

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA E APPLICAZIONI (LM-40)



CAMPI VETTORIALI E DIREZIONALI:  
UN'APPLICAZIONE AL RICONOSCIMENTO  
DELLE IMPRONTE DIGITALI

Tesi di Laurea  
*in Geometria*

*Relatore*

Chiar.mo Prof. Riccardo Piergallini

*Laureando*

Alessio Capogrosso



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Impronte digitali</b>	<b>4</b>
1.1 Cenni storici . . . . .	5
1.2 Caratteristiche e classificazione . . . . .	7
1.3 Minuzie e funzione <i>LRO</i> . . . . .	11
<b>2 Campi vettoriali e direzionali</b>	<b>15</b>
2.1 Direzione e orientazione . . . . .	15
2.2 Campi vettoriali . . . . .	16
2.2.1 Curve integrali . . . . .	19
2.2.2 Rappresentazione complessa . . . . .	22
2.3 Campi direzionali . . . . .	22
2.3.1 Azioni e rivestimenti . . . . .	23
2.3.2 Campi direzionali con singolarità . . . . .	29
2.3.3 Curve integrali . . . . .	30
2.3.4 Rappresentazione complessa . . . . .	34
2.4 Indice di Poincaré . . . . .	34

---

2.5	Teorema di Hopf-Poincaré . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Il modello LRO di Scherlock-Monro</b>	<b>45</b>
3.1	Definizione e proprietà del modello . . . . .	45
3.2	Sollevamento del campo direzionale . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Desingularizzazione del campo LRO</b>	<b>56</b>
4.1	Algoritmo di desingularizzazione . . . . .	57
4.1.1	Implementazione in Mathematica . . . . .	61
4.1.2	Esempi . . . . .	66
4.2	Approssimazione dei campi desingularizzati . . . . .	72
4.2.1	Implementazione in Mathematica . . . . .	73
4.2.2	Esempi . . . . .	75
	<b>Conclusione</b>	<b>86</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>88</b>



# Introduzione

Le impronte digitali ad oggi sono uno degli strumenti di riconoscimento più utilizzati sia nell'ambito della sicurezza che in quello forense grazie a due fondamentali caratteristiche: l'immutabilità ovvero la capacità di rimanere sostanzialmente invariate nel tempo e l'individualità, cioè non esistono individui diversi che abbiano le stesse impronte digitali. Il caratteristico disegno di un'impronta digitale è detto *ridge pattern* ed è determinato dall'alternanza di linee bianche e linee nere chiamate *ridge line*. Il *ridge pattern* può presentare delle zone singolari ovvero delle regioni in cui le *ridge line* assumono forme particolari. Si possono distinguere principalmente due tipologie di singolarità, loop e delta, e a seconda del numero, del tipo e della posizione di tali punti singolari si possono suddividere le impronte in cinque categorie: arch, tented arch, loop, double loop e whorl. Questa prima classificazione delle impronte in classi, introdotta per la prima volta dall'antropologo inglese Francis Galton, è supportata da un caso particolare del teorema di Hopf-Poincaré che dimostra formalmente la presenza in ogni impronta dello stesso numero di loop e di delta. La classificazione di Galton rende più veloce la comparazione da parte dei sistemi AFIS (*Automated Fingerprint Identification System*), mentre l'identificazione vera e propria viene poi fatta analizzando

un altro tipo di irregolarità locali chiamate minuzie. Per la rilevazione delle singolarità, l'analisi del pattern e l'estrazione delle minuzie è particolarmente importante la creazione di un'immagine direzionale dell'impronta ovvero un'immagine in cui sono rappresentate le rette tangenti alle ridge line in ogni punto. Tale immagine può essere pensata come la rappresentazione grafica di un campo direzionale chiamato *LRO* (*Local Ridge Orientation*), che ad ogni punto dell'immagine, esclusi i punti singolari, associa l'angolo che la retta tangente alla ridge line in quel punto forma con l'asse delle ascisse. In questo elaborato viene analizzato un modello matematico, presentato da Sherlock e Monro in [13], il cui scopo è quello di definire, conoscendo il tipo e la posizione delle singolarità di un'impronta digitale, un campo direzionale ovunque differenziabile tranne al più in corrispondenza delle singolarità, che possa approssimare il campo *LRO* dell'impronta. L'utilità di tale campo non è quella di fornire valori accurati delle direzioni delle ridge line, ma di permettere di studiarne il comportamento generale. L'obiettivo principale di questo lavoro è ottenere degli invarianti delle impronte a partire dal campo *LRO* utilizzando il campo direzionale di Sherlock-Monro, l'idea di base infatti è quella di considerare il quoziente tra il campo *LRO* e quello di Sherlock-Monro in modo tale da eliminare le singolarità del campo di partenza. Tale campo desingularizzato può essere poi approssimato da un campo sinusoidale controllato da opportuni parametri, il vettore dei parametri che fornisce la migliore approssimazione può essere quindi utilizzato negli algoritmi per il confronto delle impronte come invariante. L'elaborato è strutturato come segue:

Nel primo capitolo possiamo trovare alcuni cenni storici sulle impronte

digitali e la descrizione delle caratteristiche fondamentali delle impronte quali le singolarità e le minuzie.

Nel secondo capitolo invece vengono trattati alcuni argomenti di geometria differenziale fondamentali per la costruzione del modello matematico di *LRO*, come ad esempio la differenza tra campi vettoriali e campi direzionali e la loro relazione con le impronte digitali. Viene inoltre definito l'indice di Poincaré, uno strumento utile per la classificazione delle singolarità e viene dimostrato il teorema di Hopf-Poincaré nel piano.

Nel terzo capitolo viene descritto il modello di Sherlock-Monro, le sue proprietà di invarianza e la sua relazione con il campo *LRO* di partenza. Inoltre viene mostrato un algoritmo per il sollevamento del campo direzionale lungo delle curve.

Infine nel quarto ed ultimo capitolo viene presentato l'algoritmo di desingularizzazione del campo *LRO* di un'impronta digitale e vengono mostrati i campi ottenuti applicando tale algoritmo ad un campione di 50 impronte digitali con il software Wolfram Mathematica 11.0. Vengono inoltre definiti due campi parametrici che sono stati poi utilizzati per approssimare i campi desingularizzati delle 50 impronte sempre con lo stesso software. Infine sono mostrate le approssimazioni ottenute e i grafici dei relativi errori.

# Capitolo 1

## Impronte digitali

La cute o pelle è il rivestimento più esterno del corpo umano ed è formata da due strati, lo strato più in profondità è chiamato *derma* e quello più superficiale *epidermide*. Nello strato basale, uno strato di tessuto connettivo che unisce l'epidermide al derma, sono presenti dei prolungamenti conici di tessuto connettivo, chiamati *papille dermiche*, che si estendono a compenetrare l'epidermide. Le papille dermiche sono poco pronunciate in quasi tutta la superficie del corpo umano mentre sono più alte nella pelle dei polpastrelli delle dita, questo le rende determinanti per la formazione delle impronte digitali infatti, proprio in corrispondenza di queste sporgenze coniche, sulla superficie più esterna della cute si formano dei rilievi, che danno origine ad un'alternanza di creste e solchi chiamata *dermatoglifo*. Un'impronta digitale non è altro che la traccia lasciata dal dermatoglifo. Le impronte digitali assumono la loro forma definitiva al termine del settimo mese di gravidanza e restano sostanzialmente immutate per tutta la vita dell'individuo, a meno che non venga lesionato gravemente il derma. Inoltre le impronte digitali

sono uniche, cioè il disegno delle creste è diverso da individuo a individuo. Dal punto di vista matematico questa caratteristica è impossibile da provare, tuttavia viene ritenuta essere vera sulla base di risultati empirici, infatti l'uguaglianza di due impronte appartenenti a due persone diverse, dalla loro scoperta ad oggi, non è mai stata verificata. Grazie alla loro immutabilità e individualità, da un secolo circa, le impronte digitali sono un valido strumento di identificazione personale.

## 1.1 Cenni storici

Alcuni reperti archeologici evidenziano come le impronte digitali fossero utilizzate già nell'antichità, per esempio nel 500 a.C. i babilonesi le utilizzavano come firma personale sulle tavolette di argilla riguardanti transazioni commerciali. In Cina invece l'imperatore Qin Shin Huang, asceso al trono nel 247 a.C., utilizzava le impronte digitali per apporre il proprio sigillo sui documenti. Anche in Europa sono stati rinvenuti reperti di documenti siglati con impronte digitali risalenti all'epoca dell'Impero romano.

La *dattiloscopia*, cioè lo studio vero e proprio delle impronte digitali, ha però origini molto più recenti: alla fine del XVII secolo d.C., precisamente nel 1665, il medico Marcello Malpighi scrisse uno dei primi documenti scientifici riguardante le creste cutanee, il *De externo tactus organo anatomica observatio*. Qualche anno dopo, nel 1684, il botanico e fisico inglese Nehemiah Grew si occupò di uno studio sulla struttura delle creste e successivamente, nel 1788, l'anatomista tedesco J. C. A. Mayer riuscì ad individuare alcune caratteristiche ricorrenti delle impronte digitali, sostenendo anche la loro

unicità da individuo a individuo. La prima classificazione delle impronte, basata sulla struttura generale delle creste, venne però ideata dal professore di anatomia Jan Evangelista Purkyne, nel 1823. Un altro medico, lo scozzese Henry Faulds, nel 1880 pubblicò un articolo sulla rivista scientifica *Nature*, in cui sosteneva l'individualità delle impronte digitali e ne suggerì un loro possibile utilizzo nell'identificazione dei criminali. Il Dr. Faulds in cerca di un supporto scientifico per dimostrare le sue tesi si rivolse a Sir Francis Galton, un antropologo inglese. Nel 1892 Galton pubblicò *Fingerprints*, un libro nel quale introdusse il concetto di minuzia, ovvero i punti caratteristici di ogni impronta, e suggerì il primo semplice sistema di classificazione di impronte. Nel 1892, Juan Vucetich, un ufficiale di polizia, utilizzò la classificazione di Galton per effettuare la prima identificazione di un criminale per mezzo di impronte. Successivamente, sulla base del lavoro di Galton, mise a punto un sistema di classificazione, pubblicato nel libro *Dactiloscopia comparada* del 1904, che è tuttora in uso in molti paesi di lingua spagnola. In Inghilterra e nel Galles l'introduzione delle impronte per l'identificazione dei criminali cominciò nel 1901, sulla base delle teorie di Galton riviste in seguito da Edward Richard Henry. Il sistema di classificazione di Galton-Henry fu pubblicato nel giugno 1900 e adottato da numerosi uffici di polizia in diversi stati. Mentre il primo caso di utilizzo sistematico delle impronte per l'identificazione di persone negli Stati Uniti risale al 1902 a New York. Si può quindi dire che già nei primi anni del ventesimo secolo, i principi generali alla base della classificazione delle impronte digitali fossero ben compresi, a tal punto da consentire un loro primo utilizzo.

Da questi studi si sono evolute le moderne tecniche e sono nati i primi



Figura 1.1: Ridge pattern di un'impronta digitale.

sistemi automatici di classificazione e identificazione delle impronte digitali, comunemente chiamati AFIS (*Automated Fingerprint Identification System*). Introdotti negli anni '60 negli Stati Uniti, i sistemi AFIS permettono l'archiviazione di un gran numero di impronte in una banca dati, e la rapida effettuazione dei confronti per l'identificazione delle impronte, tramite opportuni algoritmi.

## 1.2 Caratteristiche e classificazione

Un'impronta digitale è determinata dall'alternanza di linee scure corrispondenti alle creste e linee chiare corrispondenti alle valli. Come si può vedere in figura 1.1, le linee lasciate dalle creste, dette *ridge line*, creano un disegno complesso che prende il nome di *ridge pattern*.

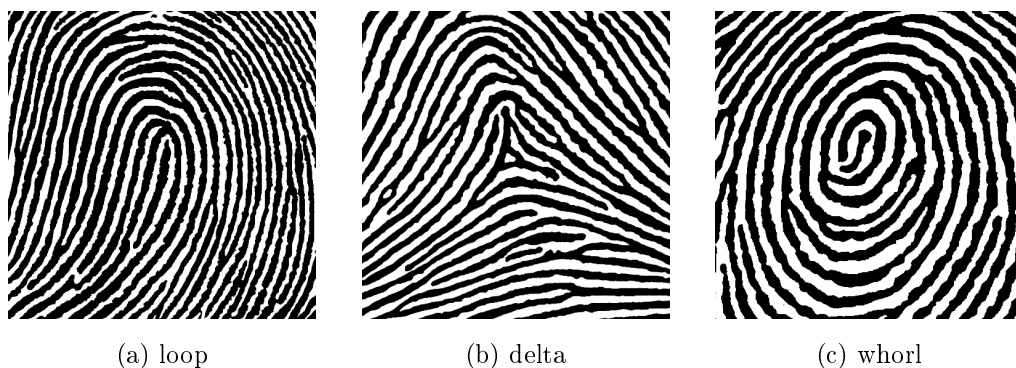


Figura 1.2: Singolarità.

