

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

*Corso di Laurea in Matematica e Applicazioni
(Classe LM-40)*



**Diagrammi rettangolari di nodi
e polinomio di Kauffman**

Tesi di Laurea sperimentale in Geometria (S.S.D. MAT 03)

Relatore

Prof. Riccardo Piergallini

Laureando

Giacomo Cerrani

ANNO ACCADEMICO 2020-2021

Indice

Introduzione	3
1 Link e diagrammi	6
1.1 Nodi e link	6
1.2 Diagrammi e invarianti elementari	7
2 Polinomi di Jones-Kauffman	10
2.1 Il polinomio di Jones e le parentesi di Kauffman	10
2.2 Il polinomio di Kauffman	14
3 Presentazioni per archi	16
3.1 Presentazioni per archi e diagrammi rettangolari	16
3.2 Movimenti elementari	19
3.3 Movimenti generalizzati	23
3.4 Semplificazione monotona	25
3.5 Algoritmo per la decomposizione di un link	28
3.6 Numero di archi e operazione fra link	29
4 Minimalità delle rappresentazioni	31
4.1 Congettura di Tait	31
4.2 Presentazioni per archi minimali	32
4.2.1 Polinomio di Kauffman e movimenti elementari	33
4.2.2 Minorazione del numero di archi	36
4.3 Il polinomio di Kauffman e il massimo numero di Thurston-Bennequin	49

Introduzione

In questo lavoro studiamo una particolare classe di rappresentazioni di nodi e link, i cosiddetti diagrammi rettangolari, conosciuti anche come presentazioni per archi. In particolare vedremo una soluzione del problema della decomposizione di un link nell'unione separata e nella somma connessa di nodi e link primi. Inoltre dimostreremo delle relazioni tra il polinomio di Kauffman $F_K(a, z)$ e alcuni invarianti legati a queste rappresentazioni.

Un *diagramma rettangolare* $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link K è un diagramma composto da un numero finito di tratti orizzontali e verticali non collineari tale che in ogni incrocio il tratto verticale passa sopra quello orizzontale.

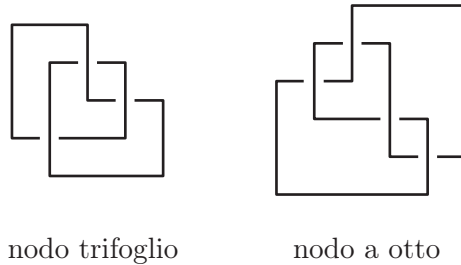


Figura 1: Diagrammi rettangolari

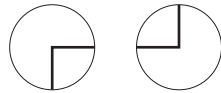
Indichiamo con $\alpha(D)$ il numero di tratti verticali o orizzontali del diagramma D . Dynnikov [6] scopre che definendo una opportuna *funzione complessità* $c(D)$, il *problema della decomposizione* di un link è risolvibile attraverso una semplificazione monotona dei suoi diagrammi rettangolari. Più precisamente abbiamo il seguente

Teorema 1. *Sia D un diagramma rettangolare di un link K . Allora esiste una sequenza di diagrammi rettangolari $D = D_0, D_1, \dots, D_n$, della classe di isotopia di K , di complessità $c(D_i)$ strettamente decrescente, tale che la decomposizione del link K è deducibile dal diagramma D_n .*

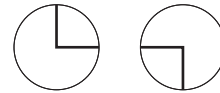
Vedremo poi che sulla base di questo risultato è possibile definire un algoritmo, di complessità esponenziale, per la decomposizione di un link K nei suoi fattori primi.

Sia K un link. Indichiamo con $\alpha(K)$ e $c(K)$ rispettivamente il minor numero di tratti verticali e il minor numero di incroci necessari per rappresentare K . Bae e Park [1], utilizzando alcuni dei risultati ottenuti da Morton e Beltrami [11], dimostrano una congettura proposta da Cromwell e Nutt [5], la quale afferma che *per un link primo K si ha che $\alpha(K) \leq c(K) + 2$. Inoltre la disuguaglianza è stretta se e solo se K non è alternante*. In [11] Morton e Beltrami studiano un particolare tipo di diagrammi ottenuti dalle presentazioni per archi e dimostrano un'interessante relazione tra l'indice $\alpha(K)$ e l'ampiezza nella variabile a , $B_a(F_K(a, z))$, del polinomio di Kauffman $F_K(a, z)$: $B_a(F_K(a, z)) + 2 \leq \alpha(K)$.

In questa tesi daremo una dimostrazione alternativa rispetto a quella proposta in [11], infatti proveremo delle stime più precise del massimo e del minimo esponente del polinomio $F_K(a, z)$. Nello specifico, indichiamo con $n_+(D)$ e $n_-(D)$, rispettivamente il numero di *attacchi positivi* e *negativi* di un diagramma rettangolare D .



Attacchi positivi



Attacchi negativi

Allora mostreremo che

Teorema 2. *Siano M_K e m_K il massimo e il minimo esponente nella variabile a del polinomio $F_K(a, z)$. Per ogni diagramma D del link K abbiamo che*

$$M_K \leq -w(D) + \frac{n_+(D)}{2} - 1 \quad m_K \geq -w(D) - \frac{n_-(D)}{2} + 1$$

dove $w(D)$ è l'indice di arricciamento del diagramma D .

Un'altra conseguenza del Teorema 2 riguarda il cosiddetto *massimo numero di Thurston-Bennequin* $\bar{tb}(K)$, definito come il massimo valore che assume l'espressione $w(D) - \frac{n_+(D)}{2}$ sull'insieme dei diagrammi rettangolari di K . Proveremo che per l'invariante $\bar{tb}(K)$ sono valide le seguenti stime.

$$\begin{aligned} -m_K - \alpha(K) + 1 &\leq \bar{tb}(K) \leq -M_K - 1, \\ \bar{tb}(K) + \bar{tb}(\bar{K}) &\leq -B_a(F_K(a, z)) - 2. \end{aligned}$$

Matsuda [10] mostra che ogni link K soddisfa l'equazione $-\alpha(K) \leq \bar{tb}(K) + \bar{tb}(\bar{K})$. Successivamente Greene congettura che per ogni nodo K si ha che $-\alpha(K) = \bar{tb}(K) + \bar{tb}(\bar{K})$. Per ora non sono stati trovati controesempi tra i nodi con un numero di incroci $c(K) \leq 11$ [12]. Noi mostreremo, come notato da Greene, che l'uguaglianza è soddisfatta per tutti i link non separabili alternanti.

Nei primi due capitoli richiameremo alcune nozioni della Teoria dei nodi. In particolare, nel Capitolo 1 introdurremo i diagrammi di nodi e link e alcuni invarianti elementari, infine enunceremo il cosiddetto Teorema di Reidemeister. Nel Capitolo 2 presenteremo due invarianti polinomiali, ovvero il polinomio di Jones $V_K(x)$, secondo la definizione fornita da L.H. Kauffman e il polinomio di Kauffman $F_K(a, z)$. Vedremo alcune proprietà di questi due invarianti, tra cui il contributo del polinomio di Jones nella dimostrazione della *congettura di Tait*. Nel Capitolo 3 introdurremo le presentazioni per archi e i diagrammi rettangolari di un link, definiremo una classe di mosse sulle presentazioni per archi, dette *elementari* e dimostreremo un risultato per i diagrammi rettangolari analogo al Teorema di Reidemeister. Infine accenneremo una dimostrazione del Teorema 1 e qualche sua applicazione, tra cui la costruzione di un algoritmo per la decomposizione di un link. Nel Capitolo 4 daremo una dimostrazione del Teorema 2 e vedremo una sua applicazione relativa al massimo numero di Thurston-Bennequin.

Per la stesura dei Capitoli 1 e 2 abbiamo fatto riferimento a [8, 9, 15]. I contenuti del Capitolo 3 sono una rielaborazione di [4, 6]. Mentre per quanto riguarda alcuni risultati legati all'invariante di Thurston-Bennequin ci siamo basati su [10, 12].

Capitolo 1

Link e diagrammi

1.1 Nodi e link

Definizione 1.1.1. Un *nodo* K è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 omeomorfo a un cerchio tale che ammette un intorno tubolare topologico $T \subset \mathbb{R}^3$, cioè esiste un omeomorfismo $K \times B^2 \rightarrow T \subset \mathbb{R}^3$, dove $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ è la boccia chiusa di centro l'origine e raggio unitario, tale che $(p, 0) \mapsto p, \forall p \in K$. Un *link* K è una unione disgiunta di un numero finito di nodi $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$. I nodi K_i sono detti *componenti* del link K . Indichiamo con $n(K)$ il numero di componenti del link K . Un nodo è un link con una sola componente.

Dato un link K indichiamo con \bar{K} il link $r(K)$, dove l'applicazione $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la riflessione rispetto all'origine dello spazio \mathbb{R}^3 . Diremo che un link K è *orientato* se su ogni sua componente è definita una orientazione e indichiamo con $-K$ il link ottenuto invertendo l'orientazione di ogni componente di K .

Una *isotopia* $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una omotopia dello spazio \mathbb{R}^3 tale che l'applicazione $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $h_t := H|_{\mathbb{R}^3 \times \{t\}}$ è un omeomorfismo $\forall t \in [0, 1]$ e h_0 coincide con l'applicazione identità. Introduciamo ora una relazione di equivalenza tra link.

Definizione 1.1.2. Due link (orientati) K e K' sono detti *isotopi* $K \cong K'$, se esiste una isotopia H di \mathbb{R}^3 tale che $h_1(K) = K'$ (e $h_1(K)$ e K' hanno la stessa orientazione).

Le classi di equivalenza determinate da \cong sono dette *classi di isotopia*. D'ora in avanti identificheremo link fra loro isotopi.

Un link $K \subset \mathbb{R}^3$ è detto *banale* se K è isotopo all'unione disgiunta di $n(K)$ copie di S^1 contenute in un piano, *simmetrico* se $K \cong \overline{K}$ e *invertibile* se $K \cong -K$.

Presentiamo alcune particolari classi di link, i cosiddetti link poligonali e lisci. Un *nodo poligonale* $K \subset \mathbb{R}^3$ è una curva spezzata chiusa e semplice composta da un numero finito di segmenti. Un *nodo liscio* $K \subset \mathbb{R}^3$ è una curva chiusa differenziabile e regolare. Quindi un link è detto *poligonale* o *liscio* se ogni componente è un nodo poligonale o liscio rispettivamente. Dato un link K , si dimostra che a meno di isotopie arbitrariamente piccole possiamo assumere che K sia liscio o poligonale.

Introduciamo ora le operazioni fra link. Siano $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ due link. Definiamo l'*unione separata* $K_1 \sqcup K_2$ il link $K'_1 \cup K'_2$ con $K'_1 \cong K_1$ e $K'_2 \cong K_2$ separati da un piano. Viceversa se $K \cong K_1 \sqcup K_2$ allora diremo che K è *separabile*. Siano K_1 e K_2 due nodi. Definiamo la *somma connessa* $K_1 \# K_2$ il nodo $Cl(K'_1 \cup K'_2 \setminus \alpha)$ dove $K'_1 \cong K_1$ e $K'_2 \cong K_2$ separati da un piano eccetto un arco $\alpha = K_1 \cap K_2$. Siano K un link e S una 2-sfera che interseca trasversalmente K in esattamente due punti. Siano poi $\alpha \subset S$ un qualsiasi arco che connette i punti $K \cap S$ e U_1, U_2 le due componenti di $\mathbb{R}^3 \setminus S$. Definiamo i link $K_i = (K \cap U_i) \cup \alpha$, $\forall i = 1, 2$ e diremo che il link K è la *somma connessa* $K_1 \# K_2$ dei link K_1 e K_2 . Un link K non banale e non separabile è detto *composto* se $K \cong K_1 \# K_2$ con K_1, K_2 non banali, altrimenti sarà detto *primo*.

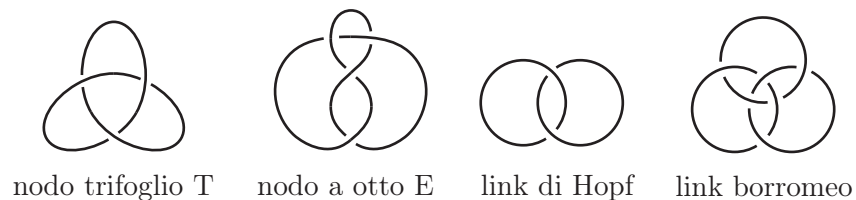
1.2 Diagrammi e invarianti elementari

In questa sezione vedremo come rappresentare un link $K \subset \mathbb{R}^3$ nel piano e introdurremo alcuni invarianti isotopici legati a queste rappresentazioni.

Diremo che un link K è *verticalmente ammissibile* se la proiezione canonica $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ si restringe a un'applicazione $\pi|_K : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ che è iniettiva tranne per un numero finito di punti doppi trasversali di $\pi(K)$. Si dimostra che a meno di isotopie arbitrariamente piccole ogni link K è verticalmente ammissibile.

Definizione 1.2.1. Sia $K \subset \mathbb{R}^3$ un link verticalmente ammissibile. Un diagramma $D \subset \mathbb{R}^2$ associato al link K è ottenuto sostituendo ogni punto doppio di $\pi(K)$ con un *incrocio* ottenuto sconnettendo il tratto che passa al di sotto.

Osservare che ogni digramma $D \subset \mathbb{R}^2$ ha un numero finito di incroci. Indichiamo con $c(D)$ il numero degli incroci del diagramma D .



Vediamo ora in che modo sono legati due diagrammi della stessa classe di isotopia. A tale scopo introduciamo i cosiddetti *movimenti di Reidemeister*. Queste trasformazioni modificano la struttura di un diagramma solo in una certa regione come mostrato nelle Figure 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3.

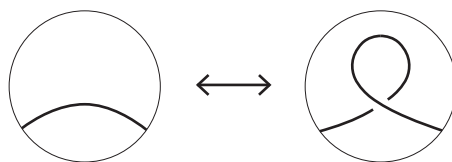


Figura 1.2.1: 1° movimento di Reidemeister

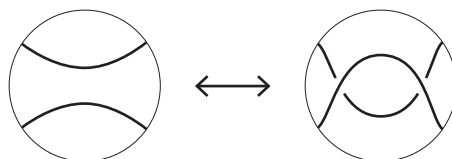


Figura 1.2.2: 2° movimento di Reidemeister

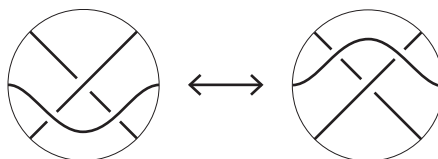


Figura 1.2.3: 3° movimento di Reidemeister

Teorema 1.2.2 (Teorema di Reidemeister). *Due diagrammi della stessa classe di isotopia sono legati da una sequenza finita di movimenti di Reidemeister e isotopie del piano (che preservano la struttura del diagramma).*

Dimostrazione. Si veda [15].

Introduciamo un altro indice della complessità di un diagramma. Osservare che dato un diagramma D , tramite l'inversione di alcuni incroci è possibile ottenere un diagramma del link banale. Infatti sia D un diagramma del link $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ e $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow K_i$ una parametrizzazione della componente K_i , $\forall i = 1, \dots, n$. Invertendo una serie di incroci si ottiene un diagramma D' , detto *diagramma ascendente*, tale che nell'incrocio formato dai punti $p = \alpha_i(s)$ e $q = \alpha_j(t)$, p passa sotto q se e solo se $(i, s) < (j, t)$ rispetto l'ordine lessico grafico. Si verifica facilmente che D' è il diagramma del link banale. Quindi dato un diagramma D , indichiamo con $u(D)$ il minimo numero di incroci da invertire per ottenere un diagramma del link banale con $n(K)$ componenti. Agli indici $u(D)$ e $c(D)$ sono naturalmente associati due invarianti isotopici.

