff} \text{esiste } a \in A \text{ tale che } \varphi(a, a) \equiv 1 \text{ mod } 2 \end{aligned}$$

Daremo adesso una classificazione parziale delle forme bilineari in base a rango, segnatura e tipo, sfruttando il seguente risultato:

Teorema 12. φ forma non degenera $\iff \varphi \cong \oplus$ forme irriducibili

Classificazione Forme Bilineari.

- Forme Indefinite

- φ pari $\implies \varphi \cong mE_8 \oplus nT$, con $n \geq 1$.

dove:

$$E_8 \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } T \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- φ dispari $\implies \varphi \cong m(1) \oplus n(-1)$, con $m, n \geq 1$.

Quindi le forme intere bilineari simmetriche non degeneri *indefinite* sono facilmente classificabili in base a rango, segnatura e tipo ($\text{sign } E_8 = 8$ e $\text{sign } T = 0$). Sulle forme *definite* invece, abbiamo potuto fare solo alcuni esempi, poichè non sono state completamente classificate. Il loro numero aumenta infatti esponenzialmente al crescere del rango e al variare della segnatura.

• Forme Definite (Positive/Negative)

- φ pari $\cong \bigoplus E_{4n}$, con n pari.

- φ dispari $\cong \bigoplus_n(+1)$

$\bigoplus_m(-1)$

E_{4n} , con n dispari

$(\bigoplus E_8) \bigoplus (\bigoplus_m(+1))$, con $m \geq 1$.

Se $\varphi : A \times A \longrightarrow \mathbb{Z}$ è una forma bilineare, intera, simmetrica e non

degenere, tensorizzando con \mathbb{R} , si ottiene una forma bilineare non degenere

$$\psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $V = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ spazio vettoriale di dimensione uguale a $\text{rk } A$, e si ha

$$\text{sign } \psi = \text{sign } \varphi = \dim V^+ - \dim V^-$$

dove $V = V^+ \oplus V^-$ è una qualunque decomposizione (ψ -ortogonale) di V , con $\psi|_{V^\pm}$ definita positiva/negativa. Quindi $\text{sign } \varphi$ si può determinare diagonalizzando ψ .

Se G è un gruppo finito di ψ -automorfismi di V , allora definiamo la g -segnatura di ψ , per ogni automorfismo $g \in G$, come segue:

$$\text{sign}_g \psi = \text{tr } g|_{V^+} - \text{tr } g|_{V^-}$$

dove $V = V^+ \oplus V^-$ è una qualunque decomposizione (ψ -ortogonale) g -invariante di V , con $\psi|_{V^\pm}$ definita positiva/negativa. $\text{sign}_g \psi$ è ben definita, dipende solo dall'azione di g e naturalmente si ha $\text{sign}_{id} \psi = \text{sign } \psi$.

3.2 Forme di intersezione

Sia M^4 una varietà DIFF, chiusa, orientata. Definiremo adesso una forma bilineare simmetrica su M^4 , basandoci solo sulle caratteristiche topologico-differenziabili di M^4 . Adopereremo il seguente risultato preliminare, dimostrato da Hsiang e Szczarba in [16].

Teorema 13. *Per ogni elemento $\gamma \in H_2(M^4)$ esiste $F_\gamma \subset M^4$, superficie regolare tale che $i_*(\mu_F) = \gamma$, dove μ_F è la classe fondamentale di F_γ e i_* è indotta dall'inclusione canonica $i : F_\gamma \hookrightarrow M^4$*

Dim. Preso $\gamma \in H_2(M^4)$, associamogli $\gamma^* \in H^2(M^4)$, applicando la dualità di Poincarè. Per $H^2(M^4)$ sussiste la corrispondenza biunivoca

$$H^2(M^4) \longleftrightarrow [M^4, K(2, \mathbb{Z})]$$

dove $[X, Y]$ sono le classi di applicazioni continue da X a Y ; $K[2, \mathbb{Z}]$ è uno spazio di Eilenberg - Mac Lane.

Ad esempio, uno spazio $K[2, \mathbb{Z}]$, cioè con tutti i gruppi di omotopia nulli tranne il secondo, isomorfo a \mathbb{Z} , è lo spazio $\mathbb{C}P^\infty \stackrel{def}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}P^n$. Preso il fibrato

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^\infty \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^\infty \end{array}$$

la successione esatta del fibrato sarà

$$\dots \pi_n(S^\infty) \longrightarrow \pi_n(\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(S^1) \longrightarrow \pi_n(S^\infty) \dots$$

da cui, essendo $\pi_n(S^\infty) \cong 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\pi_n(\mathbb{C}P^\infty) \cong 0$, per ogni $n \neq 2$, $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$.