A livello globale le ridge line possono assumere forme particolari in alcune regioni, che prendono il nome di *singolarità* e possono essere classificate, a seconda della forma, in tre principali tipologie: loop, delta e whorl (figura 1.2). In realtà nel modello matematico che presenteremo assumeremo l'esistenza delle sole singolarità di tipo loop e delta, in quanto le singolarità di tipo whorl possono essere pensate come singolarità degeneri, formate dalla sovrapposizione di due loop. Sulla base del tipo e della posizione dei punti singolari, il sistema di Galton-Henry, di cui abbiamo parlato precedentemente, divide le impronte in cinque classi principali (figura 1.3):

- *Arch*: le impronte ad arco hanno le creste che partono da un lato, formano una sorta di arco per poi uscire dal lato opposto, senza formare singolarità.
- *Tented arch*: queste impronte hanno un andamento simile a quelle ad arco, ma in questo caso l'inarcamento delle creste è più accentuato formando così un delta al di sotto di un loop.



- *Loop*: le impronte di questa classe hanno le creste che partono da un lato, si ripiegano, ed escono dallo stesso lato formando un loop e un delta. Sono suddivise a loro volta in *right loop* (figura 1.3c) e *left loop* (figura 1.3d) a seconda della posizione delle singolarità.
- *Double loop*: come dice il nome i ripiegamenti delle creste di queste impronte sono due e vanno in direzioni opposte, formando così due loop e due delta.
- *Whorl*: impronte che presentano una figura chiusa circolare o a spirale, che come già detto può essere pensata come la sovrapposizione di due loop, e due delta.

Possiamo osservare come in ognuna delle cinque categorie di impronte digitali il numero dei loop coincida con il numero dei delta. Questo è conseguenza di un caso particolare del teorema di Hopf-Poincaré, che dimostreremo in seguito, e del fatto che vicino al bordo dell'immagine si può assumere che la direzione delle ridge line sia costante. Tale supposizione è ragionevole infatti osservando una qualunque impronta digitale possiamo notare che ai margini dell'immagine le ridge line sono sostanzialmente orizzontali, salvo un inarcamento più o meno accentuato verso l'alto soprattutto nella parte superiore. Questa prima classificazione delle impronte è utile per rendere più veloce il processo di identificazione di un'impronta da parte di un sistema automatico. Comparando solo impronte della stessa classe infatti, i sistemi automatici riescono a lavorare in tempi accettabili anche su una grande mole di dati.



(a) arch



(b) tented arch



(c) right loop



(d) left loop



(e) double loop



(f) whorl

Figura 1.3: Le cinque classi di impronte digitali.

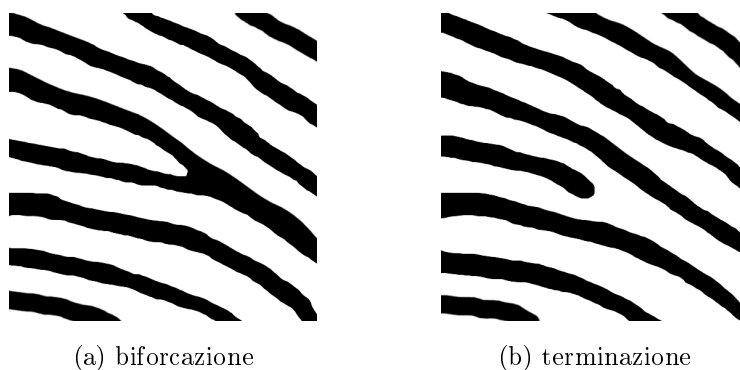


Figura 1.4: Le due tipologie principali di minuzie.

A livello locale, è possibile individuare altre caratteristiche di un'impronta digitale, le ridge line infatti presentano delle discontinuità locali che prendono il nome di *minuzie*. Osservate e classificate per la prima volta da Galton, le minuzie rappresentano un tratto distintivo delle impronte digitali e sono infatti le caratteristiche maggiormente utilizzate nel riconoscimento delle impronte. Esistono diverse tipologie di minuzie, ma tutte sono riconducibili alle seguenti: le *biforcazioni*, punti in cui una ridge line si divide in due o più rami e le *terminazioni*, punti in cui una ridge line si interrompe bruscamente. Come si può notare in figura 1.4 le terminazioni e le biforcazioni sono minuzie *duali*, nel senso che ad una terminazione di una cresta corrisponde una biforcazione di una valle e viceversa.

### 1.3 Minuzie e funzione *LRO*

La maggior parte dei sistemi automatici per il confronto di impronte digitali si basa sulla corrispondenza delle minuzie, di conseguenza l'estrazione

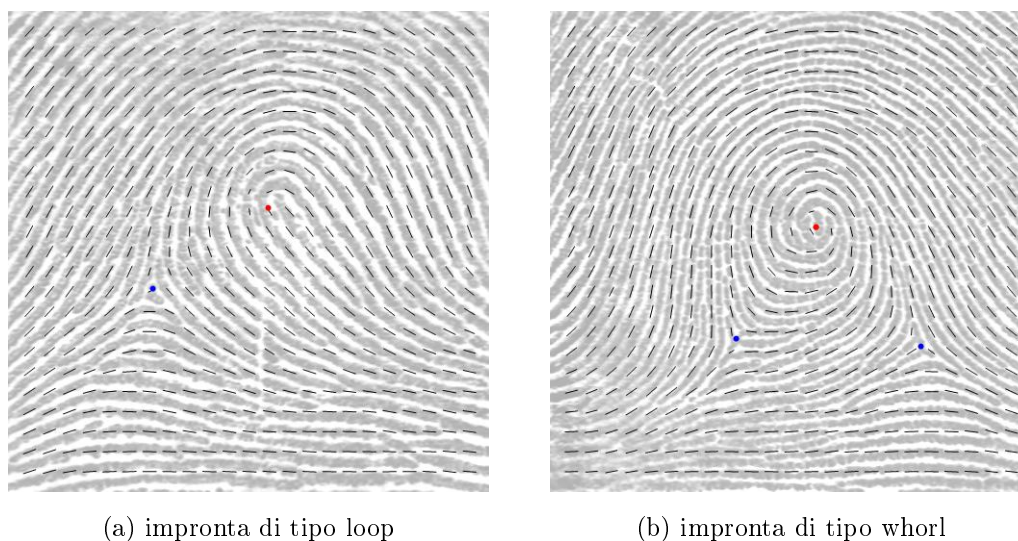


Figura 1.5: Due esempi di immagine direzionale.

delle minuzie è un compito estremamente importante e una notevole quantità di ricerche è stata dedicata a questo argomento ([10], et al.).

Senza entrare troppo nei dettagli l'estrazione delle minuzie si articola in diversi passaggi, il primo consiste nella segmentazione, ovvero la separazione dell'area di foreground (dove è contenuta l'impronta) da quella di background (lo sfondo).

Il secondo passaggio è quello della creazione di un'immagine direzionale, cioè un'immagine in cui vengono determinate le rette tangenti alle ridge line in ogni punto (figura 1.5). Possiamo definire la *direzione* di una ridge line in un punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  come l'angolo  $\theta$  che la retta tangente in  $(x, y)$  alla ridge line forma con l'asse delle ascisse. La funzione continua che associa ad ogni punto delle ridge line la sua direzione, è chiamata  $LRO$  (*Local Ridge Orientation*). Poiché una retta passante per un punto è univocamente determinata dall'angolo  $\theta$  modulo  $\pi\mathbb{Z}$ , possiamo pensare l'immagine direzio-

nale come la rappresentazione grafica della funzione *LRO*. A questo punto si ha già la prima classificazione, i sistemi AFIS infatti già dall'immagine direzionale possono rilevare eventuali singolarità globali (loop, delta, whorl) e classificare l'impronta digitale in una delle cinque classi principali.

Un ulteriore passo è costituito dall'*enhancement*, un processo che, basandosi sull'immagine direzionale precedentemente ottenuta, ha come scopo quello di migliorare la qualità dell'immagine dell'impronta. Non sempre le immagini delle impronte digitali sono di ottima qualità, anzi, possono avere aree mancanti o essere degradate a causa del rumore o delle condizioni della pelle, che può presentare tagli e abrasioni. Le aree di scarsa qualità possono portare a diversi problemi, come per esempio alla rilevazione di false minuzie.

Infine per la vera e propria *localizzazione* delle minuzie possono essere utilizzati diversi metodi, alcuni basati sulla binarizzazione dell'immagine e altri che operano direttamente sull'immagine in scala di grigi. Un esempio di metodo basato sulla binarizzazione è il seguente: una volta convertita l'immagine in un'immagine binaria viene eseguito il *thinning*, che riduce ogni linea nera ad un pixel di larghezza, a questo punto è sufficiente considerare per ogni pixel un intorno quadrato  $3 \times 3$  e contare quanti pixel neri ci sono in tale intorno escluso il pixel centrale, se ce ne sono 2 il punto è interno ad una cresta, se ce n'è soltanto uno siamo in presenza di una terminazione, se ne contiamo 3 abbiamo una biforcazione. Un esempio di metodo che opera direttamente sull'immagine in scala di grigi invece è quello proposto da Maio e Maltoni in [9].

Possiamo osservare come la funzione *LRO* sia di fondamentale importanza in questo processo di estrazione delle minuzie. Generalmente l'approccio

---

che utilizzano i sistemi AFIS per definire la funzione *LRO* è quello di dividere l'immagine dell'impronta in diverse aree mediante una griglia regolare, calcolare il valore *LRO* in determinati punti della griglia (esistono diversi metodi per il calcolo della direzione delle ridge line in un punto, alcuni di questi sono illustrati in [10]) e approssimare la direzione di tutti gli altri punti con un algoritmo di interpolazione. Questo approccio non è particolarmente efficace soprattutto nelle aree in cui la curvatura delle ridge line è molto alta, ovvero in prossimità delle singolarità. Il modello che andremo ad analizzare invece utilizza un campo direzionale  $\theta$ , ovunque differenziabile tranne al più in un numero finito di punti singolari, per approssimare la funzione *LRO*. Tale campo  $\theta$  non fornisce valori accurati delle direzioni delle ridge line nei singoli punti ma permette di studiarne il comportamento generale. Può quindi essere di grande utilità nella creazione dell'immagine direzionale e di conseguenza nella classificazione del ridge pattern, ma anche nel processo di enhancement e per il riconoscimento delle false minuzie.

# Capitolo 2

## Campi vettoriali e direzionali

In questo capitolo daremo uno sguardo ad alcuni concetti chiave della topologia e della geometria differenziale che ci saranno utili nei capitoli successivi per la realizzazione del modello matematico di *LRO*. In particolare definiremo i campi vettoriali e i campi direzionali, ne analizzeremo le proprietà, le differenze e osserveremo il loro legame con il ridge pattern di un'impronta digitale. Dopodiché introdurremo il concetto di indice di Poincaré, uno strumento utile per classificare le singolarità dei campi precedentemente definiti. Infine enunceremo e dimostreremo un caso particolare del teorema di Hopf-Poincaré che spiega la presenza, in tutte le impronte digitali, dello stesso numero di loop e delta.

### 2.1 Direzione e orientazione

Un qualunque vettore non nullo nel piano forma un certo angolo  $\theta$  con l'asse cartesiano delle ascisse. Quest'angolo  $\theta$ , compreso tra 0 e  $2\pi$  è detto

*orientazione* del vettore. Se assumiamo che i vettori abbiano modulo unitario come in figura 2.1b, possiamo identificare le orientazioni con i punti della circonferenza unitaria  $S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Nella figura 2.1a invece è mostrata una linea retta passante per l'origine del piano; la retta forma con l'asse delle ascisse un angolo  $\theta$  che è compreso tra 0 e  $\pi$  poiché la retta è invariante per rotazioni di un angolo multiplo di  $\pi$ . Tale angolo è chiamato *direzione* della retta. Ricordiamo ora la definizione di retta proiettiva.