Definizione 1.2.3. Sia K un link. Definiamo il *numero di incroci* $c(K)$ e l'*indice di banalizzazione* (o snodamento) $u(K)$ del link K come

$$\begin{aligned} c(K) &:= \min\{c(D) \mid D \text{ diagramma di } K\}, \\ u(K) &:= \min\{u(D) \mid D \text{ diagramma di } K\}. \end{aligned}$$

Chiaramente abbiamo che $c(K) = u(K) = 0$ se e solo se K è banale. Soddisfano la proprietà additiva rispetto alla unione separata: $c(K_1 \sqcup K_2) = c(K_1) + c(K_2)$ e $u(K_1 \sqcup K_2) = u(K_1) + u(K_2)$. Mentre per quanto riguarda la somma connessa, a oggi è dimostrata la validità solo della proprietà subadditiva: $c(K_1 \# K_2) \leq c(K_1) + c(K_2)$ e $u(K_1 \# K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$. Dalla definizione degli indici $c(K)$ e $u(K)$ è evidente che questi invarianti elementari non sono effettivamente calcolabili in generale.

Capitolo 2

Polinomi di Jones-Kauffman

2.1 Il polinomio di Jones e le parentesi di Kauffman

In questa sezione introdurremo brevemente un invariante polinomiale scoperto dal matematico Vaughan F.R. Jones. Definiremo però il polinomio di Jones in un modo alternativo, dovuto a Louis H. Kauffman, ovvero attraverso le cosiddette parentesi di Kauffman. Questo invariante polinomiale è costruito attraverso i diagrammi dei link e vedremo che tale costruzione non dipende dal diagramma scelto.

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un diagramma non orientato. Uno *stato* s di D è una curva chiusa semplice in \mathbb{R}^2 ottenuta risolvendo ogni incrocio c_i in uno dei modi illustrati in Figura 2.1.1.

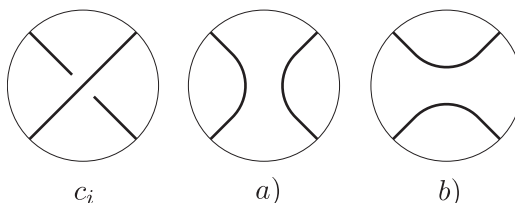


Figura 2.1.1: risoluzione positiva $a)$ e negativa $b)$

Indichiamo con $S(D)$ l'insieme degli stati s del diagramma D . Poniamo $\sigma_i(s)$ uguale a $+1$ o -1 se l'incrocio c_i è risolto positivamente o negativamente nello stato s . Definiamo $\sigma(s) := \sigma_1(s) + \sigma_2(s) + \dots + \sigma_{c(D)}$ e $\rho(s)$ il numero di componenti dello stato s .

Definizione 2.1.1. Le *parentesi di Kauffman* rappresentano una funzione che associa a ogni diagramma non orientato D un polinomio di Laurent

$\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ definito come

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in S(D)} t^{\sigma(s)} (-t^2 - t^{-2})^{\rho(s)-1}.$$

Nota 2.1.2. Fissato un qualsiasi incrocio c di un diagramma non orientato D , indichiamo con D_0 e D_∞ i diagrammi ottenuti risolvendo positivamente o negativamente l'incrocio c .

Si dimostra che la parentesi di Kauffman è caratterizzata da

- (i) $\langle S^1 \rangle = 1$,
- (ii) $\langle D \sqcup S^1 \rangle = (-t^2 - t^{-2}) \langle D \rangle$,
- (iii) $\langle D \rangle = t \langle D_0 \rangle + t^{-1} \langle D_\infty \rangle$,

dove il diagramma $D \sqcup S^1$ consiste nell'unione disgiunta dei diagrammi D e S^1 .

Proposizione 2.1.3. *Le parentesi di Kauffman sono un invariante per isotopia regolare, cioè invariante rispetto al 2° e 3° movimento di Reidemeister e se D e D' sono due diagrammi che differiscono per il 1° movimento di Reidemeister come mostrato in Figura 2.1.2 abbiamo che $\langle D' \rangle = -t^3 \langle D \rangle$.*

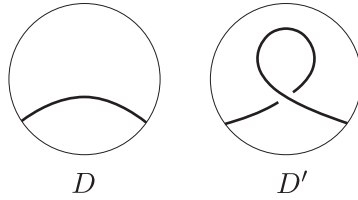


Figura 2.1.2

Dimostrazione. Per quanto riguarda il 1° movimento di Reidemister consideriamo i diagrammi D_0 e D_∞ ottenuti risolvendo l'incrocio del diagramma D' mostrato in Figura 2.1.2. Si vede facilmente che a meno di isotopie del piano i diagrammi D_0 e D_∞ coincidono con $D \sqcup S^1$ e D rispettivamente, quindi $\langle D_0 \rangle = \langle D \sqcup S^1 \rangle$ e $\langle D_\infty \rangle = \langle D \rangle$. Combinando le equazioni (ii) e (iii) otteniamo che

$$\langle D' \rangle = (-t^3 - t^{-1}) \langle D \rangle + t^{-1} \langle D \rangle = -t^3 \langle D \rangle.$$

Vediamo ora il 2° movimento di Reidemeister. Consideriamo i diagrammi D_0 e D_∞ ottenuti risolvendo l'incrocio c del diagramma D mostrato in Figura

2.1.3. Indichiamo poi con $D_{0,0}$ e $D_{0,\infty}$ i diagrammi ottenuti risolvendo positivamente e negativamente l'incrocio del diagramma D_0 (vedi Figura 2.1.3). Abbiamo che

$$\langle D_0 \rangle = t \langle D_{0,0} \rangle + t^{-1} \langle D_{0,\infty} \rangle. \quad (2.1.1)$$

Mentre per quanto dimostrato per il 1° movimento di Reidemeister segue che

$$\langle D_\infty \rangle = -t^3 \langle D_{0,0} \rangle. \quad (2.1.2)$$

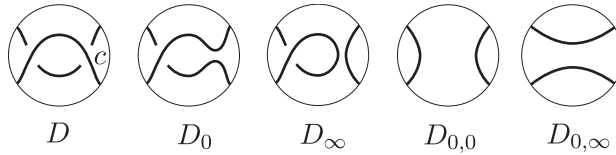


Figura 2.1.3

Infine combinando le equazioni 2.1.1 e 2.1.2 abbiamo che

$$\langle D \rangle = t^2 \langle D_{0,0} \rangle + \langle D_{0,\infty} \rangle - t^2 \langle D_{0,0} \rangle = \langle D_{0,\infty} \rangle.$$

Finalmente per il 3° movimento di Reidemeister applichiamo l'equazione (iii) all'incrocio c dei diagrammi D e D' (vedi Figura 2.1.4). Indichiamo con D_0, D'_0 e D_∞, D'_∞ i diagrammi ottenuti da D, D' risolvendo positivamente e negativamente l'incrocio c .

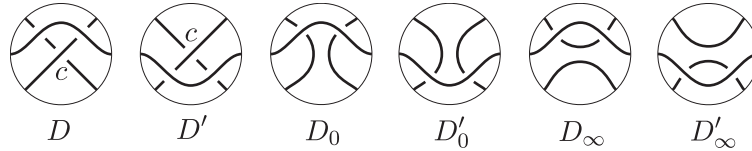


Figura 2.1.4

È sufficiente osservare che i diagrammi D_0 e D'_0 differiscono per una isotopia del piano e i diagrammi D_∞ e D'_∞ differiscono per una coppia di movimenti di Reidemeister di tipo 2. Perciò per quanto visto sopra si ha che $\langle D'_0 \rangle = \langle D_0 \rangle$ e $\langle D'_\infty \rangle = \langle D_\infty \rangle$. Da cui segue che $\langle D' \rangle = \langle D \rangle$. □

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un diagramma orientato. Definiamo l'*indice di arricciamento* $w(D)$ come il numero di incroci con segno secondo la convenzione mostrata in Figura 2.1.5.

Una semplice verifica mostra la seguente

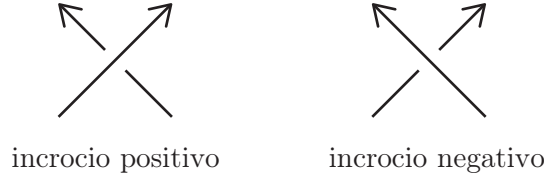


Figura 2.1.5

Proposizione 2.1.4. *Sia D un diagramma orientato. Il polinomio di Laurent*

$$P_D(t) = (-t)^{-3w(D)} \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$$

è invariante rispetto ai movimenti di Reidemeister.

Possiamo quindi definire il seguente invariante isotopico.

Definizione 2.1.5. Siano K un link orientato e D un diagramma di K . Il polinomio di Jones V_K di K è definito come

$$V_K(x) = P_D(x^{-\frac{1}{4}}) \in \mathbb{Z}[x^{-\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}}].$$

Il polinomio di Jones soddisfa le seguenti proprietà:

- se K è il link banale allora $V_K(x) = (-x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^{n(K)-1}$.
- $V_K(x) = V_{-K}(x)$.
- $V_{\bar{K}}(x) = V_K(x^{-1})$.
- se $K = K_1 \sqcup K_2$ allora $V_K = (-x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})V_{K_1}(x)V_{K_2}(x)$.
- se $K = K_1 \# K_2$ allora $V_K = V_{K_1}(x)V_{K_2}(x)$.

Proposizione 2.1.6. *Sia K un link orientato. Il polinomio di Jones $V_K(x)$ associato a K è univocamente determinato da*

- (i) $V_{S^1}(x) = 1$,
- (ii) $x^{-1}V_{K_+}(x) - xV_{K_-}(x) + (x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})V_{K_0}(x) = 0$.

Dove i link K_+ , K_- e K_0 ammettono diagrammi identici tranne in un certa regione come indicato nella Figura 2.1.6. L'equazione (ii) è detta equazione caratteristica del polinomio di Kauffman.

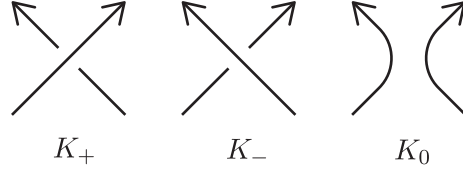


Figura 2.1.6

Dimostrazione. Dalla definizione si verifica facilmente che $V_K(x)$ soddisfa gli assiomi (i) e (ii). Mostriamo ora che gli assiomi determinano univocamente un invariante polinomiale di link orientati K . Procediamo per doppia induzione, rispetto l'ordine lessico grafico, sulla coppia di indici $(c(D), u(D))$ di un diagramma D di K .

Base induzione: $(0, 0)$ allora K è il link banale. Si osservi che dall'equazione caratteristica segue che $V_{K \sqcup S^1}(x) = (-x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})V_K(x)$. Perciò, combinando la precedente osservazione con (i), per un link banale K abbiamo che $V_K(x) = (-x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^{n(K)-1}$.

Passo induttivo: $(c(D), u(D)) > (0, 0)$. Consideriamo un incrocio c da invertire per banalizzare il diagramma D . Indichiamo con K' e K_0 i link rappresentati dai diagrammi D' e D_0 , ottenuti da D rispettivamente invertendo o risolvendo l'incrocio c . Osserviamo che $c(D') = c(D)$, $u(D') = u(D_0)$ e $c(D_0) = c(D) - 1$. Per ipotesi induttiva i polinomi $V_{K'}$ e V_{K_0} sono determinati dagli assiomi (i) e (ii). Infine il polinomio V_K è calcolabile da $V_{K'}$ e V_{K_0} attraverso l'equazione caratteristica.

□

2.2 Il polinomio di Kauffman

Sia D un diagramma non orientato. Indichiamo con $L_D(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ l'invariante per isotopia regolare univocamente determinato da

- (i) $L_{S^1} = 1$,
- (ii) $L_{D'} = aL_D$,
- (iii) $L_{D''} = a^{-1}L_D$,
- (iv) $L_{D_+} + L_{D_-} = z(L_{D_0} + L_{D_\infty})$.

Dove D' D'' sono ottenuti da D tramite il 1° movimento di Reidemeister e il simmetrico (vedi Figura 2.2.1). I diagrammi D_+ D_- , D_0 , D_∞ sono identici tranne in un certa regione come mostrato nella Figura 2.2.2.

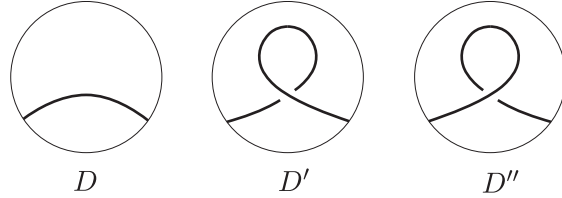


Figura 2.2.1

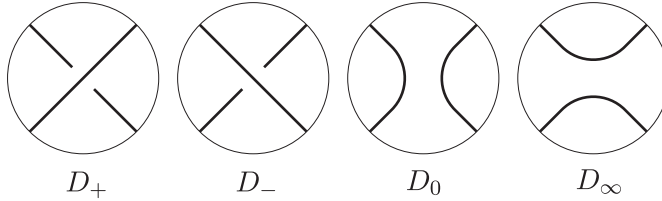


Figura 2.2.2

Una semplice verifica mostra la seguente

Proposizione 2.2.1. *Siano K un link, D un diagramma di K e $w(D)$ il numero di arricciamento di D . È ben definito a meno di isotopia il cosiddetto polinomio di Kauffman del link K*

$$F_K(a, z) = a^{-w(D)} L_D(a, z).$$

Si dimostra che:

- se K è il link banale allora $F_K(a, z) = (z^{-1}(a + a^{-1}) - 1)^{n(K)-1}$.
- $F_K(a, z) = F_{-K}(a, z)$.
- $F_{\bar{K}}(a, z) = F_K(a^{-1}, z)$.
- $F_{K_1 \sqcup K_2} = (z^{-1}(a + a^{-1}) - 1) F_{K_1} F_{K_2}$.
- $F_{K_1 \# K_2} = F_{K_1} F_{K_2}$.

Il polinomio di Kauffman $F_K(a, z)$ è una generalizzazione del polinomio di Jones $V_K(x)$. Infatti si ha

$$V_K(x) = F_K(x^{-\frac{3}{4}}, -x^{-\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}).$$

Capitolo 3

Presentazioni per archi

3.1 Presentazioni per archi e diagrammi rettangolari

Consideriamo la 3-sfera

$$S^1 * S^1 = \{(\varphi, \theta, \tau) \mid \varphi, \theta \in S^1, \tau \in [0, 1]\} / \sim$$

con $(\varphi, \theta_1, 0) \sim (\varphi, \theta_2, 0)$ e $(\varphi_1, \theta, 1) \sim (\varphi_2, \theta, 1)$. Indichiamo con S_φ^1 , detto *cerchio legante*, e S_θ^1 i cerchi definiti rispettivamente dalle equazioni $\tau = 0$ e $\tau = 1$ e con \mathcal{D}_t il disco definito da $\tau > 0 \wedge \theta = t$, detto *pagina*. Dato un punto $p \in S^3 \setminus (S_\varphi^1 \cup S_\theta^1)$ con $\varphi(p)$ e $\theta(p)$ indichiamo le proiezioni di p su S_φ^1 e S_θ^1 . Identificando S^3 con la compattificazione dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, il cerchio legante è rappresentato da $\{\text{asse } z\} \cup \infty$ e utilizzando coordinate cilindriche (ρ, θ, z) , le pagine sono costituite dai semipiani $\mathcal{D}_t = \{\theta = t \wedge \rho \geq 0\}$.