Sfruttando ora il Teorema di Approssimazione Cellulare, potremo considerare semplicemente le classi di applicazioni fra M^4 e il 4-scheletro di $\mathbb{C}P^\infty$, cioè $\mathbb{C}P^2$.

$$\begin{array}{ccc} H^2(M^4) & \longleftrightarrow & [M^4, \mathbb{C}P^2] \\ \gamma^* & \longleftrightarrow & f: M^4 \longrightarrow \mathbb{C}P^2 \end{array}$$

dove $f: M^4 \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ è differenziabile regolare. Per il Teorema di Approssimazione Trasversale, possiamo rendere f $\mathbb{C}P^1$ -trasversale, in modo che $f^{-1}(\mathbb{C}P^1) = S$ sia una superficie differenziabile regolare. □

Definiamo allora la forma d'intersezione di M^4

$$\begin{aligned} i_M : H_2(M^4) \times H_2(M^4) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto F_\alpha \cdot F_\beta \end{aligned}$$

dove F_α e F_β sono associate ad α e β nel modo sopra descritto. $F_\alpha \cdot F_\beta$ è la somma algebrica dei punti d'intersezione.

Notiamo che la forma d'intersezione è ben definita, infatti si ha $i_M(\alpha, \beta) = \langle \alpha^* \cup \beta^*, \mu_M \rangle$, dove $\alpha^*, \beta^* \in H^2(M^4)$ sono i duali di Poincaré di α e β .

La forma d'intersezione induce una forma bilineare non degenera

$$j_M : H_M \times H_M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

sul gruppo abeliano finitamente generato

$$H_M \cong \frac{H_2(M) / j_*(H_2(BdM))}{Torsione}$$

dove $j_* : H_2(Bd M) \hookrightarrow H_2(M)$ è l'omomorfismo indotto dall'inclusione.

$j_M(\alpha, \beta) = 0$ per ogni $\alpha \in j_*(H_2(BdM))$.

j_M soddisfa le seguenti proprietà :

a) $j_{-M} = -j_M$

b) $j_{M \uparrow N} = j_M \oplus j_N$

c) $M = Bd W \implies j_M$ è nulla su $\ker i_*$, con i_* omomorfismo indotto dall'inclusione di M in W .

Esempi. $i_{S^4} \cong 0$, $i_{\mathbb{C}P^2} \cong 1$, $i_{S^2 \times S^2} \cong \mathbb{T}$, $i_{S^2 \tilde{\times} S^2} \cong (1) \oplus (-1)$, $i_K \cong -2E_8 + 3T$ con $K =$ quartica non singolare in $\mathbb{C}P^3$ (Superficie di Kummer)

Se G è un gruppo finito di diffeomorfismi di M che conservano l'orientazione, allora i_M è invariante rispetto alle azioni indotte da G su H_M , cioè

$$i_M(g_*(\alpha), g_*(\beta)) = g(F_\alpha) \cdot g(F_\beta) = F_\alpha \cdot F_\beta = i_M(\alpha, \beta) \quad \forall g \in G$$

3.3 Autointersezioni

Sia M^4 una varietà orientabile. Se F è una superficie chiusa connessa localmente immersa (in modo trasversale) in M , denotiamo con ν_F il fibrato normale di F in M e definiamo il *numero di Eulero* di F in M come segue:

$$e(F) = F \cdot F' \quad \text{in } \nu_F$$

dove F' è una perturbazione di F in ν_F (il fibrato normale ν_F è orientabile anche se F non lo è, quindi $e(F)$ è ben definito).

Se F è orientabile, allora si ha:

$$e(F) = i_M([F], [F]) - 2\delta(F)$$

dove $\delta(F)$ è il numero dei punti doppi di F con segno (autointersezione).

3.4 Segnatura

Sia M^4 una varietà orientata con bordo. Definiamo la segnatura $\sigma(M)$ di M come la segnatura della forma d'intersezione i_M , cioè:

$$\sigma(M) = \text{sign } i_M$$

si vede facilmente, in base agli esempi precedenti, che $\sigma(S^4) = 0$, $\sigma(\mathbb{C}P^2) = 1$, $\sigma(K) = -16$.