**Definizione 2.1.** La *retta proiettiva*  $\mathbb{P}^1$  è definita come l'insieme quoziente  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})/\sim$  dove  $\sim$  è la seguente relazione d'equivalenza:

$$(x, y) \sim (\lambda x, \lambda y) \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La relazione  $\sim$  identifica tra loro tutti i punti (diversi dall'origine) che appartengono ad una stessa retta passante per l'origine del piano, l'insieme quoziente  $\mathbb{P}^1$  pertanto rappresenta questo fascio di rette. Poiché una retta passante per un punto, in questo caso l'origine, è univocamente determinata dalla sua inclinazione, cioè dall'angolo  $\theta$ , le direzioni possono essere pensate come elementi della retta proiettiva  $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} (\cong S^1/\mathbb{Z}_2 \cong S^1)$ .

## 2.2 Campi vettoriali

Un *campo vettoriale* su uno spazio euclideo è una funzione che associa ad ogni punto dello spazio un vettore tangente in quel punto. Generalmente i campi vettoriali sono utilizzati per modellare o rappresentare alcune grandezze vettoriali negli spazi euclidei, come ad esempio la velocità di un fluido o la forza esercitata da un campo gravitazionale o magnetico. Prima di vedere



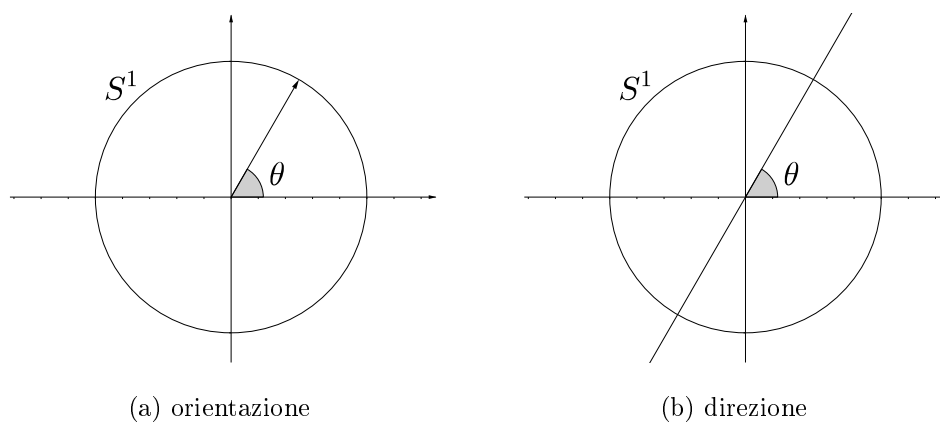


Figura 2.1: Differenza tra direzione e orientazione.

il legame con le impronte digitali e di dare la definizione formale abbiamo bisogno di qualche passaggio preliminare.

Sia  $U \subset \mathbb{R}^m$  un aperto e  $x_0 \in U$ , possiamo definire lo spazio tangente in  $x_0$  a  $U$  come

$$T_{x_0}U = \{v = \overrightarrow{x_0x} \mid x \in \mathbb{R}^m\}.$$

La regola del parallelogramma induce sullo spazio tangente  $T_{x_0}U$  una struttura algebrica che lo rende uno spazio vettoriale di dimensione  $m$ . Esiste inoltre un isomorfismo tra  $T_{x_0}U$  e  $\mathbb{R}^m$  dato dalla seguente applicazione:

$$\begin{aligned} T_{x_0}U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v = \overrightarrow{x_0x} &\longmapsto x - x_0, \end{aligned}$$

che possiamo pensare come una traslazione che porta il punto  $x_0$  nell'origine. Lo stesso ragionamento si può ripetere prendendo come aperto  $\mathbb{R}^m$  stesso, concludiamo quindi che

$$T_x\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

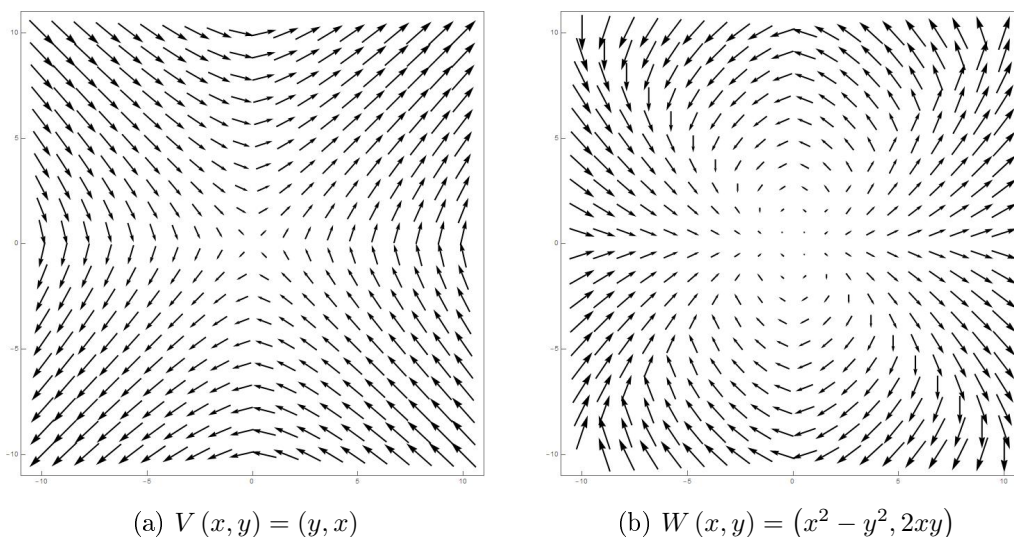


Figura 2.2: Rappresentazione visiva di  $V$  e  $W$ .

Visto la natura bidimensionale di un'impronta digitale il caso che più interessa a noi è il caso in cui  $m = 2$ , definiamo quindi i campi vettoriali su  $\mathbb{R}^2$ .

**Definizione 2.2.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^2$  un aperto. Un *campo vettoriale* su  $U$  è una funzione che ad ogni punto di  $p \in U$  associa un vettore di  $T_pU$ , ovvero un vettore tangente a  $U$  in  $p$ .

Per l'osservazione precedente possiamo identificare  $T_pU$  con  $\mathbb{R}^2$  e considerare difatti un *campo vettoriale* come una funzione  $V: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dove dominio e codominio sono pensati in due modi differenti, il primo come varietà (insieme di punti), il secondo come spazio vettoriale (insieme di vettori). Nella figura 2.2 possiamo vedere la rappresentazione visiva di due campi vettoriali sul piano.

Generalmente si richiede che i campi vettoriali su  $\mathbb{R}^m$  siano differenziabili, quindi continui.

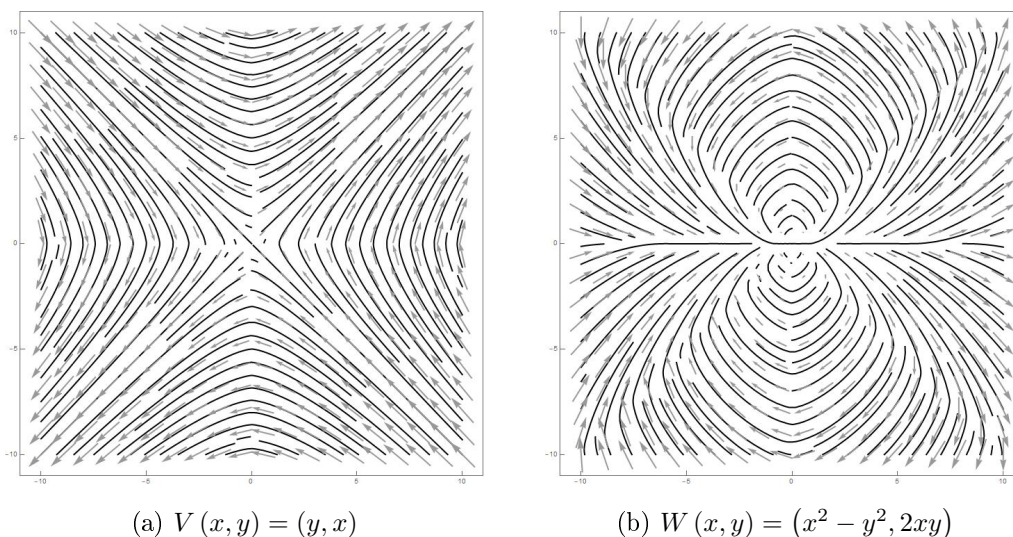
### 2.2.1 Curve integrali

Dato un campo vettoriale  $V$  è naturale chiedersi se esistano delle curve i cui vettori tangenti coincidano con il campo  $V$  lungo di esse. Curve con questa caratteristica si dicono *curve integrali* del campo  $V$ . In un campo di velocità di un fluido ad esempio, le curve integrali rappresentano le traiettorie delle singole particelle. I campi vettoriali trovano un'applicazione anche nell'ambito delle impronte digitali in quanto le ridge line di un'impronta possono essere pensate come curve integrali di un opportuno campo vettoriale, la funzione *LRO* dell'impronta può essere quindi modellata da un campo vettoriale, che in realtà contiene informazioni anche sull'orientazione dei vettori e non solo sulla direzione.

**Definizione 2.3.** Sia  $V$  un campo vettoriale su  $U \subset \mathbb{R}^2$ , si dice *curva integrale* di  $V$  una qualunque curva (parametrizzata)  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  tale che:

$$\alpha'(t) = V(\alpha(t)) \quad \forall t \in I.$$

Un esempio di curva integrale, anche se degenera, è il seguente: se  $p$  è uno zero di  $V$  allora la curva costante  $\alpha(t) = p$  è una curva integrale di  $V$ . In questo caso  $p$  si dice *punto singolare* di  $V$ , mentre un punto in cui  $V$  non si annulla è detto *regolare*. Nella figura 2.3 invece sono raffigurate le curve integrali dei campi vettoriali visti precedentemente,  $V(x, y) = (y, x)$  e  $W(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ . Possiamo notare come curve integrali distinte

Figura 2.3: Curve integrali di  $V$  e  $W$ .

non si incontrino mai, questo è dovuto al seguente teorema di esistenza ed unicità.

**Teorema 2.4.** *Sia  $V$  un campo vettoriale differenziabile su  $U \subset \mathbb{R}^2$ , allora per ogni  $p = (x_0, y_0) \in U$*

- *esiste  $I \subset \mathbb{R}$  intorno di 0 (dipendente da  $p$ ) e una curva  $\alpha: I \rightarrow U$  che è integrale per  $V$  e tale che  $\alpha(0) = p$ ;*
- *se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due curve integrali per  $V$  tali che  $\alpha(0) = \beta(0) = p$  allora coincidono nell'intersezione dei loro domini.*

*Dimostrazione.* Cerchiamo una curva  $\alpha(t)$  definita in un opportuno intorno di 0 tale che

$$\alpha'(t) = V(\alpha(t)) \quad \text{e} \quad \alpha(0) = p. \quad (2.1)$$

In coordinate possiamo scrivere la curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  e il campo vettoriale  $V(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ . In questo modo le condizioni 2.1 si

traducono nel seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = V_x(x(t), y(t)) \\ y'(t) = V_y(x(t), y(t)) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Per ipotesi  $V$  è differenziabile e quindi anche localmente lipschitziano. A questo punto la tesi segue dal teorema di esistenza e unicità locale della soluzione per i problemi di Cauchy.  $\square$

**Definizione 2.5.** Sia  $V$  un campo vettoriale su  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  una sua curva integrale. Allora  $\alpha$  è detta *massimale* se non esistono curve integrali  $\beta: J \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  con  $I \subsetneq J$  e  $\beta|_I = \alpha$ .

**Teorema 2.6.** Se  $V$  è un campo vettoriale differenziabile allora per ogni punto  $p \in U \subset \mathbb{R}^2$  esiste un'unica  $\alpha: I \rightarrow U$  curva integrale massimale di  $V$  uscente da  $p$  cioè tale che  $\alpha(0) = p$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\{\alpha_j: I_j \rightarrow U\}_{j \in J}$  la famiglia delle curve integrali di  $V$  uscenti da  $p$  che è sicuramente non vuota per il primo punto del teorema 2.4. Ora possiamo definire l'intervallo  $I = \bigcup_{j \in J} I_j$  e la curva  $\alpha: I \rightarrow U$  tale che  $\alpha(t) = \alpha_k(t)$  se  $t \in I_k$ . Per il secondo punto del teorema 2.4  $\alpha_l = \alpha_k$  nell'intersezione  $I_l \cap I_k$  per ogni  $l, k \in J$ , segue che  $\alpha$  è ben definita ed è chiaramente una curva integrale massimale per  $V$  uscente da  $p$ .  $\square$

**Definizione 2.7.** Un campo vettoriale  $V$  su  $\mathbb{R}^2$  è detto *completo* se tutte le sue curve integrali massimali sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

### 2.2.2 Rappresentazione complessa

I campi vettoriali sul piano possono essere pensati anche in un altro modo, ricordiamo che c'è una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di  $\mathbb{R}^2$  e quelli di  $\mathbb{C}$ , infatti un qualunque numero complesso  $z$  può essere espresso come  $x+iy$  dove  $x$  e  $y$  sono numeri reali e  $i$  è l'unità immaginaria. Scritto in questa notazione,  $z$  corrisponde in modo univoco al punto  $(x, y)$  del piano  $\mathbb{R}^2$  e questa corrispondenza biunivoca determina, tra  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$ , sia un isomorfismo di spazi vettoriali (reali) che un diffeomorfismo tra varietà differenziabili (reali). Un campo vettoriale sul piano perciò può essere anche pensato come una funzione da  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{C}$ . Consideriamo ad esempio i campi vettoriali  $V(x, y) = (y, x)$  e  $W(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  già visti in precedenza, questi possono essere scritti anche in questo modo:  $V(z) = i\bar{z}$  (dove  $\bar{z}$  indica il coniugato di  $z$ ) e  $W(z) = z^2$ .