Notazione. Siano $s_1, s_2 \in S^1$. Indichiamo con $(s_1, s_2) \subset S^1$ l'insieme dei punti di S^1 individuati percorrendo la circonferenza da s_1 a s_2 in senso antiorario.

Definizione 3.1.1. Dato un link K , una *presentazione per archi* di K è un link $L \cong K$ in S^3 tale che l'insieme $\{L \cap S_\varphi^1\}$ detto insieme dei *vertici* di L è finito e ogni pagina \mathcal{D}_θ contiene al più un arco di L . Ogni arco ha come estremi due vertici distinti in S_φ^1 .

Definizione 3.1.2. Un diagramma $D \subset \mathbb{R}^2$ di un link K è detto *rettangolare* se è composto da un insieme finito di tratti verticali e orizzontali non collineari tale che in ogni incrocio il tratto verticale passa sopra quello orizzontale.

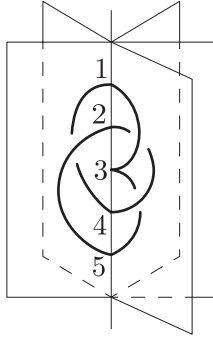


Figura 3.1.1: Presentazione per archi del nodo trifoglio

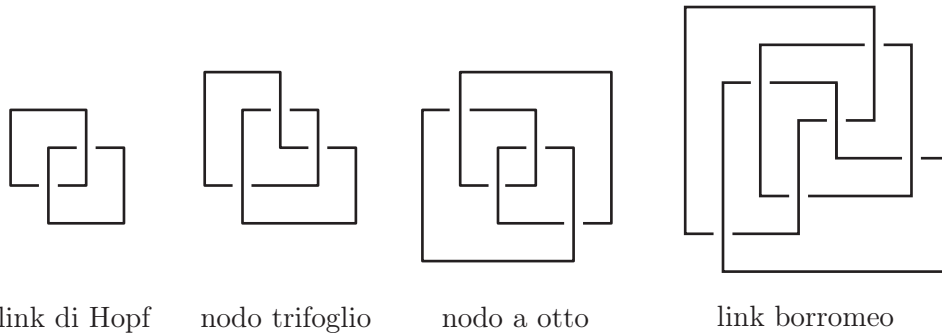


Figura 3.1.2: Esempi di diagrammi rettangolari

Vediamo ora che esiste una naturale corrispondenza biunivoca tra \mathcal{L} e l'insieme dei diagrammi rettangolari in $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ che preserva la classe di isotopia delle presentazioni.

Proposizione 3.1.3. *Siano $L \subset S^3$ una presentazione per archi e $D \subset [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ un diagramma rettangolare tali che: un arco $\alpha \subset \mathcal{D}_\theta$ con estremi in $\varphi_1, \varphi_2 \in S_\varphi^1$ è un arco di L se e solo se D ha un tratto verticale di estremi (θ, φ_1) e (θ, φ_2) . Allora L e D appartengono alla stessa classe di isotopia.*

Dimostrazione. Consideriamo un intorno tubolare $T \subset S^3$ di S_φ^1 che intersechi tutti gli archi di L trasversalmente. Scegliamo un verso di percorrenza sulle circonferenze S_θ^1 e S_φ^1 in modo che l'orientazione indotta sul toro $T \cong S_\theta^1 \times S_\varphi^1$ sia uscente. Tramite una isotopia di S^3 possiamo assumere che la proiezione su S_φ^1 di ogni componente di $T \cap L = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ sia un punto e proiettare i tratti di arco $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset S^3 \setminus T$ su ∂T mantenendo la coordinata θ costante. Infine sostituiamo le componenti di $T \cap L$

con archi $l_i \subset \partial T$ tale che $\varphi(s_i) = \varphi(l_i)$ e i punti estremi di s_i e l_i coincidano. Osservare che $\forall s_i \in T \cap L$ ci sono due possibili scelte di archi l_i , complementari in $T \cap \{\varphi = \varphi(s_i)\}$. Scegliamo l'arco l_i che non interseca la pagina \mathcal{D}_0 . Abbiamo così una curva spezzata chiusa in $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ composta da tratti orizzontali e verticali non collineari, che rappresentano rispettivamente le proiezioni su ∂T degli archi s_i e α_i , con un numero finito di punti doppi. Nello specifico a ogni arco $\alpha \subset \mathcal{D}_\theta$ della presentazione L con vertici $\varphi_1, \varphi_2 \in S_\varphi$ corrisponde un tratto verticale di estremi $(\theta, \varphi_1), (\theta, \varphi_2)$. Rispetto all'orientazione del piano della proiezione abbiamo che gli archi s_i passano al di sotto degli archi α_i . Quindi per ottenere un diagramma D' del link L , in ogni incrocio si sconnette il tratto orizzontale. Infine si noti che il diagramma D' coincide esattamente con il diagramma rettangolare D . \square

Proposizione 3.1.4. *Ogni link ammette una presentazione per archi.*

Dimostrazione. Siano K un link e $D \subset \mathbb{R}^2$ un diagramma di K . A meno di una isotopia del piano possiamo assumere che D sia un diagramma poligonale in $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ composto da un numero finito di tratti orizzontali e verticali non collineari. Al fine di ottenere un diagramma rettangolare D del link K , negli incroci in cui i tratti orizzontali passano sopra quelli verticali è sufficiente eseguire una rotazione dell'incrocio come nella Figura 3.1.3.

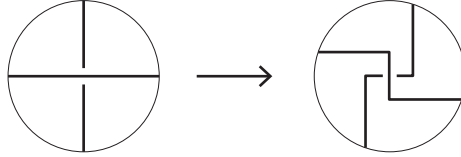


Figura 3.1.3: Rotazione dell'incrocio di $\frac{\pi}{2}$

Infine costruiamo una presentazione per archi del link K . A ogni tratto verticale di estremi $(\theta, \varphi_1), (\theta, \varphi_2)$ del diagramma D facciamo corrispondere un arco $\alpha \subset \mathcal{D}_\theta$ con estremi $\varphi_1, \varphi_2 \in S_\varphi^1$. La Proposizione 3.1.3 ci assicura che la presentazione per archi L così ottenuta rappresenta la stessa classe di isotopia del digramma D e perciò $L \cong K$. \square

Date due presentazioni per archi L e L' , diremo che L e L' sono *combinatorialmente equivalenti* $L \sim L'$, se L è ottenuta da L' con una isotopia $H = \{h_t\}_{t \in [0,1]}$ di S^3 tale che l'insieme dei punti $\theta(L_t)$ e $\{L_t \cap S_\varphi^1\}$ dipendono in modo continuo da t . In termini di diagrammi rettangolari queste isotopie

che preservano la struttura di una presentazione per archi si traducono in isotopie del piano della forma $F = \{f_t\}_{t \in [0,1]}$ con $f_t(x, y) = (u_t(x), v_t(y))$ e in alcuni casi in una permutazione ciclica dei tratti orizzontali o verticali (vedi Figura 3.1.4).

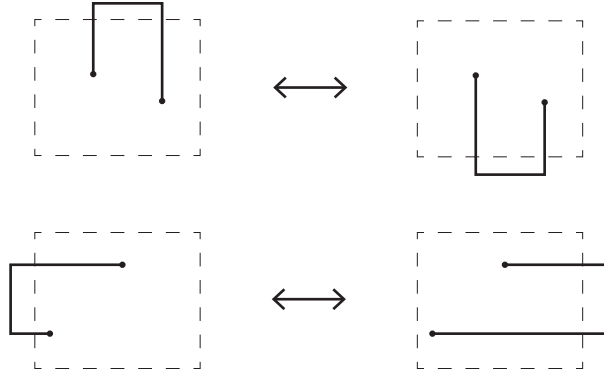


Figura 3.1.4: permutazione ciclica di tratti orizzontali (sopra) e verticali (sotto)

3.2 Movimenti elementari

In questa sezione descriveremo un insieme di mosse che definiscono le classi di isotopia delle presentazioni per archi.

Siano $s_1, s_2 \in S_\varphi^1$ due vertici consecutivi di una presentazione. Indichiamo con $\mathcal{D}_{t_1}, \mathcal{D}_{t'_1}$ e $\mathcal{D}_{t_2}, \mathcal{D}_{t'_2}$ le pagine contenenti gli archi uscenti da s_1 e s_2 rispettivamente. I vertici s_1, s_2 sono detti *indipendenti* se le pagine $\mathcal{D}_{t_1}, \mathcal{D}_{t'_1}$ e $\mathcal{D}_{t_2}, \mathcal{D}_{t'_2}$ non si alternano (vedere Figura 3.2.1), ovvero, considerando gli intervalli $(t_1, t'_1), (t_2, t'_2) \subset S_\theta^1$, si ha che $(t_1, t'_1) \subset (t_2, t'_2)$ o $(t_2, t'_2) \subset (t_1, t'_1)$.

Siano $\alpha_1 \subset \mathcal{D}_{t_1}$ e $\alpha_2 \subset \mathcal{D}_{t_2}$ due archi di una presentazione con punti estremi $s_1, s'_1 \in S_\varphi^1$ e $s_2, s'_2 \in S_\varphi^1$ rispettivamente. Gli archi α_1, α_2 sono detti *adiacenti* se per ogni t in $(\theta_1, \theta_2) \subset S_\theta^1$ o $(\theta_2, \theta_1) \subset S_\theta^1$ la pagina \mathcal{D}_t non contiene archi. Infine α_1, α_2 sono detti *indipendenti* se sono adiacenti e $(s_1, s'_1) \subset (s_2, s'_2)$ o $(s_2, s'_2) \subset (s_1, s'_1)$ (vedi Figura 3.2.2).

Definizione 3.2.1. Sia L una presentazione per archi. Le seguenti mosse sono dette *elementari*:

- **Mossa I:** siano $s_1, s_2 \in S_\varphi^1$ due vertici consecutivi e indipendenti di L . Si scambiano i vertici s_1 e s_2 .

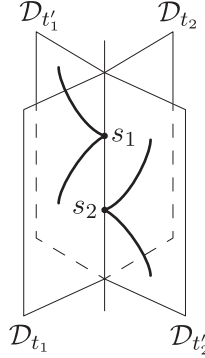


Figura 3.2.1: Vertici s_1 e s_2 indipendenti

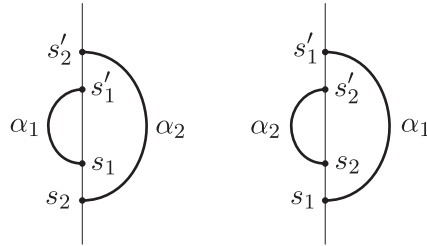


Figura 3.2.2: Archi α_1 e α_2 indipendenti

- **Mossa II:** siano $\alpha_1 \subset \mathcal{D}_{t_1}, \alpha_2 \subset \mathcal{D}_{t_2}$ due archi adiacenti e indipendenti di L . Si scambiano le pagine \mathcal{D}_{t_1} e \mathcal{D}_{t_2} .
- **Mossa III:** siano s_1 un vertice di L e $s \in S_\varphi^1 \setminus L$ tale che $o(s, s_1) \subset S_\varphi^1$ o $(s_1, s) \subset S_\varphi^1$ non contengono vertici di L . Sostituiamo l'arco α di estremi s_1, s_2 con archi adiacenti α_1, α_2 di estremi di s_1, s e s, s_2 rispettivamente.

Chiaramente le mosse appena descritte preservano la classe di isotopia della presentazione L . La mossa III è detta *stabilizzazione* e l'inversa *destabilizzazione*. Le Figure 3.2.3, 3.2.4 e 3.2.5 mostrano una realizzazione delle mosse appena descritte nei diagrammi rettangolari.

Proposizione 3.2.2. *Due diagrammi rettangolari D e D' appartengono alla stessa classe di isotopia se e solo se esiste una sequenza di mosse elementari e isotopie preservanti la struttura rettangolare che deforma D in D' .*

Dimostrazione. Dal Teorema di Reidemeister esiste una sequenza di diagrammi $D = D_0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow D_n = D'$, tali che D_{i+1} è ottenuta da D_i tramite

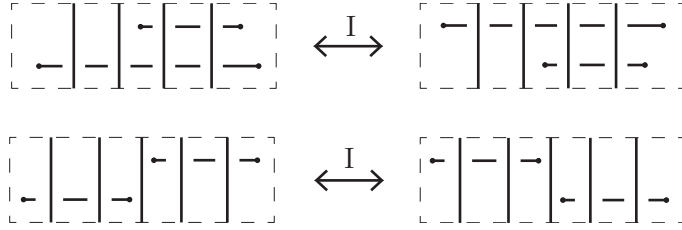


Figura 3.2.3: Mossa I

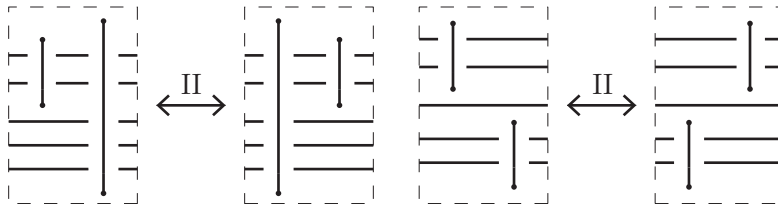


Figura 3.2.4: Mossa II

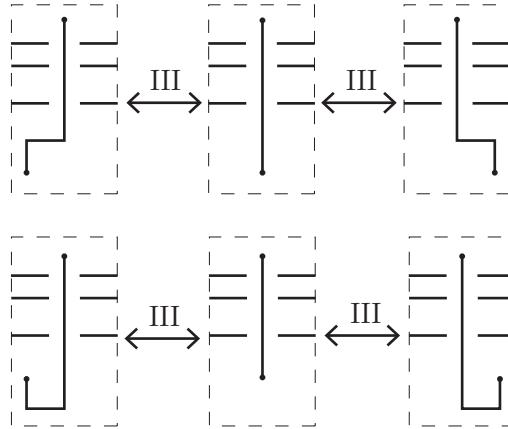


Figura 3.2.5: Mossa III

una isotopia del piano o un movimento di Reidemeister, $\forall i = 0, \dots, n - 1$. Per ogni diagramma D_i consideriamo un diagramma rettangolare D'_i ottenuto attraverso delle isotopie del piano e rotazioni degli incroci, con $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Otteniamo così una sequenza di diagrammi rettangolari $D = D_0 \rightsquigarrow D'_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow D'_{n-1} \rightsquigarrow D_n = D'$ tale che i diagrammi D'_i e D'_{i+1} differiscono per una isotopia del piano e al più un movimento di Reidemeister $\forall i = 0, 1, \dots, n - 1$. Quindi se mostriamo che le isotopie del piano e i movimenti di Reidemeister sono realizzabili tramite isotopie preservanti

la struttura rettangolare e mosse elementari avremo che $\forall i = 0, 1, \dots, n - 1$ esiste una sequenza $D'_i \rightsquigarrow D'_{i,1} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow D'_{i,r_i} \rightsquigarrow D'_i + 1$ di movimenti elementari e isotopie preservanti la struttura rettangolare da cui, per quanto visto precedentemente, segue la tesi. Una isotopia del piano H può essere ottenuta con una combinazione di isotopie preservanti la struttura rettangolare, mosse elementari che preservano la struttura di diagramma ordinario e rotazioni dell'incrocio come mostrato in Figura 3.2.6.