La segnatura soddisfa le seguenti proprietà, che seguono da quelle delle forme d'intersezione, viste precedentemente in 3.2:

a) $\sigma(-M) = -\sigma(M)$.

b) $\sigma(M \natural N) = \sigma(M) + \sigma(N)$.

Si può inoltre dimostrare (vedi [20], pg. 49-56) che

c) $M = \text{Bd } W \implies \sigma(M) = 0$.

Dalle proprietà suddette segue un omomorfismo (suriiettivo)

$$\sigma : \Omega_4 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dove Ω_4 è il quarto gruppo di cobordismo.

Teorema 14. (HIRZEBRUCH,1953) *Sia M^4 una varietà chiusa orientata e $p_1(M)$ il suo primo numero di Pontrjagin. Allora*

$$\sigma(M) = \frac{1}{3} p_1(M)$$

Quando $p_1(M) = 0$, si può trovare un'immersione locale di M^4 in \mathbb{R}^6 senza punti tripli e quindi un'immersione di M^4 in \mathbb{R}^6 . A questo punto si costruisce un'ipersuperficie di Seifert in \mathbb{R}^6 con bordo M. Dal teorema di Hirzebruch (reperibile in [20]) segue quindi che

- $\sigma : \Omega_4 \longrightarrow \mathbb{Z}$ è un **isomorfismo** ;
- $\Omega_4 \cong \langle \mathbb{C}P^2 \rangle$.

Per giustificare questa seconda osservazione basterà far vedere che $p_1(\mathbb{C}P^2) = 3$. Sia τ il fibrato tangente di $\mathbb{C}P^2$; le sue classi di Chern sono $c_i(\tau)$ sono

uguali a $\binom{n+1}{i} a^i$ (vedi [25] e [20]). La classe totale di Chern sarà $c(\tau) = 1 + c_1(\tau) + c_2(\tau) = 1 + 3\alpha + 3\alpha^2$ dove α è il generatore di $H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ e α^2 genera $H^4(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Sfruttando le relazioni note fra le classi di Chern e quelle di Pontrjagin, si ha $p_1 = c_1^2 - 2c_2$, da cui $p_1 = 3\alpha^2$. Allora segue chiaramente $p_1(\mathbb{C}P^2) = 3$.

Se G è un gruppo finito di diffeomorfismi di M che conservano l'orientazione, allora definiamo la g -segnatura di M , per ogni $g \in G$, come la g -segnatura di i_M , cioè:

$$\sigma_g(M) = \text{sign}_g i_M$$

La g -segnatura dipende solo dall'azione indotta da g su V_M e soddisfa proprietà analoghe a quelle della segnatura, con in più l'ovvia equivalenza $\sigma_{id}(M) = \sigma(M)$.

A questo punto enunceremo, senza dimostrarlo, il teorema della G -segnatura (o dell'indice).

Teorema 15. (G-SEGNATURA. ATIYAH - SINGER, 1968). *Se M è una varietà chiusa e $g \in G$ è diverso da id_M , ogni componente dell'insieme M^g dei punti fissi rispetto a g , è un punto isolato o una superficie chiusa (non singolare), si ha:*

$$\sigma_g(M) = - \sum_p \cot \frac{\vartheta_1(p)}{2} \cot \frac{\vartheta_2(p)}{2} + \sum_F e(F) \sin^{-2} \frac{\vartheta(F)}{2},$$

dove p varia tra i punti isolati di M^g e l'azione indotta da g su $T_p M$ si decompone come somma diretta di due rotazioni di angoli $\vartheta_1(p)$ e $\vartheta_2(p)$, e dove F

varia tra le componenti connesse non banali di M^g e l'azione indotta da g su ogni fibra di ν_F è la rotazione di un angolo $\vartheta(F)$ ($= \pi$ se F non è orientabile).

Se M/G è una varietà, allora M^g non ha punti isolati per ogni $g \in G$ e la proiezione $\pi : M \rightarrow M/G$ è un rivestimento regolare con *insieme singolare* $S_\pi = \bigcup_{g \neq id} M^g$. Inoltre si ha:

$$\sigma(M/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma_g(M) = \frac{\sigma(M)}{|G|} + \frac{1}{|G|} \sum_F e(F) \frac{n(F)^2 - 1}{3},$$

dove F varia tra le superfici connesse in S_π ed $n(F)$ è la cardinalità del sottogruppo G_F che lascia fissa F .