## 2.3 Campi direzionali

Un campo direzionale su  $\mathbb{R}^2$  è una funzione che associa ad ogni punto  $p \in \mathbb{R}^2$  una retta tangente a  $\mathbb{R}^2$  in  $p$  e possono essere considerati come l'analogo proiettivo dei campi vettoriali. L'importanza di questi campi è emersa recentemente soprattutto nell'ambito della fisica della materia soffice, dove sono anche chiamati *campi nematici*. I cristalli liquidi nematici ad esempio possono essere modellati da campi direzionali o appunto nematici. Nell'ambito delle impronte digitali i campi direzionali, così come quelli vettoriali, sono utilizzati per rappresentare la funzione *LRO* e quindi descrivere il compor-

tamento delle ridge line, ma rispetto a quest'ultimi, sono più adatti a questo scopo soprattutto nelle zone singolari dell'impronta.

**Definizione 2.8.** Un *campo direzionale*  $D$  su  $\mathbb{R}^2$  è una funzione che ad ogni punto  $p \in \mathbb{R}^2$  associa un sottospazio vettoriale  $D(p) \subset T_p\mathbb{R}^2$  di dimensione 1.

Poiché, per ogni punto  $p \in \mathbb{R}^2$ , lo spazio tangente  $T_p\mathbb{R}^2$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^2$  stesso, possiamo pensare un campo direzionale come una funzione di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{P}^1$  cioè come una funzione che ad ogni punto del piano associa una direzione proprio come la funzione *LRO* di un'impronta digitale. La retta proiettiva è dotata di una struttura differenziabile quindi, così come per i campi vettoriali, ha senso richiedere che un campo direzionale sia differenziabile.

Ogni campo vettoriale  $V$  non nullo su  $\mathbb{R}^2$  determina un campo direzionale  $D$  così definito:

$$D(p) = \langle V(p) \rangle.$$

In questo caso  $V$  si dice *generatore* di  $D$ . In figura 2.4 possiamo vedere una rappresentazione grafica di due campi direzionali. Grazie ad alcuni risultati della teoria dei rivestimenti vedremo che ogni campo direzionale sul piano  $\mathbb{R}^2$  che sia almeno continuo è *orientabile*, cioè ammette un generatore (in realtà se ne ammette uno ne ammette infiniti), cosa non sempre vera per i campi direzionali con singolarità che definiremo in seguito.

### 2.3.1 Azioni e rivestimenti

**Definizione 2.9.** Sia  $G$  un gruppo e  $X$  uno spazio topologico. Una funzione  $\varphi: G \times X \rightarrow X$  è detta *azione topologica* di  $G$  su  $X$  se e solo se valgono le

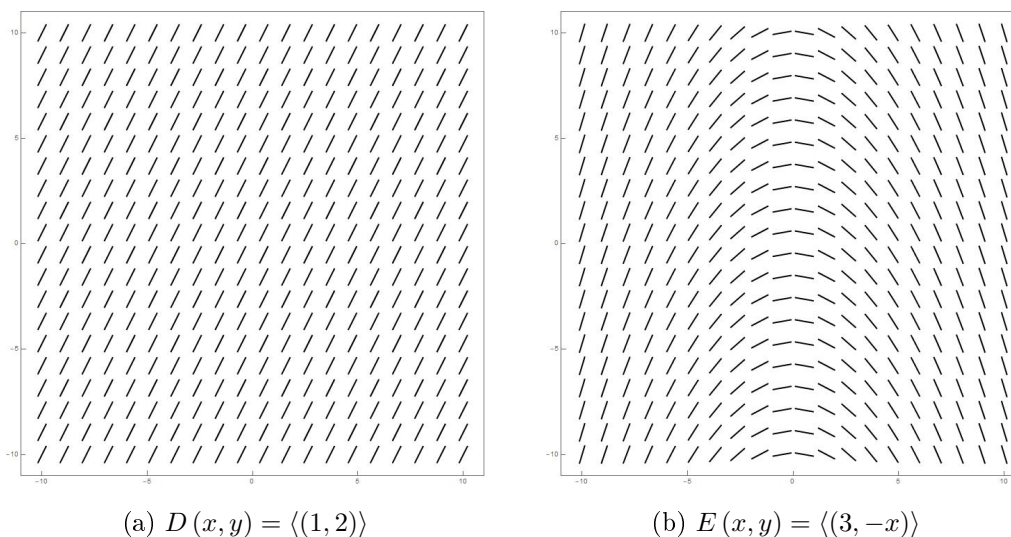


Figura 2.4: Rappresentazione di due campi direzionali orientabili.

seguenti condizioni:

- $\varphi(e_G, x) = x \quad \forall x \in X$ ,
- $\varphi(g_2, \varphi(g_1, x)) = \varphi(g_2 g_1, x) \quad \forall g_1, g_2 \in G \text{ e } x \in X$ ,
- $\varphi_g: X \rightarrow X$  è continua  $\forall g \in G$ ,

dove  $e_G$  è l'elemento neutro di  $G$ . La coppia  $(X, \varphi)$ , a volte indicata anche solo con  $X$ , viene chiamata  $G$ -spazio.

Possiamo osservare che per ogni  $g \in G$  la funzione  $\varphi_g: X \rightarrow X$  è un omeomorfismo, infatti oltre ad essere continua ha anche inversa continua data da  $\varphi_{g^{-1}}$ . Intuitivamente possiamo quindi pensare  $G$  come un gruppo di omeomorfismi di  $X$ .

Dato un  $G$ -spazio  $(X, \varphi)$  è possibile definire lo spazio  $X/G$ , detto anche *spazio delle orbite*, ovvero uno spazio topologico quoziente indotto dalla



seguinte relazione d'equivalenza:

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tale che } \varphi_g(x) = y.$$

**Proposizione 2.10.** *La proiezione  $\pi: X \rightarrow X/G$  è una funzione continua e aperta.*

*Dimostrazione.* La continuità di  $\pi$  segue immediatamente dalla definizione di topologia quoziente:  $U \subset X/G$  è aperto se e solo se  $\pi^{-1}(U) \subset X$  è aperto.

Proviamo che  $\pi$  è aperta. Sia  $U \subset X$  un aperto, per come è definita la topologia in uno spazio quoziente  $\pi(U)$  è aperto in  $X/G$  se e solo se  $\pi^{-1}(\pi(U))$  è aperto in  $X$ . Ora

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U)\} = \{x \in X \mid \exists y \in U : \pi(x) = \pi(y)\},$$

ma due elementi in  $X$  hanno la stessa immagine tramite la proiezione  $\pi$  solo se sono equivalenti in  $X$ , quindi

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X \mid \exists y \in U : x = \varphi_g(y) \text{ per qualche } g \in G\} \\ &= \{x \in X \mid x \in \varphi_g(U) \text{ per qualche } g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} \varphi_g(U). \end{aligned}$$

Per ogni  $g \in G$  l'insieme  $\varphi_g(U)$  è un aperto perché  $\varphi_g$  è un omeomorfismo, segue che anche  $\bigcup_{g \in G} \varphi_g(U)$  è aperto in quanto unione di aperti e quindi la tesi.  $\square$

**Esempio 2.11.** Consideriamo la circonferenza  $S^1$  e l'azione  $\varphi$  di  $\mathbb{Z}_2 \cong \{-1, 1\}$  (gruppo moltiplicativo) su  $S^1$  così definita:

$$\varphi_1(x) = x \quad \text{e} \quad \varphi_{-1}(x) = -x. \quad (2.3)$$

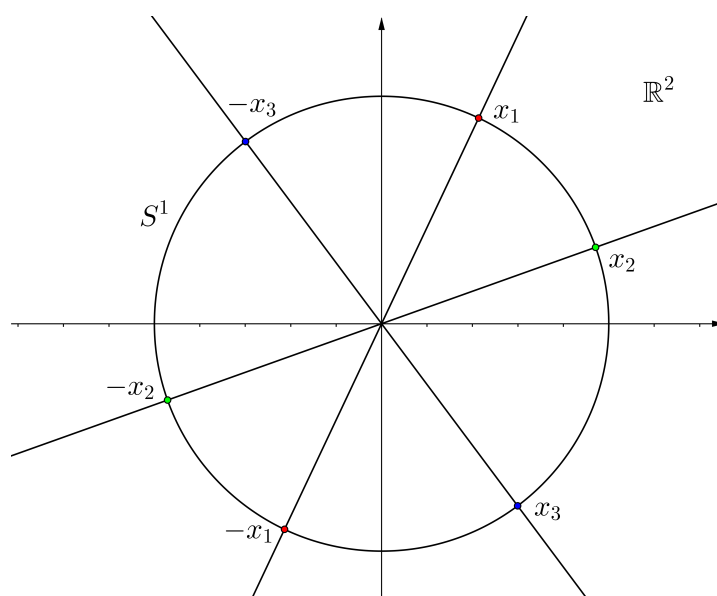


Figura 2.5: Identificando i punti diametralmente opposti di  $S^1$  si ottiene  $\mathbb{P}^1$ .

Questa è chiaramente un'azione topologica e la relazione d'equivalenza indotta identifica i punti antipodali di  $S^1$ , cioè ogni punto  $x \in S^1$  è equivalente a  $-x$ . Se ora consideriamo  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  e le rette passanti per l'origine di  $\mathbb{R}^2$ , possiamo osservare che ognuna di queste interseca  $S^1$  in due punti antipodali (figura 2.5). C'è quindi una corrispondenza biunivoca tra  $S^1/\mathbb{Z}_2$  e la retta proiettiva  $\mathbb{P}^1$ . Tale corrispondenza biunivoca è un omeomorfismo in quanto funzione continua e aperta.

**Definizione 2.12.** Una funzione continua  $p: X \rightarrow Y$  tra spazi topologici è detta *rivestimento* se e solo se per ogni  $y \in Y$  esiste  $\tilde{U} \subset Y$  intorno aperto di  $y$  tale che

- $p^{-1}(\tilde{U}) = U = \bigsqcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ ,
- $p|_{U_i}: U_i \rightarrow \tilde{U}$  è omeomorfismo per ogni  $i \in I$ .

Un rivestimento  $p: X \rightarrow Y$  è un omeomorfismo locale ma, in generale non è vero il viceversa.

**Definizione 2.13.** Sia  $\varphi$  l'azione di un gruppo  $G$  sullo spazio topologico  $X$ , allora  $\varphi$  si dice *propriamente discontinua* se per ogni  $x \in X$  esiste un intorno  $I$  di  $x$  tale che  $\varphi_g(I) \cap I = \emptyset$  per ogni  $g \in G \setminus \{e_G\}$ .

**Proposizione 2.14.** Se  $X$  è un  $G$ -spazio e  $\varphi$  un'azione propriamente discontinua allora  $\pi: X \rightarrow X/G$  è un rivestimento.