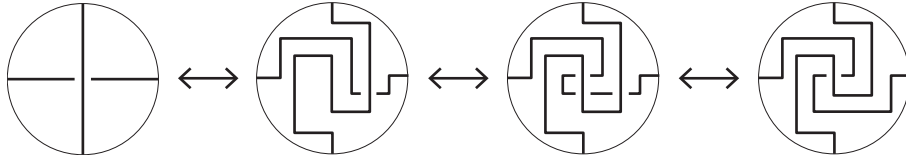


Figura 3.2.6: Rotazione dell'incrocio di un angolo π

Infine vediamo una realizzazione con mosse elementari dei movimenti di Reidemeister. Il 1° movimento può essere ottenuto tramite una stabilizzazione (vedi Figura 3.2.7), mentre il 2° e il 3° movimento sono casi particolari della mossa di tipo II (vedi Figura 3.2.8 e 3.2.9).

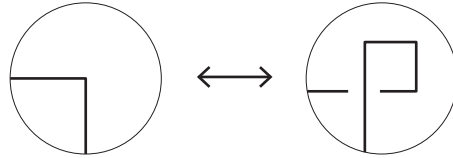


Figura 3.2.7: 1° movimento di Reidemeister

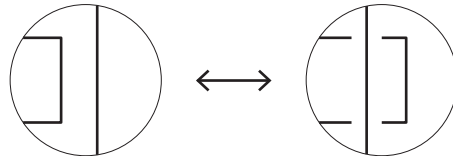


Figura 3.2.8: 2° movimento di Reidemeister

□

Proposizione 3.2.3. *Due presentazioni per archi L e L' appartengono alla stessa classe di isotopia se e solo se esiste una sequenza di mosse elementari e isotopie preservanti la struttura delle presentazioni che deforma L in L' .*

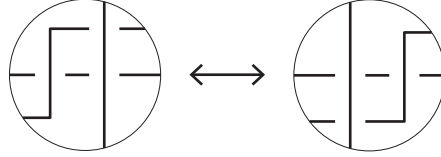


Figura 3.2.9: 3° movimento di Reidemeister

Dimostrazione. Siano $L \cong L'$ e $D, D' \subset [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ i diagrammi rettangolari associati a L, L' rispettivamente. Dalla precedente proposizione esiste una sequenza $D = D_0 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow D_n = D'$ tale che D_i e D_{i+1} differiscono per una mossa elementare o una isotopia che preserva la struttura rettangolare. Per ogni diagramma rettangolare D_i consideriamo la presentazione per archi L_i associata, con $i = 0, 1, \dots, n$. Questo determina una sequenza di presentazioni per archi $L = L_0 \rightarrow \dots \rightarrow L_n = L'$ tale che le presentazioni L_i e L_{i+1} sono combinatorialmente equivalenti o differiscono per una mossa elementare.

□

Definizione 3.2.4. Sia $L \subset S^3$ una presentazione per archi. Indichiamo con $\alpha(L)$ il numero di archi della presentazione L . Definiamo quindi il *numero di archi* $\alpha(K)$ di un link K come

$$\alpha(K) = \min\{\alpha(L) \mid L \text{ presentazione per archi di } K\},$$

Chiaramente l'indice $\alpha(K)$ è un invariante isotopico e coincide con il minimo numero di tratti verticali o orizzontali di un diagramma rettangolare di K .

Osservare che $\alpha(K) = 2$ se e solo se K è il nodo banale. Non ci sono link con $\alpha(K) = 3$ e gli unici link con $\alpha(K) = 4$ sono il link di Hopf (vedi Figura 3.1.2) e il link banale con 2 componenti.

3.3 Movimenti generalizzati

In questa sezione generalizzeremo le mosse elementari di tipo I, II e III precedentemente definite.

Dati $a, b, c \in S^1$ con $b \in (a, c)$, definiamo l'applicazione $F_{a,b,c} : S^1 \rightarrow S^1$,

$$x \mapsto \begin{cases} x + c - b \pmod{2\pi} & \text{se } x \in [a, b), \\ x + a - b \pmod{2\pi} & \text{se } x \in [b, c), \\ x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

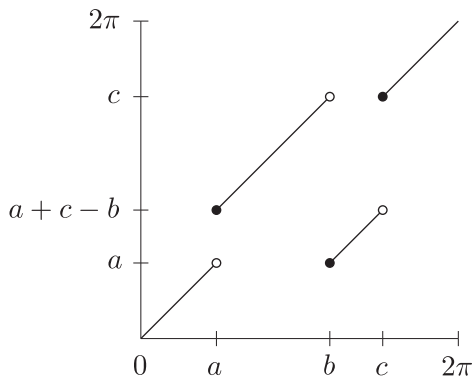


Figura 3.3.1: Grafico funzione $F_{a,b,c}$

Definizione 3.3.1. Sia $L \subset S^3$ una presentazione per archi. I seguenti movimenti sono detti generalizzati.

- **Mossa I generalizzata:** siano $s_1, s_2, s_3 \in S_\varphi^1 \setminus L$, con $s_2 \in (s_1, s_3) \subset S_\varphi^1$ e $t_1, t_2 \in S_\theta^1$. Supponiamo che $\forall t \in [t_1, t_2]$ esiste un arco α_t con estremi s_1, s_2 e $\forall t \in [t_2, t_1]$ esiste un arco α_t con estremi s_2, s_3 che non intersecano L . Si permutano i vertici in (s_1, s_2) con i vertici in (s_2, s_3) . Più precisamente la permutazione dei vertici di L è descritto dalla mappa $F_{s_1, s_2, s_3} : S_\varphi^1 \rightarrow S_\varphi^1$ (vedi Figura 3.3.2).
- **Mossa II generalizzata:** siano $t_1, t_2, t_3 \in S_\theta^1 \setminus \theta(L)$, con $t_2 \in (t_1, t_3) \subset S_\theta^1$ e $s_1, s_2 \in S_\varphi^1$. Supponiamo che ogni vertice in $(s_1, s_2) \subset S_\varphi^1$ ha entrambe gli archi uscenti contenuti nelle pagine \mathcal{D}_t con t in (t_1, t_2) o (t_2, t_1) e ogni vertice in $(s_2, s_1) \subset S_\varphi^1$ ha entrambe gli archi uscenti contenuti nelle pagine \mathcal{D}_t con t in (t_2, t_3) o (t_3, t_2) . Si permutano le pagine in $\bigcup_{t \in (t_1, t_2)} \mathcal{D}_t$ con le pagine in $\bigcup_{t \in (t_2, t_3)} \mathcal{D}_t$. Più precisamente la permutazione delle pagine di L è descritta dalla mappa $F_{t_1, t_2, t_3} : S_\theta^1 \rightarrow S_\theta^1$ (vedi Figura 3.3.3).
- **Mossa III generalizzata:** siano $s \in S_\varphi^1 \setminus L$ e α un arco di estremi s_1, s_2 contenuto nella pagina \mathcal{D}_t . Allora possiamo rimpiazzare l'arco α con due archi α_1, α_2 adiacenti, dove l'arco α_i congiunge i vertici v_i, v' con $i = 1, 2$ (vedere Figura 3.3.4).

Le mosse generalizzate I e II sono una composizione di mosse di tipo I e II (vedi Figura 3.3.2). Mentre la mossa generalizzata III è realizzabile con una mosse di stabilizzazione e una serie di mosse di tipo I (vedi Figura 3.3.4).

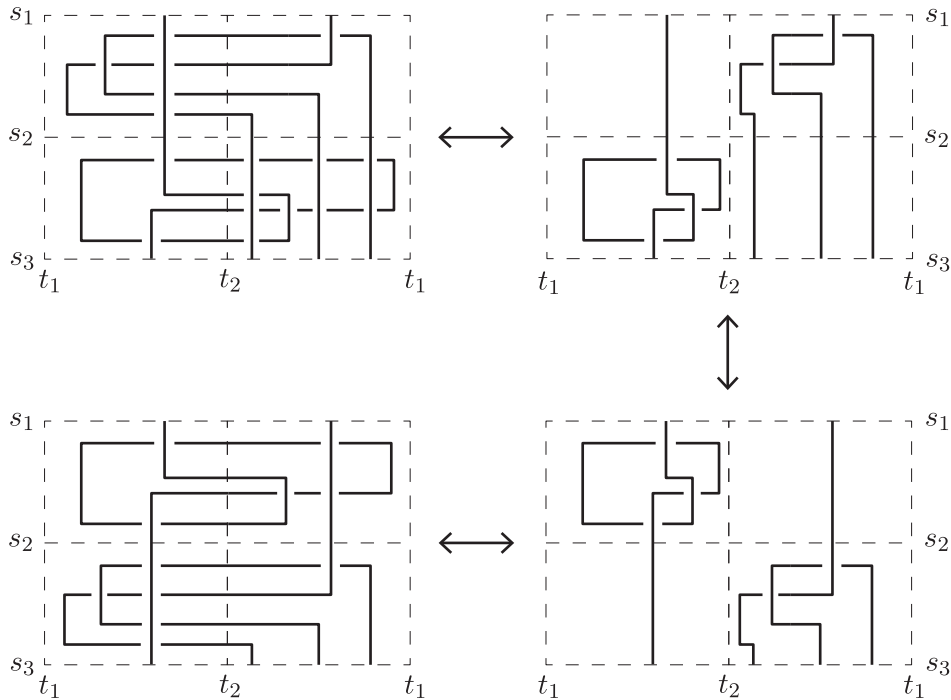


Figura 3.3.2: Scomposizione mossa I generalizzata

3.4 Semplificazione monotona

Un diagramma rettangolare D è:

- *banale* se D ha due soli tratti verticali.
- l'*unione separata* di due diagrammi D_1, D_2 se esiste una linea orizzontale l che non interseca D e separa D_1 da D_2 . In tal caso scriveremo $D = D_1 \sqcup D_2$.
- la *somma connessa* di due diagrammi D_1, D_2 se esiste una linea orizzontale l che interseca D in esattamente due lati verticali. I diagrammi D_1, D_2 sono costruiti aggiungendo due tratti orizzontali alle due curve spezzate ottenute tagliando il diagramma D lungo l . In tal caso scriveremo $D = D_1 \# D_2$. Se entrambe i diagrammi D_1 e D_2 non sono banali, diremo che D è *composto*.

Una presentazione per archi L è detta *banale*, *separata* $L_1 \sqcup L_2$ o *composta* $L_1 \# L_2$ se il diagramma rettangolare associato D è banale, separato $D = D_1 \sqcup$

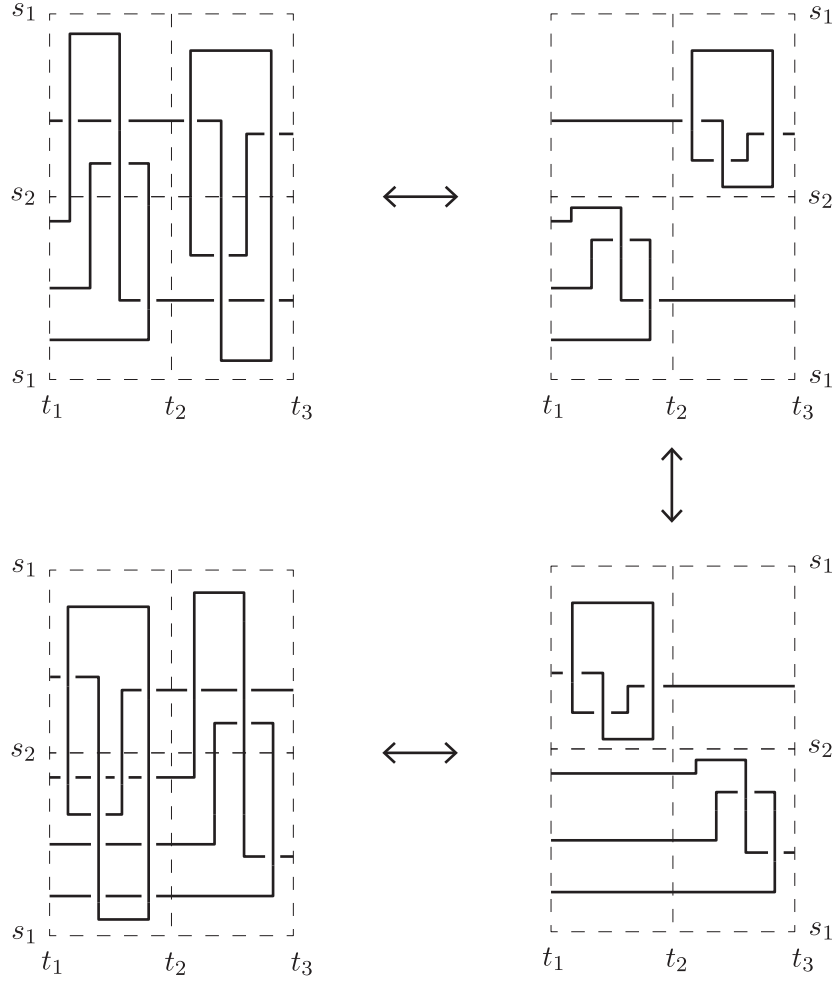


Figura 3.3.3: Scomposizione mossa II generalizzata

D_2 o composto $D = D_1 \# D_2$, dove D_1 e D_2 sono i diagrammi rettangolari associati rispettivamente alle presentazioni L_1 e L_2 . Si osservi che $\alpha(L_1 \sqcup L_2) = \alpha(L_1) + \alpha(L_2)$ e $\alpha(L_1 \# L_2) = \alpha(L_1) + \alpha(L_2) - 2$.

Definizione 3.4.1. Sia L una presentazione per archi di un link K . Una superficie $M \subset S^3$ è detta *superficie caratteristica* per L se

- è l'immersione in S^3 di un disco e $\partial M = L$ se K è il nodo banale.
- è una 2-sfera che separa L in due link K_1, K_2 se $K = K_1 \sqcup K_2$.
- è una 2-sfera che fattorizza L in due link K_1, K_2 se $K = K_1 \# K_2$.