Lo studio delle forme bilineari può essere approfondito in qualunque buon testo di algebra lineare. Le forme d'intersezione fra 4-varietà vengono trattate in maniera esaustiva in [8] e [20]. Enunciato, dimostrazioni e applicazioni varie del teorema della G-segnatura si trovano in [9], [34] e [37].

Capitolo 4

Rappresentazione delle 4-varietà bordo

In questo capitolo enunceremo il risultato principale di questa tesi e poi ne vedremo due differenti dimostrazioni. Una di carattere algebrico, basata sul teorema della G-segnatura (Atiyah-Singer). Questa dimostrazione viene desunta dai lavori di Gordon [9] e Viro [37].

La seconda dimostrazione, di carattere geometrico, è completamente originale. In essa sfrutteremo tecniche di chirurgia e cobordismo tra varietà differenziabili. Il risultato è il seguente

Teorema 16. *Sia M^4 una varietà chiusa, $p : M^4 \rightarrow S^4$ rivestimento semplice ramificato su F , superficie orientabile immersa $\implies M^4 = Bd W^5$, con W^5 varietà orientabile.*

Osservazione 3. *Le dimostrazioni che presenteremo valgono anche nel caso più generale di una superficie localmente immersa, purchè si abbia $\delta(F) = 0$.*

4.1 Dimostrazione algebrica

Lo schema della dimostrazione è il seguente:

- Dalle ipotesi e dal teorema della G -segnatura segue che $\sigma(M^4) = 0$.
- Da $\sigma(M^4) = 0$ e da 3.4 segue che $M^4 = BdW^5$.

Infatti, si prenda $p : M \rightarrow N$ rivestimento ramificato di grado $d(p)$ tra 4-varietà chiuse orientate tale che l'insieme di ramificazione B_p è una superficie localmente immersa in modo trasversale in N . Allora $L_p = p^{-1}(B_p)$ è una superficie localmente immersa in modo trasversale in M e $p|_{L_p} : L_p \rightarrow B_p$ è un rivestimento ramificato sui punti doppi di B_p . Per ogni superficie connessa $F' \subset L_p$ e per ogni superficie connessa $F \subset B_p$ poniamo:

$$h(p, F') = \frac{d(p|_{F'})}{r(p, F')} \quad \text{e} \quad k(p, F) = \sum_{F' \rightarrow F} h(p, F')$$

- $d(p|_{F'})$ è il grado del rivestimento ramificato $p|_{F'} : F' \rightarrow F = p(F')$
- $r(p, F')$ è l'indice di ramificazione di p intorno ad F' .

Per ogni superficie connessa F' in L_p tale che $p(F') = F$, si ha:

$$e(F') = h(p, F')e(F)$$

Infatti, considerando il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \nu'_{F'} & \longrightarrow & \nu^*_{F'} & \longrightarrow & \nu_F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F' & \xrightarrow{id} & F' & \xrightarrow{p|_{F'}} & F \end{array}$$

dove $\nu^*_{F'}$ è il fibrato indotto su F' da ν_F , si ha (cfr. [23] pg. 145-147)

$$e(\nu_{F'}) = \frac{1}{d(p, F')} e(\nu^*_{F'}) = \frac{d(p|_{F'})}{d(p, F')} e(\nu_F).$$

◇ Se p è *regolare*, l'indice di ramificazione $d(p, F')$ è lo stesso per ogni F' tale che $p(F') = F$. Indicando con $c(p, F)$ tale indice di ramificazione e tenendo conto che in questo caso

$$h(p, F') = \frac{d(p|_{F'})}{c(p, F)} \quad \text{e} \quad k(p, F) = \frac{d(p)}{c(p, F)^2},$$

dal Teorema della G -segnatura si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma(M) &= d(p) \sigma(N) - \sum_{F'} \frac{d(p, F')^2 - 1}{3} e(F') = \\ &= d(p) \sigma(N) - \sum_F \sum_{F' \rightarrow F} \frac{c(p, F)^2 - 1}{3} h(p, F) e(F) = \\ &= d(p) \sigma(N) - \sum_F \frac{c(p, F)^2 - 1}{3} k(p, F) e(F) = \\ &= d(p) \sigma(N) - \sum_F \frac{d(p) - k(p, F)}{3} e(F). \end{aligned}$$