*Dimostrazione.* Sia  $x \in X$  e  $I$  un intorno aperto di  $x$  che soddisfa la condizione di discontinuità propria. Per la proposizione 2.10, la proiezione  $\pi$  oltre ad essere continua è anche aperta, quindi  $\pi(I) \subset X/G$  è un aperto. Ripetendo lo stesso ragionamento della dimostrazione della proposizione 2.10 abbiamo che  $\pi^{-1}(\pi(I)) = \bigcup_{g \in G} \varphi_g(I)$  e gli insiemi  $\varphi_g(I)$  sono aperti in  $X$ . In realtà questa è un'unione disgiunta di aperti infatti, ricordando che  $\varphi_{g'}^{-1} = \varphi_{(g')^{-1}}$ , abbiamo

$$\varphi_g(I) \cap \varphi_{g'}(I) = \emptyset \iff \varphi_{(g')^{-1}g}(I) \cap I = \emptyset,$$

ma per la discontinuità propria di  $\varphi$  questo è vero se  $(g')^{-1}g \neq e_G$  cioè se  $g \neq g'$ . Infine la restrizione  $\pi|_{\varphi_g(I)}: \varphi_g(I) \rightarrow \pi(I)$  è un omeomorfismo in quanto funzione continua, aperta e anche iniettiva poiché gli  $\varphi_g(I)$  sono disgiunti tra loro.  $\square$

Riprendendo l'esempio 2.11, l'azione  $\varphi$  di  $\mathbb{Z}_2$  su  $S^1$  è sicuramente propriamente discontinua, infatti in  $\mathbb{Z}_2$  l'unico elemento diverso dall'elemento neutro è  $-1$  perciò è sufficiente dimostrare che per ogni  $x_0 \in S^1$  esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che

$$\varphi_{-1}(I) \cap I = \emptyset. \tag{2.4}$$

Preso quindi un punto  $x_0 \in S^1$  possiamo notare come l'intorno  $I = \{x \in S^1 : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$  per  $\varepsilon$  tale che  $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$  soddisfi la proprietà 2.4. A questo punto per la proposizione 2.14 la proiezione di  $\pi: S^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  è un rivestimento, non solo, possiamo osservare ulteriormente che  $\pi$  è un *rivestimento doppio*, ovvero la controimmagine tramite  $\pi$  di ogni elemento di  $\mathbb{P}^1$  è costituita da esattamente due elementi di  $S^1$ .

Un campo vettoriale  $V$  mai nullo su  $\mathbb{R}^2$ , può sempre essere *normalizzato*, ovvero si può considerare il campo vettoriale così definito:

$$\tilde{V}(p) = \frac{V(p)}{\|V(p)\|} \quad \forall p \in \mathbb{R}^2.$$

In ogni punto  $\tilde{V}$  ha la stessa direzione e lo stesso verso di  $V$  ma modulo unitario, è quindi una funzione a valori in  $S^1$ . Enunciamo ora il teorema di sollevamento delle applicazioni continue la cui dimostrazione si può trovare in [11].

**Teorema 2.15** (Sollevamento delle applicazioni continue). *Siano  $S, X, Y$  spazi topologici con  $S$  localmente connesso per archi e semplicemente connesso e  $p: X \rightarrow Y$  un rivestimento. Sia inoltre  $s_0 \in S$ , allora per ogni  $f: S \rightarrow Y$  continua e per ogni  $x_0 \in X$  tale che  $f(s_0) = p(x_0)$  esiste un'unica  $\tilde{f}: S \rightarrow X$  continua tale che  $\tilde{f}(s_0) = x_0$  e  $p \circ \tilde{f} = f$ .*

**Osservazione 2.16.** *Se  $X$  e  $Y$  sono varietà differenziabili e il rivestimento  $p: X \rightarrow Y$  è un'applicazione differenziabile e regolare, allora il sollevamento di un'applicazione differenziabile è differenziabile.*

Consideriamo ancora l'esempio 2.11, il rivestimento  $\pi: S^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  è differenziabile e regolare, quindi il teorema 2.15 ci dice che, preso un punto  $p \in \mathbb{R}^2$

e un campo direzionale differenziabile  $D: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , per ogni  $x_0 \in S^1$  tale che  $\pi(x_0) = D(p)$  esiste un unico campo vettoriale differenziabile  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$  tale che  $V(p) = x_0$  e  $\pi \circ V = D$ . In altre parole ogni campo direzionale differenziabile su  $\mathbb{R}^2$  è orientabile, cioè ammette un campo vettoriale differenziabile tale che  $\langle V(p) \rangle = D(p)$  per ogni  $p \in \mathbb{R}^2$ . In realtà poiché il rivestimento  $\pi: S^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  è doppio, possiamo affermare che per ogni  $p \in \mathbb{R}^2$  esistono esattamente due punti  $x_0, x_1 \in S^1$  tali che  $\pi(x_0) = \pi(x_1) = D(p)$  e  $x_1 = -x_0$  e quindi due campi vettoriali differenziabili (a valori in  $S^1$ ) che generano  $D$  e questi sono uno l'opposto dell'altro. Al posto di  $\mathbb{R}^2$  avremmo potuto considerare un qualunque aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$  semplicemente connesso per il teorema 2.15.

### 2.3.2 Campi direzionali con singolarità

I campi direzionali differenziabili su  $\mathbb{R}^2$  appena visti non sono molto interessanti per i nostri scopi, in quanto spesso il ridge pattern delle impronte digitali presenta delle singolarità, dobbiamo quindi introdurre e studiare i campi direzionali con singolarità.

**Definizione 2.17.** Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , un *campo direzionale*  $D$  con *singolarità isolate*  $p_1, \dots, p_n \in U$  è un campo direzionale definito su  $U \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ .

Se consideriamo ad esempio un campo vettoriale  $V$  su  $U \subset \mathbb{R}^2$  con zeri isolati in  $p_1, \dots, p_n \in U$ , questo genera un campo direzionale con singolarità in corrispondenza degli zeri. A differenza dei campi direzionali definiti su tutto  $\mathbb{R}^2$ , il viceversa non è sempre vero, cioè non tutti i campi direzionali con

singularità sono generati da un campo vettoriale. Una delle ipotesi fondamentali del teorema 2.15 infatti è che lo spazio  $S$  sia semplicemente connesso, e in questo caso l'insieme  $U \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  non lo è. Quello che possiamo fare però è applicare il teorema 2.15 localmente e dimostrare quindi la seguente proposizione.

**Proposizione 2.18.** *Sia  $U \subset \mathbb{R}^2$  un aperto e  $D: U \rightarrow \mathbb{P}^1$  un campo direzionale differenziabile, allora per ogni  $p \in U$  esiste un intorno  $U_0$  e un campo vettoriale  $V$  differenziabile, definito in  $U_0$ , tale che*

$$\langle V(q) \rangle = D(q) \quad \forall q \in U_0.$$

In figura 2.6 possiamo vedere una rappresentazione grafica dei campi direzionali generati dai campi vettoriali visti nella sezione precedente,  $V(x, y) = (y, x)$  e  $W(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ , che hanno entrambi una singularità nell'origine.

### 2.3.3 Curve integrali

Similmente a quanto fatto per i campi vettoriali si può definire il concetto di *curva integrale* anche per i campi direzionali.

**Definizione 2.19.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^2$  un aperto e  $D$  un campo direzionale su  $U$ , si dice *curva integrale* di  $D$  una qualunque curva (parametrizzata)  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  tale che:

$$\langle \alpha'(t) \rangle = D(\alpha(t)) \quad \forall t \in I.$$

**Teorema 2.20.** *Sia  $U \subset \mathbb{R}^2$  un aperto e  $D: U \rightarrow \mathbb{P}^1$  un campo direzionale differenziabile, allora per ogni punto  $p \in U$  esiste una curva integrale massimale di  $D$  passante per  $p$ .*

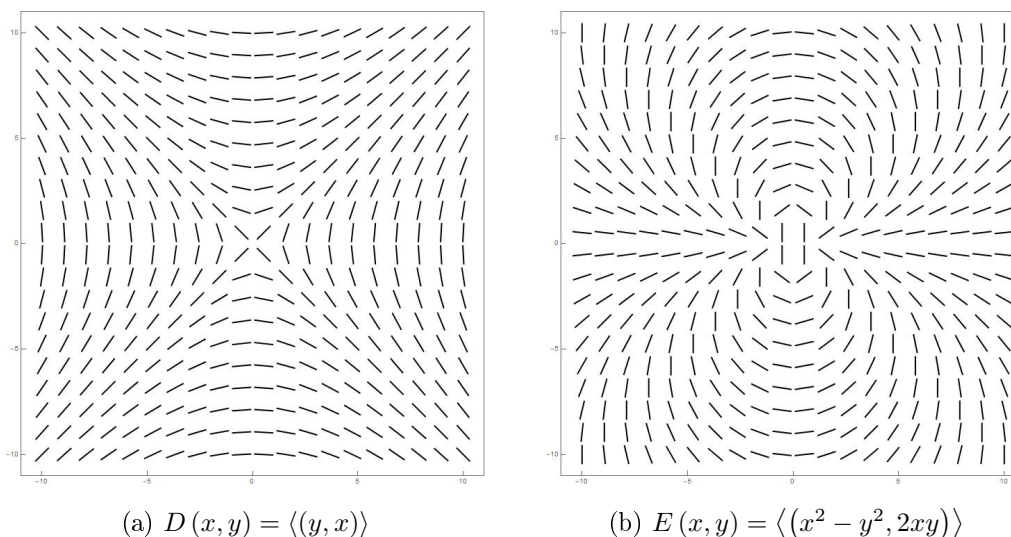


Figura 2.6: Rappresentazione di due campi direzionali con singolarità nell'origine.

*Dimostrazione.* Fissiamo un punto  $p \in U$ , chiaramente nel caso in cui il campo direzionale  $D$  sia orientabile e  $V$  sia il suo generatore, l'unica curva integrale massimale di  $V$  passante per  $p$ , che esiste per il teorema 2.6, è anche una curva integrale massimale di  $D$ .

Se invece  $D$  non è orientabile, poniamo innanzitutto  $p_0 = p$ , per la proposizione 2.18 esiste un campo vettoriale  $V_0$  che genera  $D$  in un intorno  $U_0$  di  $p_0$ . Il teorema 2.6 ci garantisce l'esistenza di un'unica curva integrale massimale  $\alpha_0: I_0 \rightarrow U_0$  di  $V_0$  uscente da  $p_0$  che è una curva integrale anche di  $D$ . A questo punto possiamo considerare un qualsiasi  $t_0$  in  $I_0$  e porre  $p_1 = \alpha_0(t_0)$ , per lo stesso ragionamento di prima, in un intorno  $U_1$  di  $p_1$  esiste un campo vettoriale  $V_1$  che genera  $D$  in  $U_1$  e quindi la sua curva integrale uscente da  $p_1$ ,  $\alpha_1: I_1 \rightarrow U_1$  è una curva integrale di  $D$ . Possiamo osservare come sia  $V_0$  che  $V_1$  generano  $D$  in  $U_0 \cap U_1$ , perciò in tale intersezione o coincidono o sono opposti. Di conseguenza anche le rispettive curve integrali  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  o

coincidono o sono opposte, in ogni caso è possibile concatenarle, se necessario cambiando il verso ad una delle due, e ottenere una curva integrale di  $D$  in  $U_0 \cup U_1$ . Possiamo iterare questo procedimento fino ad ottenere una curva integrale di  $D$  che sia massimale.  $\square$

Possiamo notare come, a differenza di quello che accade con i campi vettoriali, una curva integrale di un campo direzionale  $D$  non è unica (come curva parametrizzata). Se  $\alpha(t)$  è una curva integrale di  $D$  definita in un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , allora qualunque riparametrizzazione regolare di  $\alpha(t)$  è una curva integrale. Sia infatti  $t(s)$  una funzione a valori in  $I$  tale che  $\frac{dt}{ds} \neq 0$  nell'intervallo di definizione  $J \subset \mathbb{R}$ , se definiamo  $\beta(s) = \alpha(t(s))$  allora per ogni  $s_0 \in J$ :

$$\beta'(s_0) = \frac{d\alpha}{ds}(t(s_0)) = \frac{d\alpha}{dt}(t_0) \cdot \frac{dt}{ds}(s_0) = \frac{dt}{ds}(s_0) \cdot \alpha'(t_0).$$

La regolarità di  $t(s)$  implica che  $\beta'(s_0)$  è un multiplo di  $\alpha'(t_0)$  e quindi lo spazio vettoriale generato è lo stesso.