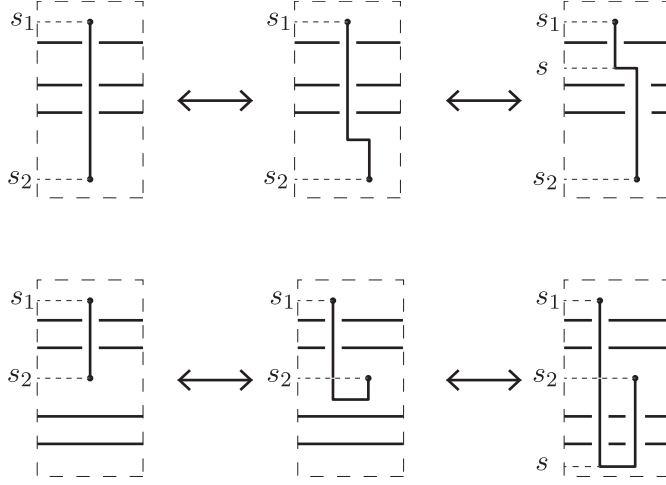


Figura 3.3.4: Scomposizione mossa III generalizzata

Possiamo assumere che una superficie caratteristica M sia differenziabile tranne al più in $\partial M \cap S_\varphi^1$. Le intersezioni di $M \setminus \partial M$ con S_φ^1 sono trasversali e finite. La classe di curve \mathcal{F}_M determinate da $M \cap \mathcal{D}_\theta$ al variare di $\theta \in S_\theta^1$, detta *foliazione* di M , contiene un numero finito di punti di tangenza di M con \mathcal{D}_θ detti *singolarità* di \mathcal{F}_M . In particolare sono estremi locali (vedi Figura 3.4.1 b) o a sella (vedi Figura 3.4.1 c) di M rispetto all'applicazione $\theta|_M$. I punti $M \cap S_\varphi^1$ sono detti *vertici* di \mathcal{F} . Le Figure 3.4.1 a) e d) mostrano rispettivamente un vertice di \mathcal{F}_M in $M \setminus \partial M$ e in ∂M . Nel caso in cui K è il nodo banale possiamo assumere che esiste al più un vertice p di \mathcal{F}_M , detto *vertice di avvolgimento*, tale che in un suo intorno esiste una curva liscia $\gamma \subset M$ con estremi in ∂M separati da p tale che $|\int_\gamma d\theta| > 2\pi$. È presente al più un punto $q \in \partial M \setminus S_\varphi^1$ singolare per \mathcal{F}_M . Nello specifico q è un punto a sella (vedi Figura 3.4.1 e)). Possiamo assumere che ogni pagina \mathcal{D}_θ contiene al più o un arco di L o una singolarità di \mathcal{F}_M interna a M , in tal caso \mathcal{D}_θ è detta *singolare* e il relativo indice θ critico. Nel caso in cui K è composto, possiamo assumere che la superficie M non interseca i vertici di L . Gli elementi della foliazione \mathcal{F}_M possono essere: curve chiuse, archi congiungenti due vertici, archi che congiungono un punto a sella a se stesso o a un vertice e punti singolari.

Definizione 3.4.2. Siano M una superficie caratteristica per L e \mathcal{F}_M la foliazione di M . Definiamo la *complessità* $c(M)$ di M come il numero delle singolarità di \mathcal{F}_M .

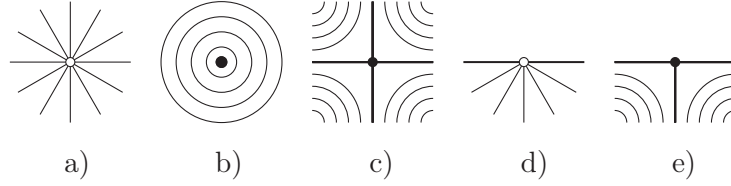


Figura 3.4.1: Singolarità e vertici di \mathcal{F}

Teorema 3.4.3. *Sia L una presentazione per archi del link K . Se K è banale, separabile o composto, esiste una sequenza $L = L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \dots \rightarrow L_n$ tale che L_n è una presentazione banale, separata o composta e L_{i+1} è ottenuto da L_i tramite una mossa generalizzata di tipo I o II o una destabilizzazione $\forall i = 0, \dots, n-1$.*

Dimostrazione. Accenniamo brevemente la dimostrazione del Teorema 3.4.3, per i dettagli si veda [6]. Siano M una superficie caratteristica per la presentazione L e \mathcal{F}_M la foliazione associata. Distinguiamo i seguenti due casi:

Caso $c(M) = 0$. La presentazione L è banale, separata o composta. In particolare se K è banale abbiamo che $\alpha(L) = 2$ e quindi L è la presentazione banale. Mentre se K è un link separato o composto possiamo assumere che $M \cap S_\varphi^1 = \{0, \pi\}$, perciò la retta orizzontale di equazione $\varphi = \pi$ separa e fattorizza il diagramma rettangolare associato a L .

Caso $c(M) > 0$. Dall'analisi della foliazione \mathcal{F}_M è possibile determinare una coppia (L', M') , dove L' è una presentazione ottenuta da L tramite una sequenza di mosse generalizzate di tipo I e II e al più una destabilizzazione e la superficie caratteristica M' è isotopa a M . In particolare si ha che $\alpha(L') < \alpha(L)$ oppure $\alpha(L') = \alpha(L)$ e $c(M') < c(M)$. Si ottiene quindi una sequenza $(L_0, M_0) \rightarrow (L_1, M_1) \rightarrow \dots \rightarrow (L_n, M_n)$, dove $L_0 = L$ e $M_0 = M$, tale che i relativi indici $(\alpha(L_i), c(M_i))$ formano una sequenza strettamente decrescente rispetto l'ordine lessico grafico e la foliazione \mathcal{F}_{M_n} associata alla superficie M_n non ha singolarità. Perciò, per quanto detto sopra, L_n è la presentazione per archi desiderata. □

3.5 Algoritmo per la decomposizione di un link

In questa sezione discutiamo una conseguenza del Teorema 3.4.3. Descriviamo un semplice algoritmo per riconoscere un link banale o determinare la

fattorizzazione in link primi tramite i diagrammi rettangolari. Si dimostra che per ogni intero positivo k esistono un numero finito $N(k)$ di classi di presentazioni per archi combinatorialmente equivalenti con k archi. È valida la seguente stima

$$\frac{((k-1)!)^2}{2k} < N(k) \leq ((k-1)!)^2.$$

Un algoritmo per la decomposizione in link primi è organizzato nel modo seguente: sia K un link e L una presentazione per archi di K ,

1. tra le $N(k)$ classi di presentazioni con k archi cerchiamo tutte quelle ottenibili da L tramite una sequenza di mosse di tipo I e II.
2. siano $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ le presentazioni trovate. Se esiste una presentazione L_i che ammette una mossa di destabilizzazione $L_i \rightarrow L'$ allora torniamo al passo 1) e sostituiamo L con L' . Altrimenti consideriamo i diagrammi rettangolari associati D_1, \dots, D_n .
3. per ogni diagramma $D \in \{D_1, \dots, D_n\}$ determiniamo una decomposizione, deducibile dal diagramma stesso

$$D = (D_{1,1} \# \dots \# D_{1,i_1}) \sqcup \dots \sqcup (D_{r,1} \# \dots \# D_{r,i_r}) \sqcup D'_1 \sqcup \dots \sqcup D'_s,$$

dove il diagramma $D_{(k,j)}$ è non banale con $j = 1, \dots, i_k$ e $k = 1, \dots, r$. La decomposizione con il maggior numero di fattori è quella composta da diagrammi di link banali e primi. Infatti supponiamo per assurdo che tra i fattori della decomposizione massimale sia presente un diagramma D' di un link K' non primo. Dal Teorema 3.4.3 segue che a una delle presentazioni tra L_1, \dots, L_n è applicabile una mossa di destabilizzazione che chiaramente contraddice l'ipotesi sulle presentazioni per archi L_1, \dots, L_n .

3.6 Numero di archi e operazione fra link

Vediamo ora il comportamento dell'invariante $\alpha(K)$ rispetto alle operazioni di somma connessa e unione separata.

Proposizione 3.6.1. *Siano $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ due link. Allora*

$$(i) \quad \alpha(K_1 \sqcup K_2) = \alpha(K_1) + \alpha(K_2),$$

$$(ii) \quad \alpha(K_1 \# K_2) = \alpha(K_1) + \alpha(K_2) - 2.$$

Dimostrazione. (i) Siano L_1, L_2 presentazioni per archi di K_1, K_2 rispettivamente. A meno di isotopie che preservino la struttura di L_1 e L_2 possiamo assumere che $\theta(L_1) \subset (0, \pi)$, $\theta(L_2) \subset (\pi, 2\pi)$ e i vertici di L_1 e L_2 siano distinti. Quindi una presentazione per archi del link $K_1 \sqcup K_2$ è data da $L_1 \cup L_2$, da cui segue $\alpha(K_1 \sqcup K_2) \leq \alpha(K_1) + \alpha(K_2)$. Viceversa sia L una presentazione di $K_1 \sqcup K_2$. Esiste una sfera topologica $S \subset S^3$ che separa K_1 e K_2 . Perciò eliminando gli archi della presentazione di K_2 otteniamo una presentazione di K_1 e viceversa. Da ciò segue che $\alpha(K_1 \sqcup K_2) \geq \alpha(K_1) + \alpha(K_2)$.

(ii) Siano L_1, L_2 presentazioni per archi di K_1, K_2 rispettivamente. Scelti due archi $\alpha_1 \in L_1$ e $\alpha_2 \in L_2$, a meno di isotopie che preservano la struttura di L_1 e L_2 , possiamo assumere che $\theta(L_1 \setminus \{\alpha_1\}) \subset (0, \pi)$, $\theta(L_2 \setminus \{\alpha_2\}) \subset (\pi, 2\pi)$ e i vertici di L_1 e L_2 siano distinti tranne per gli estremi di α_1 e α_2 che coincidono. Quindi una presentazione per archi del link $K_1 \# K_2$ è data da $L_1 \setminus \{\alpha\} \cup L_2 \setminus \{\alpha'\}$, da cui segue $\alpha(K_1 \# K_2) \leq \alpha(K_1) + \alpha(K_2) - 2$. Viceversa sia L una presentazione di $K_1 \# K_2$ allora dal Teorema 3.4.3 esiste una sequenza $L \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \dots \rightarrow L_n$ con $\alpha(L) \geq \alpha(L_n)$, dove $L_n = L' \# L''$ con L' e L'' presentazioni per archi di K_1 e K_2 rispettivamente, perciò $\alpha(L) \geq \alpha(L') + \alpha(L'') - 2$. Quindi abbiamo che $\alpha(K_1 \# K_2) \geq \alpha(K_1) + \alpha(K_2) - 2$.

□

Capitolo 4

Minimalità delle rappresentazioni

4.1 Congettura di Tait

Vediamo ora uno dei principali risultati legati al polinomio di Jones $V_K(x)$. Nello specifico la soluzione della cosiddetta *congettura di Tait*.

Un diagramma D è *alternante* se i soprapassaggi e sottopassaggi si alternano lungo D . Quindi un link $K \subset \mathbb{R}^3$ è un *link alternante* se ammette un diagramma alternante. Una importante proprietà è che la fattorizzazione di un link K è deducibile dai diagrammi alternanti.

Teorema 4.1.1. *Sia K un link e D un diagramma alternante di K .*

- K è separabile se e solo se D è separato.
- K è composto se e solo se D è composto.

Un diagramma D è detto *ridotto* se non contiene incroci separanti (vedi Figura 4.1.1). Chiaramente ogni diagramma alternante D può essere deformato in un diagramma alternante ridotto capovolgendo il blocco A o B .



Figura 4.1.1: Incroci separanti

Peter G. Tait nel 1898 congetturò che un diagramma alternante ridotto D di un link K realizza il minor numero di incroci possibile, cioè $c(D) = c(K)$.

Definizione 4.1.2. Sia $P(x)$ un polinomio di Laurent nella variabile x . Definiamo l'ampiezza $B(P(x))$ di $P(x)$ come la differenza tra il massimo e minimo esponente di $P(x)$.

Teorema 4.1.3. Siano D un diagramma di un link orientato K e $V_K(x)$ il polinomio di Jones di K . Allora abbiamo che

(i) $B(V_K) \leq c(D)$,

(ii) se D è alternante e ridotto allora $B(V_K(x)) = c(D)$,

(iii) se D è primo e non alternante allora $B(V_K(x)) < c(D)$.

Quindi una immediata conseguenza del precedente teorema è che i diagrammi alternanti ridotti sono minimali. Inoltre se K è primo gli unici diagrammi minimali sono quelli alternanti ridotti.

Nota 4.1.4. La classe dei link alternanti è chiusa rispetto all'unione separata e alla somma connessa. Inoltre dati due link alternanti K_1, K_2 abbiamo che $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$.

4.2 Presentazioni per archi minimali

Nel 1996 Cromwell e Nutt [5] provano un limite superiore per l'indice $\alpha(K)$ in termini del numero di incroci $c(K)$ per alcuni link K e propongono la seguente

Congettura 4.2.1 ([5]). *Sia K un link primo. Allora $\alpha(K) \leq c(K) + 2$ e abbiamo l'uguaglianza se e solo se K è alternante.*

Successivamente Morton e Beltrami [11] dimostrano una relazione tra l'indice $\alpha(K)$ e l'ampiezza nella variabile a , $B_a(F_K(a, z))$, del polinomio di Kauffman $F_K(a, z)$ di un link K , ovvero

$$B_a(F_K(a, z)) + 2 \leq \alpha(K). \tag{4.2.1}$$

Migliorando un precedente risultato dovuto a Nutt [13, 14], il quale aveva ottenuto una minorazione analoga del numero di archi $\alpha(K)$ in termini del polinomio $F_K(a, z)$ con coefficienti ridotti modulo 2. Più precisamente Morton e Beltrami, studiano un particolare diagramma D associato alla presentazione L , ottenuto sovrapponendo le pagine \mathcal{D}_θ contenenti gli archi secondo l'ordine crescente o decrescente dell'indice θ . Un esempio è mostrato in Figura 4.2.1. Ottengono così una stima del massimo e minimo esponente M, m

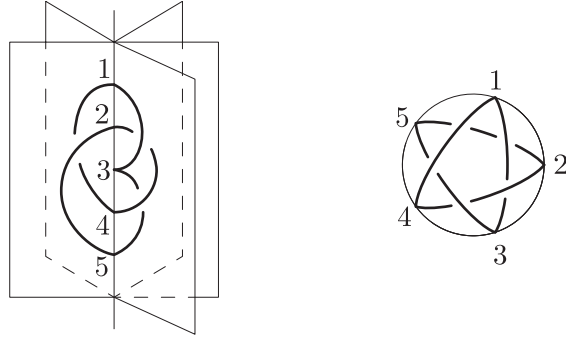


Figura 4.2.1

del polinomio $L_D(a, z)$ nella variabile a , in termini del numero di archi $\alpha(D)$ del diagramma D , ovvero $M \leq \alpha(D) - 1$, $m \geq 1 - \alpha(D)$. La disuguaglianza 4.2.1 deriva da un'applicazione delle precedenti disuguaglianze a particolari diagrammi ottenuti da D attraverso dei movimenti di Reidemeister del 1° tipo e il simmetrico.

In questo capitolo daremo una dimostrazione alternativa della relazione 4.2.1. Proveremo delle stime per gli esponenti M, m più precise di quelle fornite in [11]. In particolare per un diagramma rettangolare D , indicato con $n_+(D), n_-(D)$ il numero di attacchi positivi e negativi del diagramma D secondo la convenzione mostrata in Figura 4.2.2, mostreremo che

$$M \leq \frac{n_+(D)}{2} - 1 \quad \text{e} \quad m \geq -\frac{n_-(D)}{2} + 1.$$

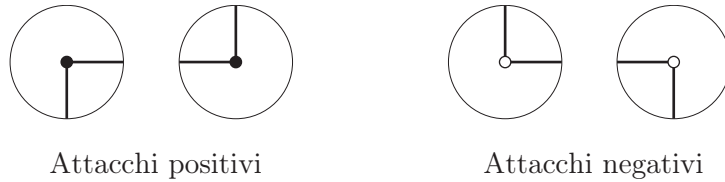


Figura 4.2.2

4.2.1 Polinomio di Kauffman e movimenti elementari

In questa sezione studieremo il comportamento del polinomio $L_D(a, z)$ rispetto alle mosse elementari e alle permutazioni cicliche dei tratti orizzontali

e verticali. Le mosse di tipo I e II o sono casi particolari di isotopie del piano o sono scomponibili in una sequenza del 2° e 3° movimento di Reidemeister (vedi Figura 4.2.3 e 4.2.4). Perciò $L_D(a, z)$ è invariante rispetto alle mosse elementari di tipo I e II.