◇ Se p è *irregolare*, si considerano il rivestimento regolare associato (quell'unico rivestimento regolare che ha $B_r = B_p$ e $\omega_r = \omega_p$), ed il rivestimento regolare indotto $q : R \rightarrow M$ (il rivestimento tale che $r = p \circ q$). Allora, similmente al caso regolare, si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma(R) &= d(r) \sigma(N) - \sum_F \frac{d(r) - k(r, F)}{3} e(F) \\ \sigma(R) &= d(q) \sigma(M) - \sum_{F'} \frac{d(q) - k(q, F')}{3} e(F') \end{aligned}$$

tenendo conto che $c(q, F') = c(r, F)/d(p, F')$, si ha:

$$\begin{aligned} & \sum_{F'} \frac{d(q) - k(p, F')}{3} e(F) = \\ & \sum_{F'} \frac{d(q) - d(q)d(p, F')^2/c(r, F)^2}{3} h(p, F') e(F) = \\ & \sum_F \frac{d(q)k(p, F) - d(q)d(p)/c(r, F)^2}{3} e(F) = \\ & \sum_F \frac{d(q)k(p, F) - k(r, F)}{3} e(F) \end{aligned}$$

Quindi si ottiene la stessa formula già vista nel caso regolare:

$$\sigma(M) = d(p)\sigma(N) - \sum_F \frac{d(p) - k(p, F)}{3} e(F).$$

Osservazione 4. $k(p, F) = \sum \frac{1}{l_i}$, dove l_i sono le lunghezze dei cicli disgiunti, compresi quelli banali, della monodromia intorno ad F (determinata a meno di coniugazione).

◇ Se p è *virtualmente regolare* (cioè il rivestimento q non è ramificato), allora l'indice di ramificazione $d(p, F')$ è lo stesso per ogni F' tale che $p(F') = F$, come nel caso regolare, quindi si ha:

$$\sigma(M) = d(p)\sigma(N) - \sum_F \frac{c(p, F)^2 - 1}{3c(p, F)^2} e(F).$$

In particolare, se p è non ramificato, si ha $\sigma(M) = d(p)\sigma(N)$.

◇ Se p è *semplice*, allora si ha: $k(p, F) = d(p) - 2 + 1/2$ per ogni $F \subset B_p$, quindi si ottiene:

$$\sigma(M) = d(p)\sigma(N) - \frac{1}{2} \sum_F e(F)$$

Nel caso considerato, la formula ottenuta diviene:

$$\sigma(M^4) = d(p) \sigma(S^4) - \frac{1}{2} \sum_F e(F)$$

Ma chiaramente, essendo $i(S^4) \equiv 0$, si ottiene $\sigma(S^4) = 0$. Inoltre, essendo per ipotesi F orientabile e quindi potendo sfruttare i risultati in 3.3, si deduce che:

$$\sigma(M^4) = \sum_F \delta(F).$$

Dalle ipotesi iniziali e dalla formula ottenuta, si ha dunque $\sigma(M^4) = 0$, cioè l'asserto voluto. \square

4.2 Dimostrazione topologica

Anche qui signaleremo i passi della dimostrazione, in modo da renderla il più chiara possibile:

- si considera F immersa nel fibrato normale $\nu(S^2) \cong S^2 \times D^2$;
- si proietta su $S^2 \times I \subset \nu(S^2)$;
- tramite chirurgia, si modifica F in modo da renderla cobordante ad una unione disgiunta di copie di S^2 ;
- si riporta la superficie modificata in S^4 ;
- si costruisce W^5 .

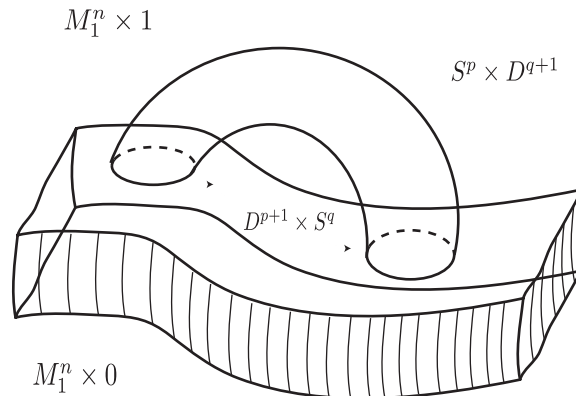
Prima di tutto descriveremo una **chirurgia** tra varietà di dimensione arbitraria, attraverso la quale varietà bordo sono trasformate in varietà che

sono ancora bordo di qualcosa. Vedremo poi nel nostro caso particolare qual è la chirurgia da effettuare.