Il concetto di orientazione di uno spazio vettoriale, da non confondere con l'orientazione definita nella prima sezione di questo capitolo, si può estendere anche alle varietà differenziabili. Senza entrare nei dettagli, l'*orientazione* di una varietà unidimensionale cioè una curva, in particolare una curva integrale di un campo vettoriale, consiste nella scelta arbitraria di un verso di percorrenza. Se un campo vettoriale differenziabile  $V$  è regolare su  $U \subset \mathbb{R}^2$  le curve integrali possono essere orientate coerentemente le une con le altre, cioè curve integrali "vicine" possono essere percorse nello stesso verso, in tal caso le curve si dicono *coorientabili*. In questo caso per ogni curva integrale di  $V$  possiamo considerare l'orientazione indotta dalla parametrizzazione che



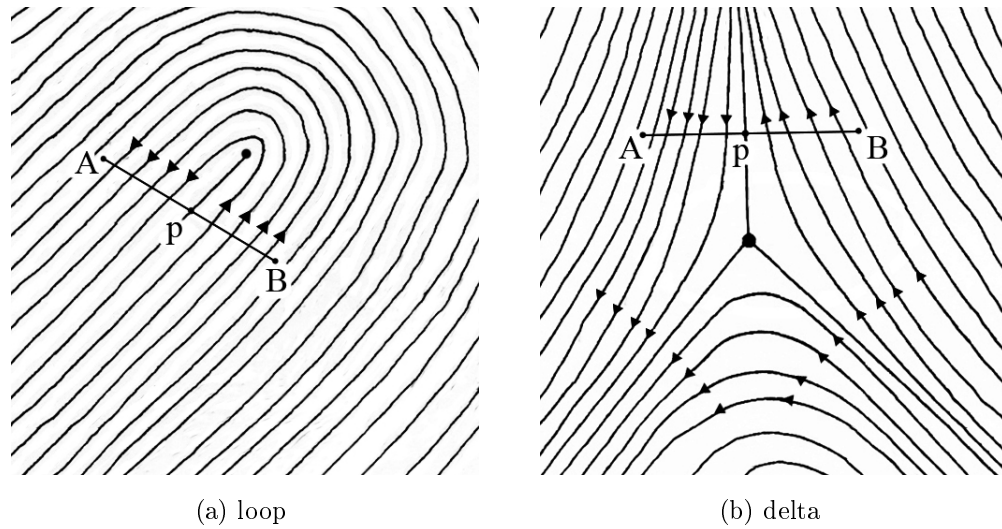


Figura 2.7: Insieme di curve non coorientabili.

soddisfa il problema di Cauchy 2.1, la continuità di  $V$  e il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali di un problema di Cauchy implica che questa scelta delle orientazioni rende le curve integrali coorientate.

D'altra parte possiamo notare come il ridge pattern intorno ad un loop come quello in figura 2.7a sia costituito da ridge line non coorientabili, infatti non è possibile assegnare un verso di percorrenza alla curva passante per il punto  $p$  che sia coerente con l'orientazione delle curve "vicine", la stessa osservazione si potrebbe fare con il ridge pattern di una singolarità di tipo delta (figura 2.7b). Le curve integrali di un campo direzionale differenziabile possono essere non coorientabili, ciò rende i campi direzionali più adatti rispetto ai campi vettoriali a rappresentare la funzione  $LRO$  di un'impronta digitale nel caso questa presenti delle singolarità.

### 2.3.4 Rappresentazione complessa

Può essere utile scrivere un numero complesso  $z$  in forma esponenziale cioè come  $z = \rho e^{i\theta}$  dove  $\rho$  è il modulo e  $\theta$  l'argomento di  $z$ . Grazie alle proprietà dell'esponenziale, è elementare dimostrare che il prodotto tra due numeri complessi si ottiene moltiplicando i loro moduli e sommando gli argomenti, da cui segue che per ogni  $z \in \mathbb{C}$

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)} = \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)} \quad \text{per } k = 0, 1.$$

Le due soluzioni,

$$z_0 = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{e} \quad z_1 = \sqrt{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}},$$

sono quindi una l'opposto dell'altra. Questo implica che la funzione

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^2 \end{aligned}$$

oltre che essere continua e aperta (anche  $f^{-1}$  è continua) è suriettiva, in particolare la restrizione  $f|_{S^1}: S^1 \rightarrow S^1$  induce sulla circonferenza la stessa relazione d'equivalenza indotta dall'azione del gruppo  $\mathbb{Z}_2$ . È possibile perciò passare al quoziente e ottenere un omeomorfismo  $g: \mathbb{P}^1 \rightarrow S^1$ . Ad ogni campo vettoriale  $V: \mathbb{C} \rightarrow S^1$  si può associare quindi un campo direzionale dato dalla composizione  $g^{-1} \circ V$ . Questa corrispondenza biunivoca tra campi vettoriali a valori in  $S^1$  e campi direzionali ci tornerà molto utile in seguito.

## 2.4 Indice di Poincaré

Una differenza sostanziale tra campi vettoriali e direzionali è evidenziata dall'indice di Poincaré, un numero che può essere associato alle singolarità dei

campi in questione per darne una classificazione. Ricordiamo che un *punto singolare* di un campo vettoriale o direzionale è un punto in cui il campo si annulla, o in cui non è definito. Prima di dare la definizione di indice di Poincaré facciamo alcune premesse. Consideriamo la funzione  $\varphi_n: S^1 \rightarrow S^1$  definita in questo modo:

$$\varphi_n(z) = z^n \quad \forall z \in S^1 \subset \mathbb{C}.$$

**Teorema 2.21.** *Per ogni  $f: S^1 \rightarrow S^1$  funzione continua esiste un unico  $n \in \mathbb{Z}$  tale che  $f \simeq \varphi_n$  cioè  $f$  omotopa a  $\varphi_n$ .*

Il teorema appena enunciato, dimostrato in [4], è necessario per dare una buona definizione di grado topologico.

**Definizione 2.22.** Sia  $f: S^1 \rightarrow S^1$  una funzione continua allora si dice *grado topologico* di  $f$ , e si indica con  $d(f)$ , l'unico numero  $n \in \mathbb{Z}$  tale che  $f \simeq \varphi_n$ .

Il grado topologico gode delle seguenti proprietà:

1.  $d(f)$  è ben definito e  $d(f) = d(g) \iff f \simeq g$ ;
2.  $f \equiv c \implies d(f) = 0$ ;
3. se  $f: S^1 \rightarrow S^1$  è un omeomorfismo allora  $d(f) = \pm 1$ ;
4.  $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$  per ogni  $f, g: S^1 \rightarrow S^1$  continue.

Sia  $U \subset \mathbb{R}^2$  un aperto e  $V$  un campo vettoriale differenziabile su  $U$  con un numero finito di punti singolari isolati. Sia inoltre  $C \subset U$  una curva di Jordan (orientata), cioè una curva chiusa semplice, che giace nell'insieme dei punti regolari di  $V$ , allora possiamo considerare le orientazioni che il campo

$V$  assume lungo  $C$ . Fissato un punto di partenza, una volta compiuto un giro completo di  $C$ , l'orientazione di  $V$  deve necessariamente essere uguale a quella iniziale, segue che l'angolo  $\theta$  spazzato dal campo vettoriale  $V$  lungo la curva  $C$  è un multiplo di  $2\pi$  (per convenzione si considerano positivi gli angoli spazzati in senso antiorario e negativi quelli in senso orario). Il numero intero  $\frac{\theta}{2\pi}$  è detta *rotazione* di  $V$  lungo  $C$  e rappresenta il numero di giri che il campo compie lungo la curva. Considerato il campo normalizzato  $\tilde{V}: U \rightarrow S^1$ , che è ben definito e differenziabile lungo  $C$ , e  $\alpha: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un'immersione che parametrizza  $C$  in senso antiorario è possibile dare la seguente definizione formale, equivalente a quella appena data.

**Definizione 2.23.** La *rotazione* del campo vettoriale  $V$  lungo la curva  $C$ , che indichiamo con  $w_V(C)$ , è definita come il grado topologico della funzione  $\tilde{V} \circ \alpha: S^1 \rightarrow S^1$ .

Dalle proprietà del grado topologico seguono le seguenti proprietà della rotazione di un campo  $V$ :

1.  $w_V(C)$  è ben definito, cioè non dipende da  $\alpha$  a meno dell'orientazione (a orientazione opposta corrisponde indice opposto);
2. se  $W$  è un campo vettoriale ottenuto da  $V$  attraverso una rotazione di un angolo costante allora  $w_V(C) = w_W(C)$ ;
3. se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono due funzioni omotope nell'insieme dei punti regolari di  $V$ ,  $R = \{z \in \mathbb{C} : \exists V(z) \neq 0\} \subset \mathbb{C}$ , allora  $w_V(C_1) = w_V(C_2)$ ;
4. se  $\alpha$  è omotopa a una funzione costante allora  $w_V(C) = 0$ .

A questo punto possiamo dare la definizione di indice di Poincaré.

**Definizione 2.24.** Sia  $V$  un campo vettoriale differenziabile su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $p \in U$  un suo punto singolare isolato, sia inoltre  $C \subset U$  una curva di Jordan che giace nell'insieme dei punti regolari di  $V$  e che ha al suo interno  $p$  e nessun altro punto singolare. L'*indice di Poincaré* di  $V$  in  $p$  è definito come

$$i_V(p) = w_V(C).$$

Possiamo osservare che quella appena data è una buona definizione, cioè l'indice di Poincaré non dipende dalla scelta della curva  $C$ , grazie alla proprietà 3 della rotazione di un campo vettoriale. In figura 2.8 sono rappresentati i campi vettoriali visti nel capito precedente che hanno entrambi una singolarità nell'origine, si può notare l'angolo spazzato campi lungo una circonferenza intorno alle rispettive singolarità e dedurne gli indice di Poincaré, rispettivamente  $-1$  e  $2$ .

Consideriamo ora un campo direzionale  $D$ , differenziabile su un aperto del piano  $U$ , tranne in un numero finito di punti singolari isolati. Come già detto non tutti i campi direzionali sono orientabili intorno alle singolarità, ma è comunque possibile definire l'indice di Poincaré di  $D$  in tali punti. Chiamiamo  $p$  una di queste singolarità e sia  $C \subset U$  una curva di Jordan nell'insieme dei punti regolari di  $D$  che ha al suo interno  $p$  e nessun'altra singolarità. Consideriamo  $\alpha$  un'immersione che parametrizza in senso antiorario  $C$  e l'omeomorfismo

$$g: \mathbb{P}^1 \rightarrow S^1 \\ z \mapsto z^2.$$

La composizione  $g \circ D \circ \alpha$  è una funzione continua di  $S^1$  in  $S^1$ , possiamo perciò calcolarne il grado topologico.

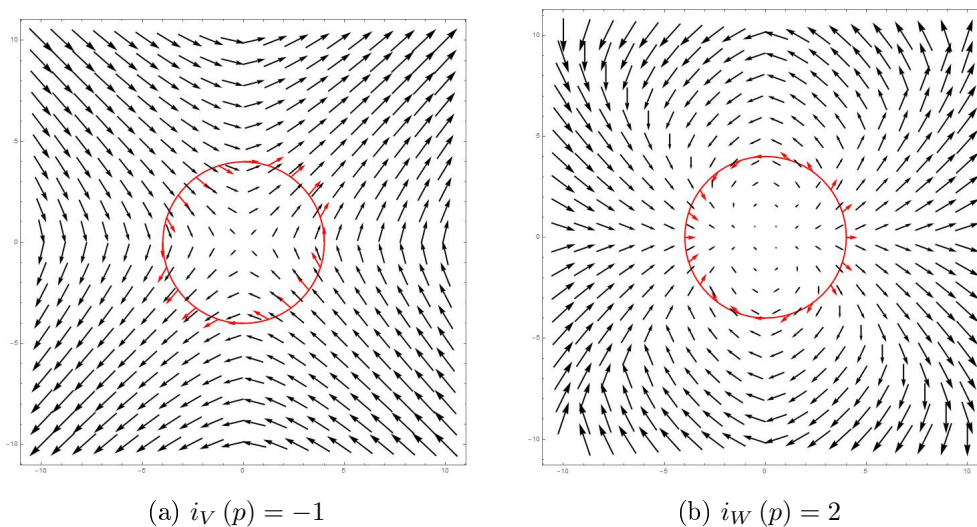


Figura 2.8: Indici di Poincaré di  $V(x, y) = (y, x)$  e  $W(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  in  $p = (0, 0)$ .

**Definizione 2.25.** L'indice di Poincaré di  $D$  in  $p$  è definito come

$$i_D(p) = \frac{1}{2} \cdot w_{g \circ D}(C) = \frac{1}{2} \cdot d(g \circ D \circ \alpha).$$

Per definizione quindi l'indice di Poincaré di un campo direzionale in un suo punto singolare, a differenza di quello di un campo vettoriale, può non essere un numero intero, ciò è coerente con l'idea intuitiva di indice di Poincaré e con il fatto che una retta è invariante per rotazioni di un multiplo di  $\pi$ . L'indice di Poincaré dei vari tipi di singolarità di un'impronta si può calcolare facilmente (vedere [7]), in particolare i loop hanno indice pari a  $\frac{1}{2}$  mentre i delta  $-\frac{1}{2}$ , come si può anche dedurre guardando la figura 2.9 e osservando la variazione delle direzioni delle ridge line lungo la curva percorsa in senso antiorario.