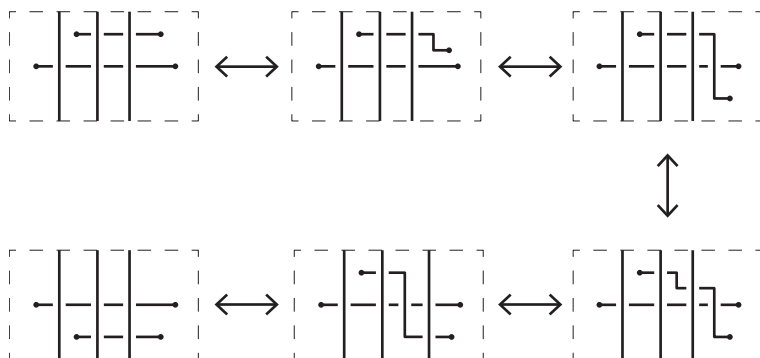


Figura 4.2.3: Scomposizione mossa I

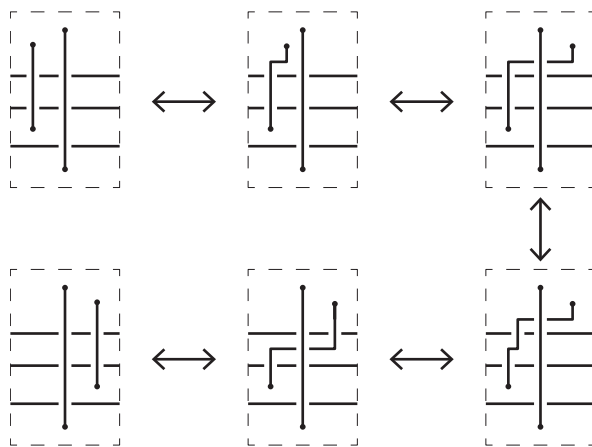


Figura 4.2.4: Scomposizione mossa II

Vediamo ora le mosse elementari di tipo III. Facendo riferimento alla Figura 4.2.5, abbiamo che

$$L_D(a, z) = L_{D_1}(a, z) = L_{D_2}(a, z) = L_{D_3}(a, z),$$

$$L_{D'}(a, z) = L_{D'_1}(a, z) = L_{D'_2}(a, z) = L_{D'_3}(a, z).$$

Mentre i diagrammi D, D_4 e D, D'_4 differiscono rispettivamente per il 1° movimento di Reidemeister e il simmetrico. Quindi $L_{D_4}(a, z) = aL_D(a, z)$ e

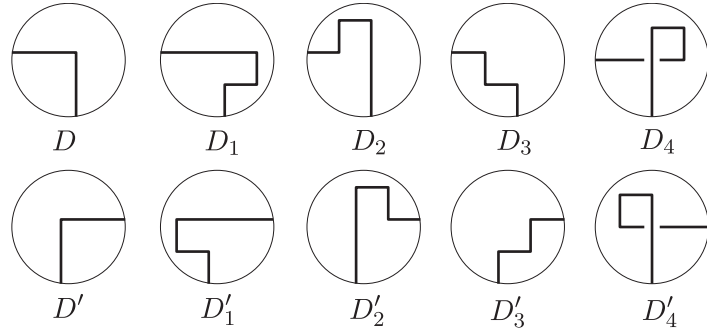


Figura 4.2.5: Mosse di tipo III

$L_{D'_4}(a, z) = a^{-1}L_{D'}(a, z)$. Infine le permutazioni cicliche dei tratti orizzontali e verticali sono ottenute attraverso una sequenza di mosse elementari che per quanto detto sopra preservano il polinomio $L_D(a, z)$ (vedi Figura 4.2.6 e 4.2.7). Si noti che nella scomposizione delle permutazioni cicliche sono presenti sia il 1° movimento di Reidemeister sia il simmetrico che combinati lasciano invariato il polinomio $L_D(a, z)$.

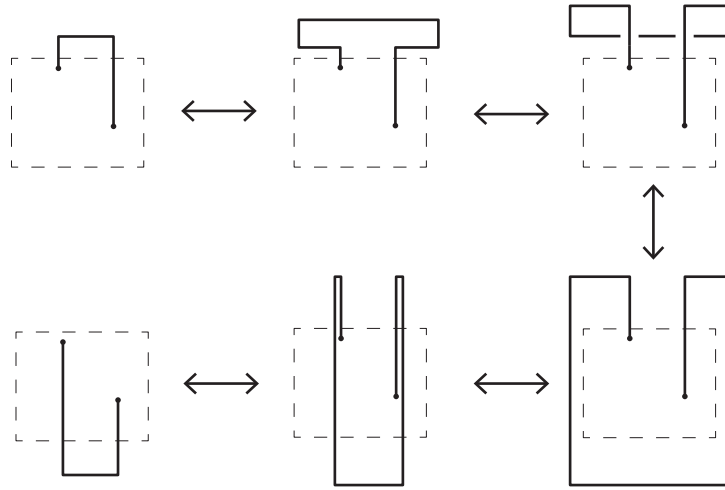


Figura 4.2.6: Scomposizione permutazione ciclica tratti orizzontali

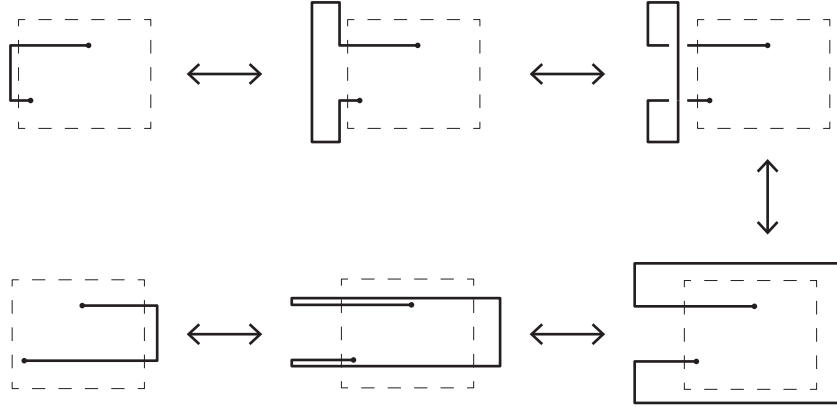
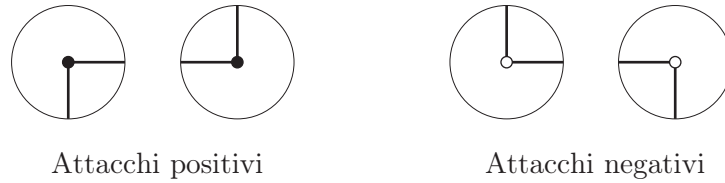


Figura 4.2.7: Scomposizione permutazione ciclica tratti verticali

4.2.2 Minorazione del numero di archi

Definizione 4.2.2. Sia D un diagramma rettangolare. Indichiamo con $\alpha(D)$ il numero di tratti verticali (o orizzontali) del diagramma D e con $n_+(D), n_-(D)$ il numero di *attacchi positivi e negativi* di D secondo la convenzione mostrata in Figura 4.2.8. Osservare che $\frac{n_+(D)+n_-(D)}{2} = \alpha(D)$.



Attacchi positivi

Attacchi negativi

Figura 4.2.8

Sia α un tratto orizzontale del diagramma D di estremi (θ_1, φ) e (θ_2, φ) . Definiamo la *lunghezza* $l(\alpha)$ di α come il numero di tratti verticali compresi nella regione definita da $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Infine, indicato con $h(D)$ l'insieme dei tratti orizzontali del diagramma D , definiamo la *lunghezza* $l(D)$ del diagramma D come

$$l(D) := \min_{\alpha \in h(D)} l(\alpha).$$

Finalmente, come anticipato all'inizio di questa sezione, proveremo che per ogni link K è valida la relazione: $B_a(F_K(a, z)) + 2 \leq \alpha(K)$. A differenza di quanto fatto da Morton e Beltrami [11], attraverso una analisi combinatoria dei diagrammi rettangolari D , otterremo una stima molto più precisa

del massimo e minimo esponente del polinomio $L_D(a, z)$. Più precisamente abbiamo il seguente

Teorema 4.2.3. *Siano D un diagramma rettangolare e M, m il massimo e il minimo esponente del polinomio $L_D(a, z)$ nella variabile a . Allora*

$$M \leq \frac{n_+(D)}{2} - 1, \quad (4.2.2)$$

$$m \geq -\frac{n_-(D)}{2} + 1. \quad (4.2.3)$$

Dimostrazione. Procediamo per doppia induzione, rispetto l'ordine lessico grafico, sulla coppia di indici $(\alpha(D), l(D))$.

Base induzione: $(2, 0)$ allora D è il diagramma banale. In tal caso $L_D(a, z) = 1$ quindi $M = m = 0$. D'altra parte $n_+(D) = n_-(D) = 2$. Quindi le relazioni 4.2.2 e 4.2.3 sono soddisfatte.

Passo induttivo: Sia D un diagramma con $(\alpha(D), l(D)) > (2, 0)$. Consideriamo il tratto orizzontale α che realizza la lunghezza del diagramma D $l(\alpha) = l(D)$. Distinguiamo i seguenti due casi:

$l(D) = 0$ ($\alpha(D) > 2$). Un intorno di α è rappresentato in uno dei casi illustrati in Figura 4.2.9.

Caso a. Consideriamo il diagramma D' ottenuto da D tramite una destabilizzazione come mostrato in Figura 4.2.10.

Osserviamo che $\alpha(D') = \alpha(D) - 1$, $n_+(D') = n_+(D) - 2$, $n_-(D') = n_-(D)$ e $L_D(a, z) = L_{D'}(a, z)$. Per ipotesi induttiva abbiamo che

$$\begin{aligned} M = M' &\leq \frac{n_+(D')}{2} - 1 = \frac{n_+(D)}{2} - 2, \\ m = m' &\geq -\frac{n_-(D')}{2} + 1 = -\frac{n_-(D)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Caso b. Consideriamo il diagramma D' ottenuto da D tramite una destabilizzazione come mostrato in Figura 4.2.11.

Osserviamo che $\alpha(D') = \alpha(D) - 1$, $n_+(D') = n_+(D)$, $n_-(D') = n_-(D) - 2$ e $L_D(a, z) = L_{D'}(a, z)$. Per ipotesi induttiva abbiamo che

$$\begin{aligned} M = M' &\leq \frac{n_+(D')}{2} - 1 = \frac{n_+(D)}{2} - 1, \\ m = m' &\geq -\frac{n_-(D')}{2} + 1 = -\frac{n_-(D)}{2} + 2. \end{aligned}$$

Caso c. Consideriamo il diagramma D' ottenuto da D tramite una destabilizzazione generalizzata come mostrato in Figura 4.2.12.

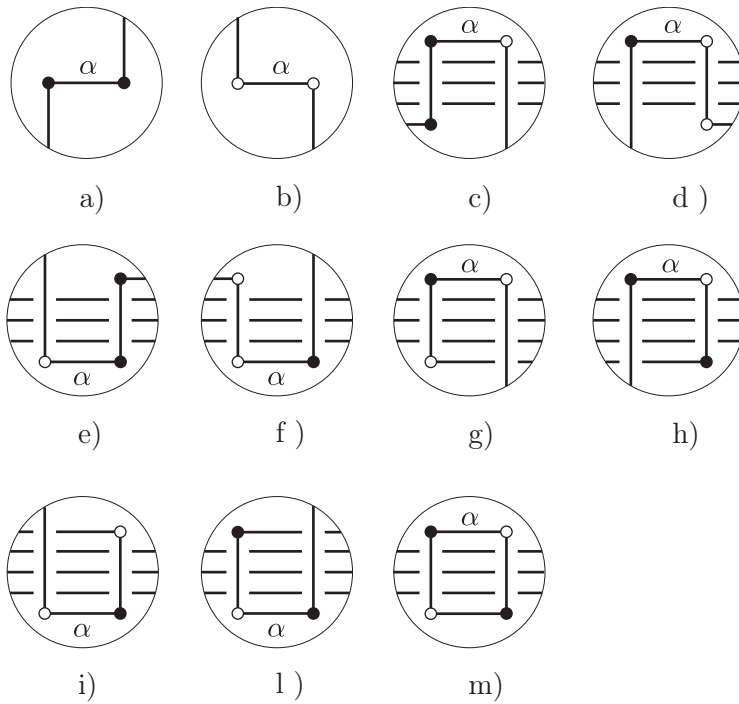


Figura 4.2.9

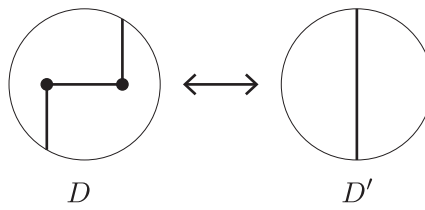


Figura 4.2.10: caso a)

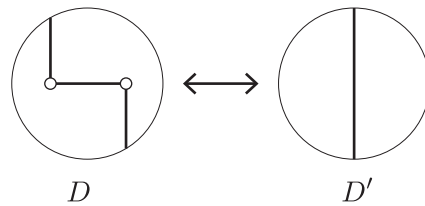


Figura 4.2.11: caso b)

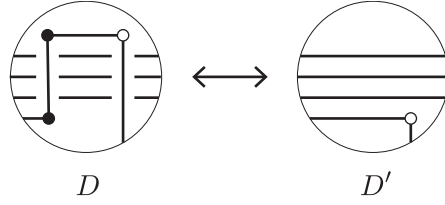


Figura 4.2.12: caso c)

Osserviamo che $\alpha(D') = \alpha(D) - 1$, $n_+(D') = n_+(D) - 2$, $n_-(D') = n_-(D)$ e $L_D(a, z) = L_{D'}(a, z)$. Per ipotesi induttiva abbiamo che

$$M = M' \leq \frac{n_+(D')}{2} - 1 = \frac{n_+(D)}{2} - 2,$$

$$m = m' \geq -\frac{n_-(D')}{2} + 1 = -\frac{n_-(D)}{2} + 1.$$

Caso d. Consideriamo il diagramma D' ottenuto da D tramite una destabilizzazione generalizzata come mostrato in Figura 4.2.13.

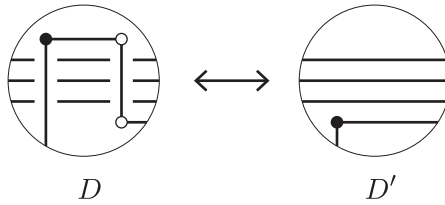


Figura 4.2.13: caso d)

Osserviamo che $\alpha(D') = \alpha(D) - 1$, $n_+(D') = n_+(D)$, $n_-(D') = n_-(D) - 2$ e $L_D(a, z) = L_{D'}(a, z)$. Per ipotesi induttiva abbiamo che

$$M = M' \leq \frac{n_+(D')}{2} - 1 = \frac{n_+(D)}{2} - 1,$$

$$m = m' \geq -\frac{n_-(D')}{2} + 1 = -\frac{n_-(D)}{2} + 2.$$

Caso e. Come caso c.

Caso f. Come caso d.

Caso g. Consideriamo il diagramma D' ottenuto da D tramite una destabilizzazione generalizzata come mostrato in Figura 4.2.14.