Per interi positivi arbitrari p e q , la varietà $S^p \times S^q$ è bordo sia di $D^{p+1} \times S^q$ che di $S^p \times D^{q+1}$. Dunque, da ogni varietà M_1^n di dimensione $n = p + q + 1$ possiamo "tagliare" via $D^{p+1} \times S^q$ e "incollarci" sopra $S^p \times D^{q+1}$ lungo l'ovvio omeomorfismo dei loro bordi. Denotiamo la varietà risultante M_2^n .

Lemma 2. *Esiste una varietà W^{n+1} il cui bordo è l'unione disgiunta di M_1^n e M_2^n .*

Dim. Consideriamo la varietà $W^{n+1} = M_1^n \times I$. Il suo bordo consiste di sue copie di M_1^n , denotate $M_1^n \times \{0\}$ e $M_1^n \times \{1\}$. Consideriamo il $(d + 1)$ -manico $D^{p+1} \times D^{q+1}$. il suo bordo è dato invece da $S^p \times D^{q+1}$ e $D^{p+1} \times S^q$ che si intersecano su $S^p \times S^q$. Incolliamo questo $(d + 1)$ -manico su $M_1^n \times \{1\}$. La varietà ottenuta con l'incollamento è W^{n+1} . Dalla costruzione effettuata si evince chiaramente che M_1^n ($\cong M_1^n \times \{0\}$) è cobordante a M_2^n ($\cong n$ -varietà ottenuta a quota 1).



Torniamo alla dimostrazione del nostro teorema. Le ipotesi ci dicono che F è orientabile; applicando il teorema di Kamada (cfr. [18]) possiamo considerare F una 2-treccia chiusa semplice. È facile adesso vederla contenuta nel D^2 -fibrato normale di S^2 .

$$\begin{array}{ccc} F & \subset & B^2 \times S^2 \\ \pi|_F = p & \searrow & \downarrow \\ & & S^2 \end{array}$$

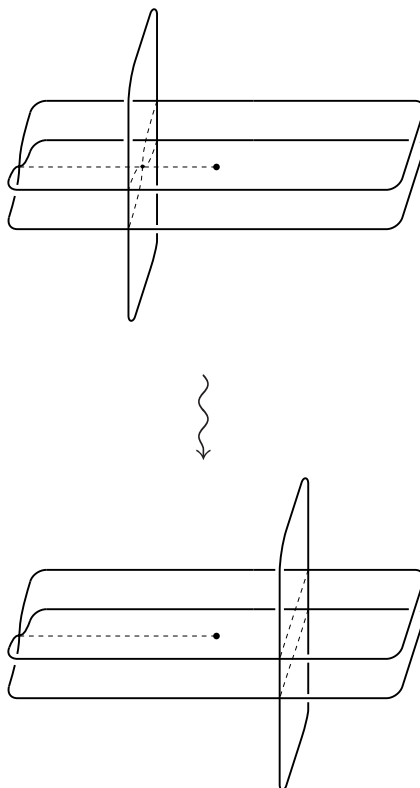
La restrizione a F della proiezione su S^2 è un rivestimento semplice ramificato su un insieme discreto di punti. La formula di Hurwitz (vedi 2.2) ci dice che questi punti sono in numero pari: diciamo $2g$.

Proiettiamo F su $S^2 \times I$. La proiezione viene fatta in modo che $f_2 \circ \pi \circ i$ sia ancora un rivestimento ramificato di S^2 (vedi diagramma).

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & S^2 \times B^2 \\ \downarrow p & & \downarrow \pi \\ S^2 & \xleftarrow{f_2} & S^2 \times I \end{array}$$

Si otterranno in questo modo delle autointersezioni della superficie di co-dimensione 1. Saranno punti tripli isolati, cappi chiusi di punti doppi e archi (ancora di punti doppi) colleganti 2 punti della ramificazione di F . Per prima cosa elimineremo i punti tripli. Se gli archi non ne contengono, saranno sicuramente archi colleganti 2 punti con monodromie uguali.