Nel caso in cui  $D$  è orientabile in  $U$  e quindi esiste  $V$  campo vettoriale

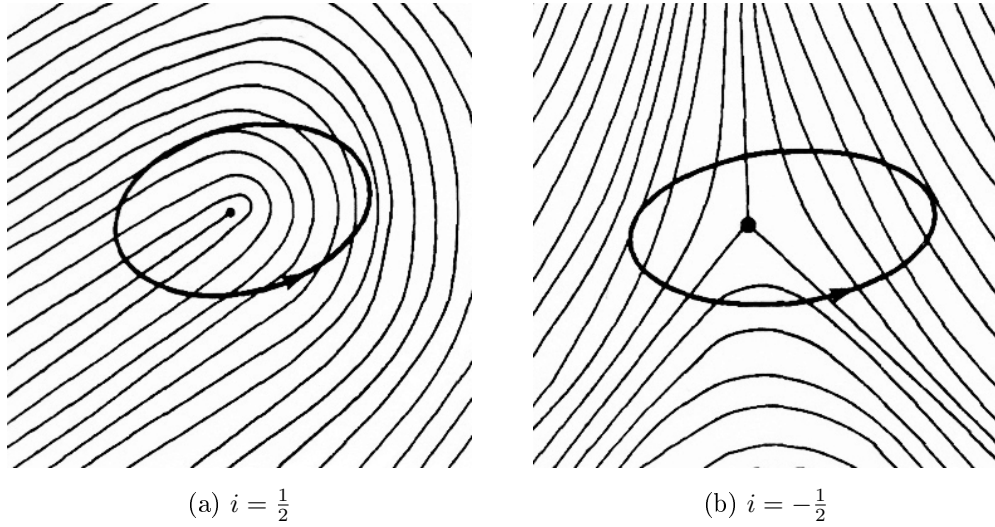


Figura 2.9: Indice di Poincaré di un loop e di un delta.

che genera  $D$  in  $U$ , abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{\tilde{V} \circ \alpha} & S^1 \\
 \searrow D \circ \alpha & & \downarrow \pi \\
 & & \mathbb{P}^1 \\
 & & \downarrow g \\
 & & S^1
 \end{array} \tag{2.5}$$

dove  $\pi$  è la proiezione naturale e  $\tilde{V}: U \setminus \{p\} \rightarrow S^1$  è il campo vettoriale normalizzato. Dal momento che  $d(g \circ \pi) = 2$  abbiamo

$$\begin{aligned}
 i_D(p) &= \frac{1}{2} \cdot d(g \circ D \circ \alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot d(g \circ \pi \circ \tilde{V} \circ \alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot d(g \circ \pi) \cdot d(\tilde{V} \circ \alpha) \\
 &= d(\tilde{V} \circ \alpha) \\
 &= i_V(p).
 \end{aligned}$$

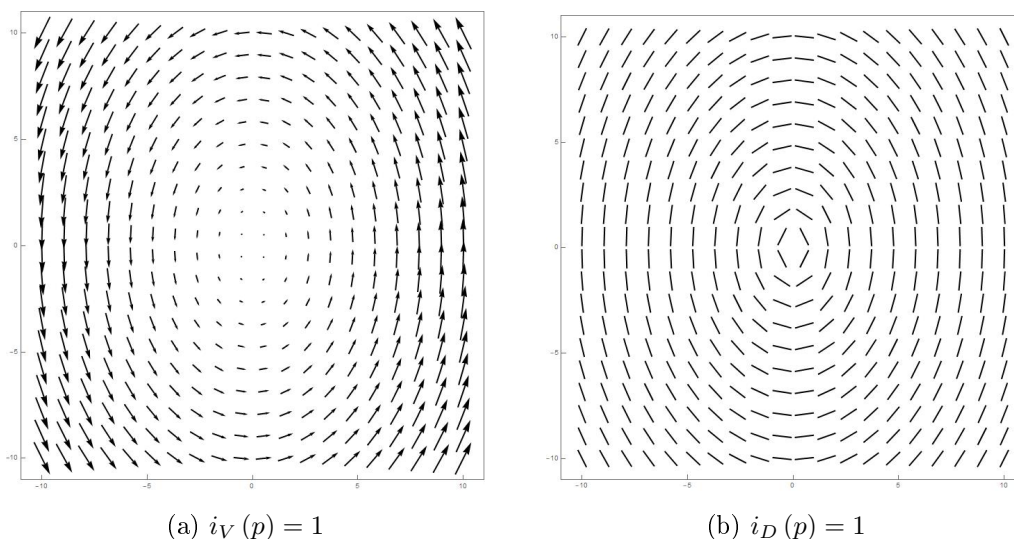


Figura 2.10: In  $p = (0,0)$  l'indice di Poincaré del campo vettoriale  $V(x, y) = (-y, 2x)$  coincide con quello del campo direzionale generato  $D = \langle V \rangle$ .

In sostanza se  $D$  è orientabile in un intorno di  $p$  allora il suo indice di Poincaré in  $p$  è un numero intero e coincide con l'indice del suo campo vettoriale generatore. In realtà si può dimostrare anche il viceversa, cioè se  $i_D(p) \in \mathbb{Z}$  allora  $D$  è orientabile in un intorno di  $p$  (vedere [15]). Vale quindi il seguente teorema.

**Teorema 2.26.** *Sia  $D$  un campo direzionale differenziabile in  $U \setminus \{p\} \subset \mathbb{R}^2$ , allora  $D$  è orientabile in un intorno di  $p$  se e solo se  $i_D(p) \in \mathbb{Z}$ .*

In figura 2.10 possiamo osservare il campo vettoriale  $V(x, y) = (-y, 2x)$  e il campo direzionale generato da  $V$ , entrambi hanno una singolarità nell'origine di indice 1.

La definizione data precedentemente non è particolarmente utile per il calcolo dell'indice di Poincaré, è sicuramente più vantaggioso identificare il



piano  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  e pensare i campi vettoriali e direzionali come funzioni di  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ . Scriviamo quindi ogni  $z \in \mathbb{C}$  in forma esponenziale, cioè come  $\rho e^{i\theta}$ , segue che

$$dz = e^{i\theta} d\rho + i\rho e^{i\theta} d\theta$$

e quindi

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\rho}{\rho} + id\theta = d[\ln(\rho)] + id\theta. \quad (2.6)$$

Supponiamo di avere un campo vettoriale  $V$  su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$  con una singolarità isolata in  $p$  e sia  $C$  una curva di Jordan con  $p$  al suo interno. Indichiamo inoltre con  $\theta$  l'angolo che forma  $V$  con l'asse reale di  $\mathbb{C}$ . Come già detto l'indice di Poincaré rappresenta il numero di giri percorsi in senso antiorario che il campo vettoriale compie lungo  $C$ , possiamo perciò calcolarlo come la variazione totale dell'angolo  $\frac{\theta}{2\pi}$  lungo  $V(C)$ . Ora per il teorema fondamentale del calcolo integrale e per la (2.6) si ha che

$$\begin{aligned} i_V(p) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{V(C)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{V(C)} \frac{dz}{z} - d[\ln(\rho)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{V(C)} \frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che la variazione lungo  $V(C)$  di  $d[\ln(\rho)]$ , è pari a 0.

## 2.5 Teorema di Hopf-Poincaré

In questa sezione andremo ad enunciare e dimostrare il teorema di Hopf-Poincaré nel caso particolare del disco  $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ .

**Lemma 2.27.** *Sia  $V$  un campo vettoriale differenziabile su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e sia  $C$  una curva di Jordan in  $U$  nell'insieme dei punti regolari di  $V$ , se all'interno di  $C$  non c'è nessuna singolarità allora  $w_V(C) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $V$  è definito e non si annulla mai in  $\text{Int}(C)$  quindi il campo normalizzato  $\tilde{V}(x) = \frac{V(x,y)}{\|V(x,y)\|}$  è definito e differenziabile in  $\overline{\text{Int}(C)} = \text{Int}(C) \cup C$ . Se chiamiamo  $f$  l'omeomorfismo tra  $B^2$  e  $\overline{\text{Int}(C)}$  che esiste per il teorema di Schoenflies (vedere [1]), l'applicazione  $\tilde{V} \circ f: B^2 \rightarrow S^1$  è continua. Il disco  $B^2$  è un insieme convesso quindi contraibile, cioè ha lo stesso tipo d'omotopia di un punto, ciò implica che l'applicazione  $\tilde{V} \circ f$  è omotopa ad un'applicazione costante. Ovviamente il grado topologico di un'applicazione costante è 0 e poiché mappe omotope hanno lo stesso grado topologico (proprietà 1 del grado topologico) possiamo concludere che  $w_V(C) = 0$ .  $\square$

**Teorema 2.28** (Teorema di Hopf-Poincaré). *Sia  $V$  un campo vettoriale su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $C$  una curva di Jordan nell'insieme dei punti regolari di  $V$  con al suo interno  $k$  singolarità isolate  $p_1, \dots, p_k$ , allora*

$$w_V(C) = \sum_{i=1}^k i_V(p_i).$$

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che l'insieme  $B = \text{Int}(C) \cup C$  è compatto essendo omeomorfo al disco  $B^2$  per il teorema di Schoenflies. Da questo segue che la famiglia delle singolarità isolate  $\{p_i\}_{i=1}^k$  è finita. Per ogni  $p_i$  consideriamo un intorno chiuso  $B_i \subset \mathbb{R}^2$  omeomorfo a  $B^2$  che non contenga altri punti singolari, assumiamo inoltre che gli intorni  $B_i$  siano a due a due

disgiunti cosicché  $w_V(\partial B_i) = i_V(x_i)$ . Prendiamo ora per ogni  $i = 1, \dots, k$  un segmento  $E_i$  che congiunge  $\partial B_i$  con  $C$ , poichè il numero delle singolarità è finito i segmenti  $E_i$  possono essere scelti in modo tale da non incontrare nessun punto singolare (figura 2.11). A questo punto possiamo notare che l'insieme  $\hat{B} = \text{Int}(C) \setminus \left[ \bigcup_{i=1}^k (B_i \cup E_i) \right]$  è omeomorfo ad un disco aperto e non contiene nessuna singolarità, quindi  $w_V(\partial \hat{B}) = 0$  per il lemma 2.27. D'altra parte la frontiera di  $\hat{B}$  è  $\partial \hat{B} = C \cup \left[ \bigcup_{i=1}^k (\partial B_i \cup E_i) \right]$  dove i segmenti  $E_i$  devono essere percorsi in entrambi i versi, si ha quindi che

$$\begin{aligned} w_V(\partial \hat{B}) &= \oint_{V(C)} \frac{dz}{z} + \sum_{i=1}^k \left( \int_{V(E_i)} \frac{dz}{z} - \oint_{V(\partial B_i)} \frac{dz}{z} - \int_{V(E_i)} \frac{dz}{z} \right) \\ &= \oint_{V(C)} \frac{dz}{z} - \sum_{i=1}^k \oint_{V(\partial B_i)} \frac{dz}{z} \\ &= w_V(C) - \sum_{i=1}^k i_V(x_i), \end{aligned}$$

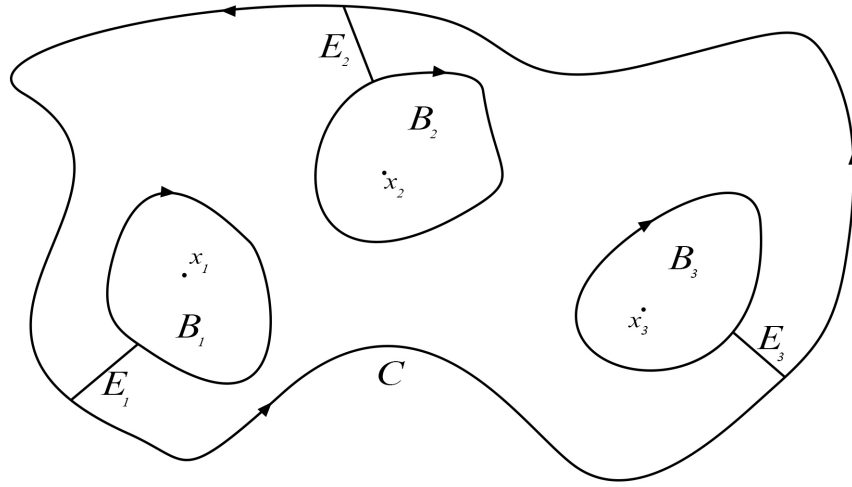
da cui segue la tesi. □

Una conseguenza immediata del teorema 2.28 è una sua versione analoga per i campi direzionali.