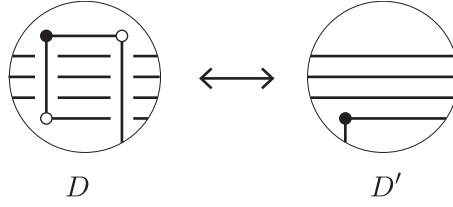


Figura 4.2.14: caso g)

Osserviamo che $\alpha(D') = \alpha(D) - 1$, $n_+(D') = n_+(D)$, $n_-(D') = n_-(D) - 2$ e $L_D(a, z) = a^{-1}L_{D'}(a, z)$, cioè $M' = M + 1$ e $m' = m + 1$. Per ipotesi induttiva abbiamo che

$$M + 1 = M' \leq \frac{n_+(D')}{2} - 1 = \frac{n_+(D)}{2} - 1,$$

$$m + 1 = m' \geq -\frac{n_-(D')}{2} + 1 = -\frac{n_-(D)}{2} + 2,$$

da cui segue

$$M < \frac{n_+(D)}{2} - 1, \quad m \geq -\frac{n_-(D)}{2} + 1.$$

Caso h. Consideriamo il diagramma D' ottenuto da D tramite una destabilizzazione generalizzata (vedi Figura 4.2.15).

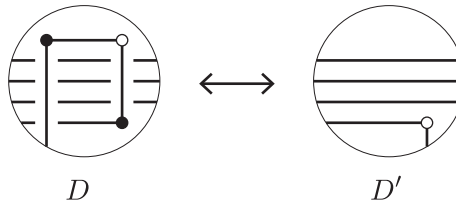


Figura 4.2.15: caso h)

Osserviamo che $\alpha(D') = \alpha(D) - 1$, $n_+(D') = n_+(D) - 2$, $n_-(D') = n_-(D)$ e $L_D(a, z) = aL_{D'}(a, z)$ cioè $M' = M - 1$ e $m' = m - 1$. Per ipotesi induttiva abbiamo che

$$M - 1 = M' \leq \frac{n_+(D')}{2} - 1 = \frac{n_+(D)}{2} - 2,$$

$$m - 1 = m' \geq -\frac{n_-(D')}{2} + 1 = -\frac{n_-(D)}{2} + 1.$$

da cui segue

$$M \leq \frac{n_+(D)}{2} - 1, \quad m > -\frac{n_-(D)}{2} + 1.$$

Caso i. Come caso g.

Caso l. Come caso h.

Caso m. Consideriamo il diagramma D' tale che $D' \sqcup S^1$ e D differiscono per una mossa di tipo I generalizzata e quindi $L_D(a, z) = L_{D' \sqcup S^1}$. Osserviamo che $\alpha(D') = \alpha(D) - 2$, $n_+(D') = n_+(D) - 2$, $n_-(D') = n_-(D) - 2$ e $L_D = ((a + a^{-1})z^{-1} - 1)L_{D'}$, cioè $M = M' + 1$ e $m = m' - 1$. Per ipotesi induttiva abbiamo che

$$\begin{aligned} M - 1 = M' &\leq \frac{n_+(D')}{2} - 1 = \frac{n_+(D)}{2} - 2, \\ m + 1 = m' &\geq -\frac{n_-(D')}{2} + 1 = -\frac{n_-(D)}{2} + 2, \end{aligned}$$

da cui segue

$$M \leq \frac{n_+(D)}{2} - 1, \quad m \geq -\frac{n_-(D)}{2} + 1.$$

$l(D) > 0$. Siano $(\theta_1, \varphi), (\theta_2, \varphi)$ gli estremi di α e β il tratto verticale connesso ad α nel punto (θ_2, φ) . Indichiamo con $\bar{\beta}$ il tratto verticale nella regione definita da $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ e adiacente al tratto β . Distinguiamo due casi.

$\bar{\beta}, \beta$ sono invertibili tramite una mossa di tipo II. Indichiamo con D' il diagramma ottenuto da D scambiando i tratti $\bar{\beta}, \beta$. Essendo $L_D(a, z)$ invariante rispetto alla mossa II, abbiamo che $L_D(a, z) = L_{D'}(a, z)$ perciò $M = M'$ e $m = m'$. Inoltre abbiamo che $\alpha(D) = \alpha(D')$, $n_+(D) = n_+(D')$ e $n_-(D) = n_-(D')$. La lunghezza del diagramma D' è $l(D') = l(D) - 1$. Per ipotesi induttiva il polinomio $L_{D'}(a, z)$ soddisfa le 4.2.2, 4.2.3 e quindi la tesi è provata anche per il diagramma D .

$\bar{\beta}, \beta$ non sono invertibili tramite una mossa di tipo II. Abbiamo una dei casi mostrati in Figura 4.2.16.

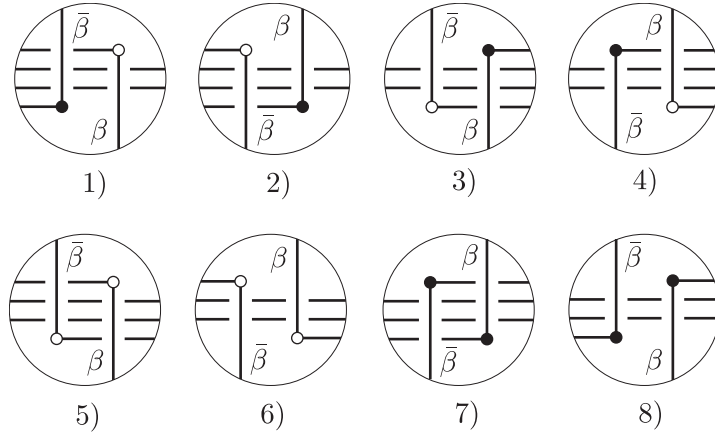


Figura 4.2.16

Caso 1. Poniamo $D = D_+$ e indichiamo con D_- il diagramma ottenuto da D invertendo l'incrocio tra $\bar{\beta}$ e il tratto orizzontale connesso a β . A meno di movimenti di destabilizzazione che preservano la struttura di diagramma ordinario e di mosse di tipo I e II, ciò equivale a invertire l'ordine dei tratti $\bar{\beta}$ e β (vedi Figura 4.2.17).

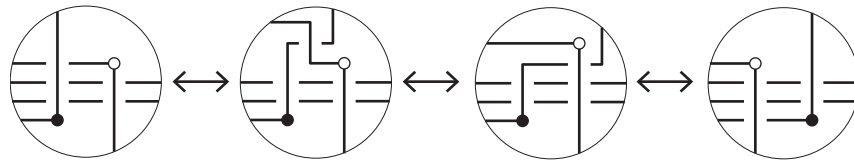


Figura 4.2.17: Inversione incrocio

Il diagramma D_- coincide con il caso 2). La regione interessata dei diagrammi D_0 e D_∞ , a meno di movimenti di destabilizzazione che preservano $L_D(a, z)$, è mostrata in Figura 4.2.18.

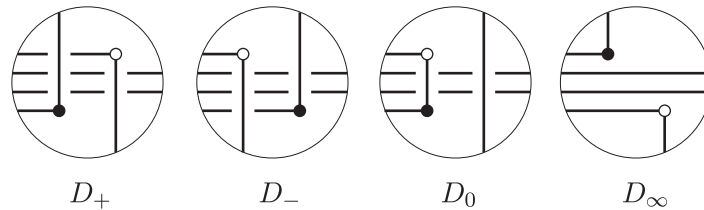


Figura 4.2.18: caso 1)

Osservare che

$$\begin{aligned}\alpha(D_+) &= \alpha(D_-) = \alpha(D_0) = \alpha(D_\infty), \\ n_+(D_+) &= n_+(D_-) = n_+(D_0) = n_+(D_\infty), \\ n_-(D_+) &= n_-(D_-) = n_-(D_0) = n_-(D_\infty).\end{aligned}$$

La lunghezza del diagramma D_- è $l(D_-) = l(D) - 1$. Mentre i diagrammi D_0 e D_∞ ricadono nella casistica $\bar{\beta}$, β invertibili. Per ipotesi induttiva i polinomi $L_{D_-}(a, z)$, $L_{D_0}(a, z)$ e $L_{D_\infty}(a, z)$ soddisfano le 4.2.2, 4.2.3. Perciò ricapitolando

$$\begin{aligned}M_-, M_0, M_\infty &\leq \frac{n_+(D_+)}{2} - 1, \\ m_-, m_0, m_\infty &\geq -\frac{n_-(D_+)}{2} + 1.\end{aligned}$$

D'altra parte, dall'equazione caratteristica abbiamo che

$$L_{D_+} = -L_{D_-} + z(L_{D_0} + L_{D_\infty}),$$

perciò $M_+ \leq \max\{M_-, M_0, M_\infty\}$ e $m_+ \geq \min\{m_-, m_0, m_\infty\}$. Quindi la tesi è provata anche per L_{D_+} .

Caso 2. Analogamente al caso 1), considerando ora l'equazione $L_{D_-} = -L_{D_+} + z(L_{D_0} + L_{D_\infty})$.

Caso 3. Poniamo $D = D_+$ e indichiamo con D_- il diagramma ottenuto da D invertendo l'incrocio tra $\bar{\beta}$ e il tratto orizzontale connesso a β . A meno di movimenti di destabilizzazione che preservano la struttura di diagramma ordinario e di mosse di tipo I e II, ciò equivale a invertire l'ordine dei tratti $\bar{\beta}$ e β (vedi Figura 4.2.19).

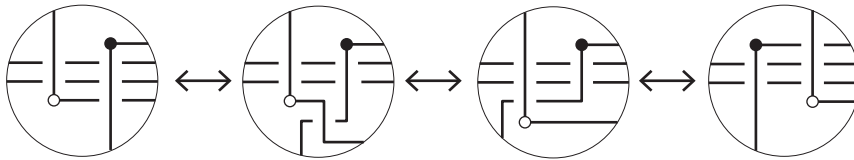


Figura 4.2.19: Inversione incrocio

Il diagramma D_- coincide con il caso 4). La regione interessata dei diagrammi D_0 e D_∞ , a meno di movimenti di destabilizzazione che preservano $L_D(a, z)$, è mostrata in Figura 4.2.20.

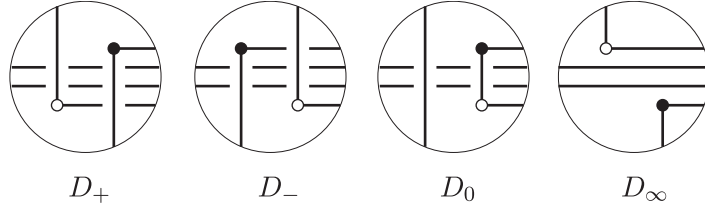


Figura 4.2.20: caso 3)

Osservare che

$$\begin{aligned}\alpha(D_+) &= \alpha(D_-) = \alpha(D_0) = \alpha(D_\infty), \\ n_+(D_+) &= n_+(D_-) = n_+(D_0) = n_+(D_\infty), \\ n_-(D_+) &= n_-(D_-) = n_-(D_0) = n_-(D_\infty).\end{aligned}$$

La lunghezza del diagramma D_- è $l(D_-) = l(D) - 1$. Mentre i diagrammi D_0 e D_∞ ricadono nella casistica $\bar{\beta}$, β invertibili. Per ipotesi induttiva i polinomi $L_{D_-}(a, z)$, $L_{D_0}(a, z)$ e $L_{D_\infty}(a, z)$ soddisfano le 4.2.2, 4.2.3. Perciò ricapitolando

$$\begin{aligned}M_-, M_0, M_\infty &\leq \frac{n_+(D_+)}{2} - 1, \\ m_-, m_0, m_\infty &\geq -\frac{n_-(D_+)}{2} + 1.\end{aligned}$$

D'altra parte, dall'equazione caratteristica abbiamo che

$$L_{D_+} = -L_{D_-} + z(L_{D_0} + L_{D_\infty}),$$

perciò $M_+ \leq \max\{M_-, M_0, M_\infty\}$ e $m_+ \geq \min\{m_-, m_0, m_\infty\}$. Quindi la tesi è provata anche per L_{D_+} .

Caso 4. Analogamente al caso 3), considerando ora l'equazione $L_{D_-} = -L_{D_+} + z(L_{D_0} + L_{D_\infty})$.

Caso 5. Poniamo $D = D_+$ e indichiamo con D_- il diagramma ottenuto da D invertendo l'incrocio tra $\bar{\beta}$ e il tratto orizzontale connesso a β . A meno di movimenti di destabilizzazione che preservano la struttura di diagramma ordinario e di mosse di tipo I e II, ciò equivale a invertire l'ordine dei tratti $\bar{\beta}$ e β (vedi Figura 4.2.21). Il diagramma D_- coincide con il caso 6). La regione interessata del diagramma D_0 , a meno di movimenti di destabilizzazione, è mostrata in Figura 4.2.22.

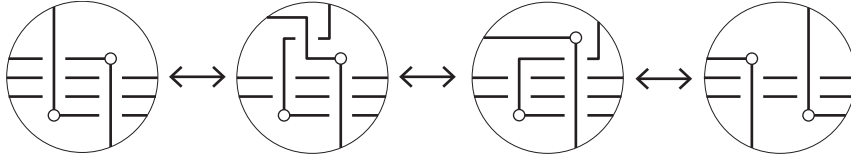


Figura 4.2.21: Inversione incrocio

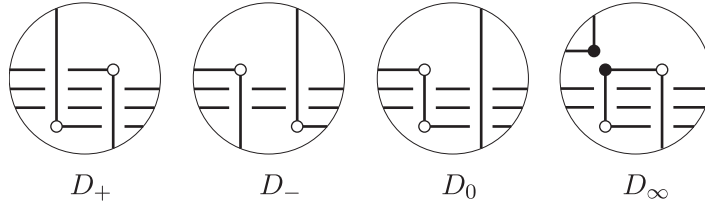


Figura 4.2.22: caso 5)

Definiamo

$$\begin{aligned}
 d &:= \alpha(D_+) = \alpha(D_-) = \alpha(D_0), \\
 n_+ &:= n_+(D_+) = n_+(D_-) = n_+(D_0), \\
 n_- &:= n_-(D_+) = n_-(D_-) = n_-(D_0).
 \end{aligned}$$

La lunghezza del diagramma D_- è $l(D_-) = l(D) - 1$. Mentre il diagramma D_0 ricade nella casistica $\bar{\beta}$, β invertibili. Quindi per ipotesi induttiva i polinomi $L_{D_-}(a, z)$ e $L_{D_0}(a, z)$ soddisfano le 4.2.2, 4.2.3. Infine per quanto riguarda D_∞ analizziamo il diagramma D' mostrato in Figura 4.2.23

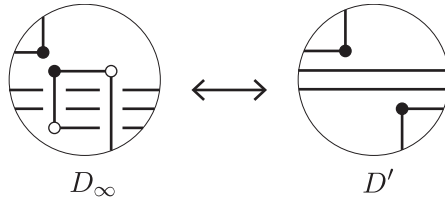


Figura 4.2.23: Semplificazione diagramma D_∞

Abbiamo che $\alpha(D') = d$, $n_+(D') = n_+ + 2$ e $n_-(D') = n_- - 2$. Osservare che $L_{D_\infty}(a, z) = a^{-1}L_{D'}(a, z)$ quindi $M_\infty = M' - 1$ e $m_\infty = m' - 1$. Il diagramma D' ricade nella casistica $\bar{\beta}$, β invertibili e quindi, per ipotesi

induttiva, il polinomio $L_{D'}(a, z)$ soddisfa le seguenti relazioni

$$M_\infty + 1 = M' \leq \frac{n_+(D')}{2} - 1 = \frac{n_+ + 2}{2} - 1,$$

$$m_\infty + 1 = m' \geq -\frac{n_-(D')}{2} + 1 = -\frac{n_- - 2}{2} + 1,$$

ovvero

$$M_\infty \leq \frac{n_+}{2} - 1, \quad m_\infty \geq -\frac{n_-}{2} + 1.$$

Perciò ricapitolando

$$M_-, M_0, M_\infty \leq \frac{n_+(D_+)}{2} - 1,$$

$$m_-, m_0, m_\infty \geq -\frac{n_-(D_+)}{2} + 1.$$

D'altra parte, dall'equazione caratteristica abbiamo che

$$L_{D_+} = -L_{D_-} + z(L_{D_0} + L_{D_\infty}),$$

perciò $M_+ \leq \max\{M_-, M_0, M_\infty\}$ e $m_+ \geq \min\{m_-, m_0, m_\infty\}$. Quindi la tesi è provata anche per L_{D_+} .