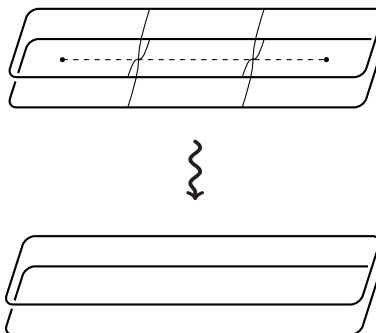
Se un arco interseca altri fogli (formando punti tripli), sposteremo i fogli tramite isotopia, in modo da eliminare queste intersezioni.



Si ottiene così una superficie con g archi di punti doppi senza punti tripli. Si prendano g intorni disgiunti $\{U_i\}_{i=1,\dots,g}$; uno per ogni arco. La superficie di ramificazione incontra il bordo di ogni intorno in un link banale con due componenti.

Possiamo effettuare ora una *chirurgia* sostituendo l'intorno con un B^4 attraversato da 2 copie lisce di B^2 . Effettuare questa chirurgia è equivalente a costruire un cobordismo tra l'intorno dell'arco di ramificazione e un B^4 con 2 copie lisce di B^2 .

A questo punto, la nostra superficie F ($\cong F \times \{0\}$) è cobordante a tante copie topologicamente disgiunte di S^2 . La superficie così ottenuta tramite co-



bordismo, viene ora riportata in S^4 , dove possiamo spostare, tramite isotopia, ogni copia di S^2 in modo che ognuna abbia quarta coordinata diversa dalle altre.

E' facile adesso riempire le sfere e spingerne l'interno ($\text{Int}B^3$) all'interno di B^5 ($\text{Int}B^5$), lasciando le copie di S^2 sul bordo di B^5 ($\text{BdB}^5 = S^4$).

Infine la varietà W^5 si costruisce come spazio totale di B^5 con insieme di ramificazione l'unione disgiunta di copie banali di B^3 in B^5 . □

4.3 Considerazioni conclusive

La parte necessaria del teorema presenta notevoli difficoltà. Sia dato $M^4 = \text{Bd}W^5$, con W^5 varietà orientata con bordo. Si può assumere che W^5 sia unione solo di 0-, 1- e 2-manici (vedi [20]). W^5 sarà allora il rivestimento di un B^5 (si può vederlo con tecniche analoghe a quelle usate in [27]) ramificato su una 3-varietà G immersa trasversalmente. Quando $\text{Bd } G = \emptyset$ l'asserto segue ovviamente: assumiamo $\text{Bd } G \neq \emptyset$.

Se G è orientabile la dimostrazione è banale. Infatti $\text{Bd } G = F$ è una 2-

varietà immersa in $\text{Bd } B^5(S^4)$ poichè G è posta trasversalmente. Ma le uniche 2-varietà che sono bordo sono quelle *orientabili* ($\Omega_2 \cong \mathbb{Z}_2$), quindi $p|_{\text{Bd } W^5} : M^4 \longrightarrow S^4$ è un rivestimento di S^4 ramificato su F , superficie orientabile.

Per un generico insieme di ramificazione queste considerazioni chiaramente non valgono. Rimane aperto allora il seguente

Problema: Data $M^4 = \text{Bd } W^5$, esiste un rivestimento $p : M^4 \longrightarrow S^4$ ramificato su una superficie orientabile ?

Bibliografia

- [1] J. W. Alexander, *Note on Riemann Spaces*, Bull. AMS **26** (1920), pg. 370-373.
- [2] I. Bernstein & A. L. Edmonds, *The Degree of a Branch Set of a Branched Covering*, Inventiones Math. **45** (1978), pg. 213-220.
- [3] J. S. Carter & M. Saito, *Knotted surfaces and their diagrams*, Mathematical Surveys and Monographs **55** (1998), AMS.
- [4] J. S. Carter & M. Saito, *Knot diagrams and braids theories in dimension 4*, Pitman Res. Notes Math. Ser. **333** (1995), AMS.
- [5] A. Diamantini & G. Tomassoni, *Topologia Differenziabile*, appunti del corso, Università di Camerino (2000).
- [6] C. A. Giller, *Towards a classical Knot Theory for Surfaces in R^4* , Illinois Journal of Mathematics **26** (1982), no. 4 pg. 591-631, Illinois University Press.
- [7] P. M. Gilmer, *Configurations of Surfaces in 4-Manifolds*, Trans. AMS **264**, (1981) no. 2, pg. 353-380.