Caso 6. Analogamente al caso 5), considerando ora l'equazione $L_{D_-} = -L_{D_+} + z(L_{D_0} + L_{D_\infty})$.

Caso 7. Poniamo $D = D_+$ e indichiamo con D_- diagramma ottenuto da D invertendo l'incrocio tra β e il tratto orizzontale connesso a $\bar{\beta}$. A meno di movimenti di destabilizzazione che preservano la struttura di diagramma ordinario e di mosse di tipo I e II, ciò equivale a invertire l'ordine dei tratti $\bar{\beta}$ e β (vedi Figura 4.2.24). Il diagramma D_- coincide con il caso 8). La regione interessata del diagramma D_0 , a meno di movimenti di destabilizzazione, è mostrata in Figura 4.2.25.

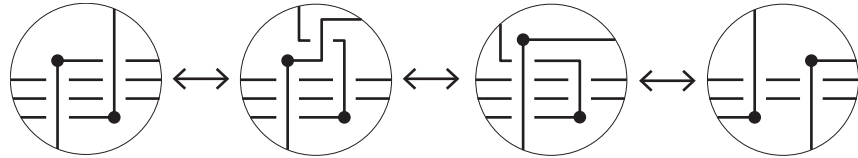


Figura 4.2.24: Inversione incrocio

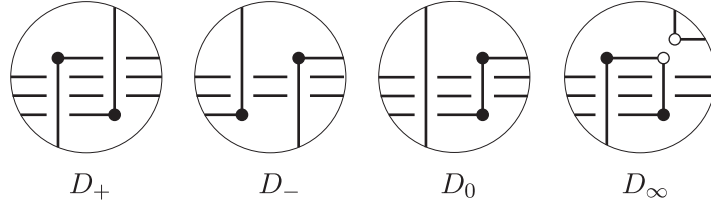


Figura 4.2.25: caso 7)

Definiamo

$$\begin{aligned}
 d &:= \alpha(D_+) = \alpha(D_-) = \alpha(D_0), \\
 n_+ &:= n_+(D_+) = n_+(D_-) = n_+(D_0), \\
 n_- &:= n_-(D_+) = n_-(D_-) = n_-(D_0).
 \end{aligned}$$

La lunghezza del diagramma D_- è $l(D_-) = l(D) - 1$. Mentre il diagramma D_0 ricade nella casistica $\bar{\beta}$, β invertibili. Quindi per ipotesi induttiva i polinomi $L_{D_-}(a, z)$, $L_{D_0}(a, z)$ soddisfano le 4.2.2, 4.2.3. Infine per quanto riguarda D_∞ analizziamo il diagramma D' mostrato in Figura 4.2.26.

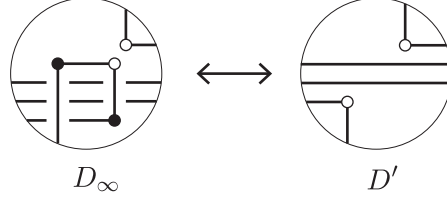


Figura 4.2.26: Semplificazione diagramma D_∞

Abbiamo che $\alpha(D') = d$, $n_+(D') = n_+ - 2$ e $n_-(D') = n_- + 2$. Osservare che $L_{D_\infty}(a, z) = aL_{D'}(a, z)$ quindi $M_\infty = M' + 1$ e $m_\infty = m' + 1$. Il diagramma D' ricade nella casistica $\bar{\beta}$, β invertibili e quindi, per ipotesi induttiva, il polinomio $L_{D'}(a, z)$ soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
 M_\infty - 1 = M' &\leq \frac{n_+(D')}{2} - 1 = \frac{n_+ - 2}{2} - 1, \\
 m_\infty - 1 = m' &\geq -\frac{n_-(D')}{2} + 1 = -\frac{n_- + 2}{2} + 1,
 \end{aligned}$$

ovvero

$$M_\infty \leq \frac{n_+}{2} - 1, \quad m_\infty \geq -\frac{n_-}{2} + 1.$$

Perciò ricapitolando

$$\begin{aligned} M_-, M_0, M_\infty &\leq \frac{n_+(D_+)}{2} - 1, \\ m_-, m_0, m_\infty &\geq -\frac{n_-(D_+)}{2} + 1. \end{aligned}$$

D'altra parte, dall'equazione caratteristica abbiamo che

$$L_{D_+} = -L_{D_-} + z(L_{D_0} + L_{D_\infty}),$$

perciò $M_+ \leq \max\{M_-, M_0, M_\infty\}$ e $m_+ \geq \min\{m_-, m_0, m_\infty\}$. Quindi la tesi è provata anche per L_{D_+} .

Caso 8. Analogamente al caso 7), considerando ora l'equazione $L_{D_-} = -L_{D_+} + z(L_{D_0} + L_{D_\infty})$.

□

Definizione 4.2.4. Sia $P(a_1, \dots, a_n)$ un polinomio di Laurent nelle variabili a_1, a_2, \dots, a_n . Indichiamo con $B_{a_i}(P)$ l'ampiezza del polinomio P nella variabile a_i , con $1 \leq i \leq n$.

Corollario 4.2.5. Siano K un link orientato e $F_K(a, z)$ il suo polinomio di Kauffman. Allora

$$B_a(F_K(a, z)) \leq \alpha(K) - 2.$$

Dimostrazione. Sia D un diagramma rettangolare del link K . Dalle relazioni 4.2.2, 4.2.3 abbiamo che

$$B_a(F_K(a, z)) = B_a(L_D(a, z)) \leq \frac{n_+(D) + n_-(D)}{2} - 2 = \alpha(D) - 2.$$

In particolare considerando un diagramma rettangolare minimale D , cioè tale che $\alpha(D) = \alpha(K)$, otteniamo la relazione 4.2.1.

□

Osservazione 4.2.6. Bae e Park [1] dimostrano che per un link non separabile alternante K , si ha che $B_a(F_K(a, z)) + 2 = \alpha(K)$. Quindi per un diagramma rettangolare minimale D di K , cioè tale che $\alpha(K) = \alpha(D)$, le stime 4.2.2, 4.2.3 del massimo e minimo esponente del polinomio $L_D(a, z)$ sono esatte, ovvero $M = \frac{n_+(D)}{2} - 1$ e $m = -\frac{n_-(D)}{2} + 1$.

4.3 Il polinomio di Kauffman e il massimo numero di Thurston-Bennequin

In questa sezione vediamo come le equazioni 4.2.2 e 4.2.3 forniscono delle stime, in alcuni casi esatte, sul cosiddetto massimo numero di Thurston-Bennequin $\bar{tb}(K)$ di un link K .

Definizione 4.3.1. Siano D un diagramma rettangolare orientato, $w(D)$ il numero di arricciamento e $n_+(D)$ in numero di attacchi positivi del diagramma D . Il *numero di Thurston-Bennequin* $tb(D)$ del diagramma D è definito come

$$tb(D) := w(D) - \frac{n_+(D)}{2}.$$

Sia $K \subset \mathbb{R}^3$ un link orientato. È ben definito l'invariante isotopico $\bar{tb}(K)$, detto *massimo numero di Thurston-Bennequin* del link K , come

$$\bar{tb}(K) := \max\{ tb(D) \mid D \text{ diagramma rettangolare di } K \}.$$

Vediamo ora un'importante relazione tra il numero di archi $\alpha(K)$ e il massimo numero di Thurston-Bennequin $\bar{tb}(K)$ di un link K , dovuta a Matsuda [10].

Proposizione 4.3.2. *Sia K un link orientato. Abbiamo che*

$$-\alpha(K) \leq \bar{tb}(K) + \bar{tb}(\bar{K}) \tag{4.3.4}$$

Dimostrazione. Osserviamo che esiste una corrispondenza biunivoca $D(K) \rightarrow D(\bar{K})$ tra l'insieme dei diagrammi rettangolari $D(K)$ di K e l'insieme dei diagrammi rettangolari $D(\bar{K})$ del link simmetrico \bar{K} . In particolare a un diagramma rettangolare $D \in D(K)$ corrisponde un diagramma $\bar{D} \in D(\bar{K})$ ottenuto invertendo tutti gli incroci di D e ruotandolo in senso antiorario di un angolo di $\frac{\pi}{2}$. Si noti che $w(\bar{D}) = -w(D)$, $n_+(D) = n_-(\bar{D})$ e $n_-(D) = n_+(\bar{D})$. Perciò abbiamo che $tb(\bar{D}) = -w(D) - \frac{n_-(D)}{2}$ da cui segue

$$tb(D) + tb(\bar{D}) = -\alpha(D). \tag{4.3.5}$$

Infine massimizzando i termini dell'equazione 4.3.5 sugli insiemi $D(K)$ e $D(\bar{K})$ abbiamo che

$$\bar{tb}(K) + \bar{tb}(\bar{K}) \geq \max_{D \in D(K)} (tb(D) + tb(\bar{D})) = -\alpha(K).$$

□

Tramite l'equazione 4.3.4 sono stati calcolati il numero di archi per tutti i nodi K con un numero di incroci $c(K) \leq 11$ [2, 12].

In [7, 16, 17] è stata provata una maggiorazione dell'indice $\bar{tb}(K)$ in termini del massimo esponente nella variabile a , M_K , del polinomio di Kauffman $F_K(a, z)$, ovvero $\bar{tb}(K) \leq -M_K - 1$. In quanto segue vedremo che la precedente disuguaglianza è un'immediata conseguenza del Teorema 4.2.3. Inoltre proveremo anche una minorazione per l'invariante di Thurston-Bennequin $\bar{tb}(K)$.

Proposizione 4.3.3. *Siano $K \subset \mathbb{R}^3$ un link orientato, $\alpha(K)$ il numero di archi e $\bar{tb}(K)$ il massimo numero di Thurston-Bennequin di K e M_K e m_K il massimo e il minimo esponente nella variabile a del polinomio di Kauffman $F_K(a, z)$. Allora abbiamo che*

$$-m_K - \alpha(K) + 1 \leq \bar{tb}(K) \leq -M_K - 1, \quad (4.3.6)$$

$$\bar{tb}(K) + \bar{tb}(\bar{K}) \leq -B_a(F_K(a, z)) - 2. \quad (4.3.7)$$

Dimostrazione. Dalle equazioni 4.2.2 e 4.2.3 abbiamo che

$$M_K \leq -w(D) + \frac{n_+(D)}{2} - 1,$$

$$m_K \geq -w(D) - \alpha(D) + \frac{n_+(D)}{2} + 1,$$

cioè

$$tb(D) \leq -M_K - 1, \quad tb(D) \geq -m_K - \alpha(D) + 1.$$

Infine considerando il massimo, sui diagrammi rettangolari D di K , dei termini $tb(D)$ e $-m_K - \alpha(D) + 1$ otteniamo la stima 4.3.6. Osserviamo che $F_{\bar{K}}(a, z) = F_K(a^{-1}, z)$, quindi $M_{\bar{K}} = -m_K$. Dalla seconda disuguaglianza della 4.3.6 abbiamo che

$$\bar{tb}(K) \leq -M_K - 1, \quad \bar{tb}(\bar{K}) \leq m_K - 1,$$

che sommate danno la 4.3.7. □

Greene pone la seguente questione: un diagramma D minimale, cioè tale che $\alpha(D) = \alpha(K)$, realizza anche il massimo numero di Thurston-Bennequin $\bar{tb}(K)$ per un nodo K ? O equivalentemente, l'equazione

$$-\alpha(K) = \bar{tb}(K) + \bar{tb}(\bar{K}). \quad (4.3.8)$$

è valida per ogni nodo K ?

Finora l'equazione 4.3.8 è stata verificata per tutti i nodi K con un numero di incroci $c(K) \leq 11$. Dalla Proposizione 4.3.3 segue che l'uguaglianza 4.3.8 è valida per tutti i nodi alternanti. Più precisamente abbiamo il seguente

Corollario 4.3.4. *Ogni link non separabile alternante soddisfa l'equazione 4.3.8. In particolare le stime 4.3.6 e 4.3.7 sono esatte.*

Dimostrazione. Da [1] abbiamo che per un link non separabile alternante è soddisfatta l'equazione $B_a(F_K(a, z)) + 2 = \alpha(K)$, che combinata a 4.3.7 e 4.3.4 ci dà

$$-\alpha(K) \leq \bar{t}b(K) + \bar{t}b(\bar{K}) \leq -B_a(F_K(a, z)) - 2 = -\alpha(K)$$

Da cui segue la 4.3.8. Infine combinando l'equazione $B_a(F_K(a, z)) + 2 = \alpha(K)$ con la 4.3.6 abbiamo che $\bar{t}b(K) = -M_K - 1 = -m_K - \alpha(K) + 1$. \square

Bibliografia

- [1] Y. BAE and C.Y. PARK, An upper bound of arc index of links. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **129** (2000), no 3, 491-500.
- [2] E. BELTRAMI, Arc index of non-alternating links, in *Knots 2000 Korea, Vol. 1 (Yong-pyong)*, *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), no 3, 431-444.
- [3] D. BENNEQUIN, Entrelacements et ´equations de Pfaff, *Ast´erisque* **107-108** (1983), 87-161.
- [4] P.R. CROMWELL. Embedding knots and links in an open book I: Basic properties. *Topology and its Applications* **64** (1995), 37-58.
- [5] P.R. CROMWELL AND I.J. NUTT. Embedding knots and links in an open book II: bounds on arc index. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **119** (1996), 309-319.
- [6] I.A. DYNNIKOV. Arc-presentation of links. Monotonic simplification. *Fundamenta Mathematicae* (2002).
- [7] D. FUCHS and S. TABACHNIKOV, Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space, *Topology* **36** (1997), no. 5, 1025-1053.
- [8] L.H. KAUFFMAN. An invariant of regular isotopy. *Trans. Amer. Math. Soc.* **318** (1990), 417-471.
- [9] W.B.R. LICKORISH. *An Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag, 1997.
- [10] H. MATSUDA, Links in an open book decomposition and in the standard contact structure, *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), no. 12, 3697-3702.

- [11] H.R. MORTON and E. BELTRAMI. Arc index and the Kauffman polynomial. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **123** (1998), 41-48.
- [12] L. NG. On arc index and maximal Thurston-Bennequin number. arXiv:math/0612356.
- [13] I.J.NUTT. *Braid index of satellite links*, Ph.D. thesis, (University of Liverpool, 1995).
- [14] I.J. NUTT. Arc index and the Kauffman polynomial. *J. Knot Theory Ramif.* **6** (1997), 61-77.
- [15] V.V. PRASOLOV and A.B. SOSSINSKY *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. American Mathematical Society, 1997.
- [16] L. RUDOLPH, A congruence between link polynomials, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **107** (1990), 319-327.
- [17] S. TABACHNIKOV, Estimates for the Bennequin number of Legendrian links from state models for knot polynomials, *Math. Res. Lett.* **4** (1997), no. 1, 143-156.