-
- [8] R. E. Gompf & A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20** (1991), AMS.
- [9] C. Mc A. Gordon, *On the G-signature theorem in dimension 4*, Progress in Mathematics **62** (1986), Birkhäuser.
- [10] H. M. Hilden, *Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3* , Bull. AMS **80** (1974), pg. 1243-1244.
- [11] H. M. Hilden, *3-fold branched covering of S^3* , Amer. J. Soc. **98** (1976), pg. 989-997.
- [12] H. M. Hilden & R. D. Little, *Cobordism of branched coverings spaces*, Pacific Journal of Mathematics **87** (1980), no. 2 pg. 325-345.
- [13] H. M. Hilden, M. T. Lozano & J. M. Montesinos, *All 3-manifolds are pullbacks of a branched covering S^3 to S^3* , Trans. AMS **279** (1983), pg. 729-735.
- [14] M. W. Hirsch, *Immersions of manifolds*, Trans. AMS (1959), no. 93 pg. 242-276.
- [15] U. Hirsch, *Über offene Abbildungen auf die 3 – Sphäre*, Math. Z. **140** (1974), pg. 203-230.
- [16] W. C. Hsiang & R. H. Szczarba, *On embedding surfaces in 4-manifolds*, Proc. Simp. Pure Math. **XXII** (1971), pg. 97-103.
- [17] M. Iori & R. Piergallini, *4-manifolds as covers of S^4 branched over smooth surfaces*, preprint.

-
- [18] S. Kamada, *Non orientable surface in 4-space*, Osaka J. Math. **26** (1989), no.2 pg. 367-385.
- [19] S.Kamada, *2-dimensional braids and chart descriptions*, Topics in Knot Theory (1993) pg. 277-287, Kluwer Acad. Publications.
- [20] R. Kirby, *The Topology of 4-Manifolds*, Lectures Notes in Mathematics **1374** (1989), Springer-Verlag.
- [21] A. Kosinsky, *Differential manifolds*, Pure and Appl. Mathematics **138** (1993), Academic Press.
- [22] W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Springer-Verlag (1991).
- [23] W. S. Massey, *Proof of a Conjecture of Whitney*, Pacific Journal of Math. **31** (1969).
- [24] J. Milnor, *Topology from the differential viewpoint*, Based on notes of D. W. Weaver, The university press of Virginia 1965.
- [25] J. Milnor & J. D. Stasheff, *Charateristic Classes*, Annals of Math. Studies **76**, Princeton Un. Press (1974).
- [26] J. M. Montesinos, *Lectures on branched coverings*, Atti del Convegno di Studio sulla Geometria delle Varietà DIFF (1985), pg. 127-167.
- [27] J. M. Montesinos, *4-manifolds, 3-fold covering spaces and ribbons*, Trans. AMS **245** (1978), pg. 453-467.
- [28] J. M. Montesinos, *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched covering of S^3* , Bull. AMS **80** (1974), pg. 845-846.

-
- [29] J. M. Montesinos, *3-manifolds as 3-fold branched covering of S^3* , Quart. J. Math. Oxford **27** (1976), pg. 85-94.
- [30] R. Piergallini, *Covering Moves*, Trans. AMS **325** (1991), pg. 903-920.
- [31] R. Piergallini, *Manifolds as branched covers of spheres*, Proceedings of the Eleventh International Conference of Topology (Trieste, 1993). Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **25** (1994), no. 1-2 pg. 419-439.
- [32] R. Piergallini, *4-manifolds as 4-fold branched covers of S^4* , Topology **34** (1995), no. 3 pg. 497-508.
- [33] V. V. Prassolov & A. B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*, Mathematical Monographs **154** (1991), AMS.
- [34] P. Shanahan, *The Atiyah-Singer Index Theorem*, Lectures Notes in Mathematics **638** (1978), Springer-Verlag.
- [35] W. P. Thurston, *3-Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1, Princeton University Press (1997).
- [36] J. W. Vick, *Homology theory*, Pure and Appl. Mathematics **53** (1973), Academic Press.
- [37] O. Ya. Viro, *Signature of branched covering*, Trans. Mat. Zametki **36** (1984), no. 4 pg. 549-557.
- [38] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics **61** (1978), Springer-Verlag.