**Teorema 2.29.** *Sia  $D$  un campo direzionale differenziabile con singolarità su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $C$  una curva di Jordan nell'insieme dei punti regolari di  $D$  con al suo interno  $k$  singolarità isolate  $p_1, \dots, p_k$ , allora*

$$w_D(C) = \sum_{i=1}^k i_D(p_i).$$

*Dimostrazione.* Se si considera l'omeomorfismo  $g: \mathbb{P}^1 \rightarrow S^1$  già visto in precedenza e si ripetono gli stessi argomenti del teorema 2.28 si ha che

Figura 2.11: Dominio  $B \subset \mathbb{R}^2$ .

$w_{g \circ D}(C) = \sum_{i=1}^k w_{g \circ D}(\partial B_i)$ . Ora ricordando la definizione di indice di Poincaré per un campo direzionale e dividendo per 2 entrambi i membri si ottiene la tesi.  $\square$

Il teorema 2.29 appena dimostrato ci dà una spiegazione del perché, come avevamo già anticipato nel primo capitolo, in un'impronta digitale il numero dei loop coincide con il numero dei delta. Infatti se consideriamo una curva di Jordan  $C$  intorno all'impronta e assumiamo che l'orientazione delle ridge line sia costante lungo  $C$  abbiamo che la somma degli indici di Poincaré delle singolarità deve essere pari a zero. Poiché l'indice di Poincaré di un loop è  $\frac{1}{2}$  mentre quello di un delta è  $-\frac{1}{2}$  segue che il numero dei loop è pari a quello dei delta.

# Capitolo 3

## Il modello LRO di Sherlock-Monro

In questo capitolo andremo a definire un modello analitico di campo direzionale, che può approssimare la funzione  $LRO$  di un'impronta digitale, ne analizzeremo le proprietà di invarianza e la relazione che lo lega alla funzione  $LRO$  dell'impronta reale. Vedremo inoltre un algoritmo che permette di ottenere il sollevamento di tale campo lungo delle curve grazie ad una stima del gradiente.

### 3.1 Definizione e proprietà del modello

La funzione  $LRO(x, y)$  è la funzione che associa ad ogni punto dell'impronta digitale l'orientazione della ridge line in quel punto. Il modello che descriveremo in queste pagine, presentato da B. G. Sherlock e D. M. Monro in [13], è il più semplice modello che stima correttamente il comportamento

topologico delle ridge line intorno ai punti singolari, infatti la funzione  $LRO$  di un'impronta digitale reale può essere approssimata da un campo direzionale  $\theta(z)$  su  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  avente  $l_1, \dots, l_k$  come punti singolari con indice  $\frac{1}{2}$  in corrispondenza dei loop e  $d_1, \dots, d_m$  come punti singolari con indice  $-\frac{1}{2}$  in corrispondenza dei delta. Il modello è determinato solo della posizione e della tipologia di queste singolarità, non ci si può aspettare perciò un'approssimazione precisa lontano dai punti singolari, in effetti l'approssimazione è debole anche vicino alle singolarità in quanto non tiene conto della loro orientazione (vedere figura 3.1). Il campo  $\theta(z)$  potrà quindi essere considerato come la funzione  $LRO$  di una qualche impronta digitale "ideale" con dati loop e delta, a due impronte digitali che hanno le stesse singolarità infatti sarà associato lo stesso campo  $\theta$  anche se i loro valori  $LRO$  possono differire nei dettagli. La relazione con l' $LRO$  di una impronta digitale reale sarà discussa successivamente.

**Teorema 3.1.** *Data la seguente funzione razionale sul piano complesso  $\mathbb{C}$ :*

$$R(z) = \frac{(z - l_1)(z - l_2) \dots (z - l_k)}{(z - d_1)(z - d_2) \dots (z - d_m)},$$

dove  $l_1, \dots, l_m$  e  $d_1, \dots, d_k$  sono rispettivamente zeri e poli di ordine uno, si ha che

$$i_R(l_1) = i_R(l_2) = \dots = i_R(l_k) = 1,$$

mentre

$$i_R(d_1) = i_R(d_2) = \dots = i_R(d_m) = -1.$$

*Dimostrazione.* Sulla base di osservazioni empiriche si può assumere direttamente che in un'impronta digitale ci siano al massimo quattro singolarità,

inoltre per il teorema 2.29 il numero dei loop deve essere uguale al numero dei delta, possiamo perciò limitarci a dimostrare i casi in cui  $k = m \leq 2$ . Nel caso in cui  $m = 0$  la funzione  $R$  è costante, non ha né zeri né poli.

Se invece  $m = 1$  si ha  $R(z) = \frac{(z-l_1)}{(z-d_1)}$ , consideriamo quindi la circonferenza unitaria intorno a  $l_1$  data dalla parametrizzazione  $\alpha(t) = l_1 + e^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Assumiamo che  $d_1$  non sia all'interno di tale circonferenza, in caso contrario potremmo considerare una circonferenza di raggio minore e i passaggi da svolgere rimarrebbero sostanzialmente gli stessi. Ricordiamo che possiamo scrivere

$$i_R(l_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{R(\alpha)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R(\alpha(t))} \cdot \frac{d}{dt} R(\alpha(t)) dt,$$

ma

$$R(\alpha(t)) = \frac{e^{it}}{e^{it} + (l_1 - d_1)} \implies \frac{d}{dt} R(\alpha(t)) = \frac{ie^{it}(l_1 - d_1)}{(e^{it} + (l_1 - d_1))^2},$$

quindi

$$\begin{aligned} i_R(l_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + (l_1 - d_1)}{e^{it}} \cdot \frac{ie^{it}(l_1 - d_1)}{(e^{it} + (l_1 - d_1))^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(l_1 - d_1)}{e^{it} + (l_1 - d_1)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 - \frac{e^{it}}{e^{it} + (l_1 - d_1)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ t + i \log(e^{it} + l_1 - d_1) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1. \end{aligned}$$

Prendiamo ora  $\beta(t) = d_1 + e^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$  la circonferenza unitaria centrata in  $d_1$ . In questo caso

$$R(\beta(t)) = \frac{e^{it} + (d_1 - l_1)}{e^{it}}$$

quindi

$$\frac{d}{dt}R(\beta(t)) = \frac{ie^{2it} - ie^{it}(e^{it} + (d_1 - l_1))}{e^{2it}} = -\frac{i(d_1 - l_1)}{e^{it}}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} i_R(d_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} + (d_1 - l_1)} \cdot \left( -\frac{i(d_1 - l_1)}{e^{it}} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(d_1 - l_1)}{e^{it} + (d_1 - l_1)} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 - \frac{e^{it}}{e^{it} + (d_1 - l_1)} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \left[ t + i \log(e^{it} + d_1 - l_1) \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = -1. \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $m = 2$  abbiamo  $R(z) = \frac{(z-l_1)(z-l_2)}{(z-d_1)(z-d_2)}$ . Il procedimento per il calcolo dell'indice di Poincaré delle singolarità è analogo a quello già visto nel caso  $m = 1$ , ometteremo perciò qualche passaggio. Siano  $\alpha(t) = l_1 + e^{it}$  e  $\beta(t) = d_1 + e^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$  due circonferenze intorno rispettivamente a  $l_1$  e a  $d_1$ , come prima poiché le singolarità sono isolate possiamo direttamente assumere che all'interno di tali circonferenze non ci siano altre punti singolari. Abbiamo quindi

$$R(\alpha(t)) = \frac{e^{it}(e^{it} + (l_1 - l_2))}{e^{it}(e^{it} + (l_1 - d_1))e^{it}(e^{it} + (l_1 - d_2))},$$

mentre

$$R(\beta(t)) = \frac{e^{it}(e^{it} + (d_1 - l_1))e^{it}(e^{it} + (d_1 - l_2))}{e^{it}(e^{it} + (d_1 - d_2))}.$$

Con un po' di calcoli si può dimostrare che

$$\frac{\frac{d}{dt}R(\alpha(t))}{R(\alpha(t))} = i \left[ 1 + \frac{e^{it}}{e^{it} + (l_1 - l_2)} - \frac{e^{it}}{e^{it} + (l_1 - d_1)} - \frac{e^{it}}{e^{it} + (l_1 - d_2)} \right],$$



e

$$\frac{d}{dt}R(\beta(t)) = i \left[ \frac{e^{it}}{e^{it} + (d_1 - l_1)} + \frac{e^{it}}{e^{it} + (d_1 - l_2)} - 1 - \frac{e^{it}}{e^{it} + (d_1 - d_2)} \right].$$

A questo punto

$$\begin{aligned} i_R(l_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i \left[ 1 + \frac{e^{it}}{e^{it} + (l_1 - l_2)} - \frac{e^{it}}{e^{it} + (l_1 - d_1)} - \frac{e^{it}}{e^{it} + (l_1 - d_2)} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ t - i \log(e^{it} + l_1 - l_2) + i \log(e^{it} + l_1 - d_1) + i \log(e^{it} + l_1 - d_2) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} i_R(d_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i \left[ \frac{e^{it}}{e^{it} + (d_1 - l_1)} + \frac{e^{it}}{e^{it} + (d_1 - l_2)} - 1 - \frac{e^{it}}{e^{it} + (d_1 - d_2)} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ i \log(e^{it} + d_1 - l_1) + i \log(e^{it} + d_1 - l_2) - t - i \log(e^{it} + d_1 - d_2) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot (-2\pi) = -1. \end{aligned}$$

Il calcolo dell'indice per le altre singolarità,  $l_2$  e  $d_2$ , è analogo.  $\square$

Dato il ridge pattern di un'impronta digitale possiamo indicare con  $\theta_0$  l'orientazione media che le ridge line assumono all'estremità dell'impronta e definire la seguente funzione razionale:

$$F_1(z) = e^{i\theta_0} \sqrt{R(z)} = e^{i\theta_0} \sqrt{\frac{(z - l_1) \dots (z - l_m)}{(z - d_1) \dots (z - d_m)}},$$

dove  $l_1, \dots, l_m$  e  $d_1, \dots, d_m$  sono rispettivamente le coordinate dei loop e dei delta, con  $m = 0, 1, 2$  a seconda del numero di singolarità. La funzione appena definita ha indice di Poincaré pari a  $\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$  rispettivamente nei loop

e nei delta, poiché la radice quadrata di un numero complesso ne dimezza l'argomento cioè l'angolo. Il campo direzionale introdotto da Sherlock-Monro è definito come

$$\theta(z) = \arg(F_1(z)) \bmod \pi. \quad (3.1)$$

Nei casi non banali ovvero quando  $m = 1, 2$  il campo  $\theta$  si può costruire anche in un altro modo: invece di considerare la funzione razionale  $R(z)$  possiamo moltiplicare e dividere, fuori dalle singolarità, la stessa  $R(z)$  per il coniugato del suo denominatore cioè per  $\overline{(z - d_1)} \dots \overline{(z - d_m)}$  con  $m = 1, 2$  a seconda dei casi, in modo da ottenere la funzione

$$F_2(z) = e^{i\theta_0} \sqrt{\frac{(z - l_1) \dots (z - l_m) \overline{(z - d_1)} \dots \overline{(z - d_m)}}{|z - d_1|^2 \dots |z - d_m|^2}}.$$

Il termine al denominatore di  $F_2$  è reale perciò  $\arg(F_1(z)) = \arg(F_2(z))$  e quindi il campo direzionale generato da  $F_1$  e  $F_2$  è lo stesso. Dal punto di vista operativo questa seconda definizione è preferibile in quanto è possibile trascurare il denominatore e lavorare direttamente su una funzione che non ha poli pur mantenendo comunque indice di Poincaré pari a  $-\frac{1}{2}$  in corrispondenza dei delta, ne vedremo un utilizzo nel capitolo seguente. D'ora in avanti considereremo la funzione

$$F(z) = e^{i\theta_0} \sqrt{(z - l_1) \dots (z - l_m) \overline{(z - d_1)} \dots \overline{(z - d_m)}}.$$

Un'importante proprietà di invarianza del campo  $\theta$  è descritta dal seguente teorema.

**Teorema 3.2.** *Il campo direzionale  $\theta$  è invariante rispetto alle similitudini del piano complesso  $\mathbb{C}$ .*

*Dimostrazione.* Data un'impronta con loop nei punti  $l_1, \dots, l_m$  e delta in  $d_1, \dots, d_m$  dove  $m = 0, 1, 2$  consideriamo il campo vettoriale

$$F^2(z) = z_0 \cdot (z - l_1) \dots (z - l_m) \overline{(z - d_1)} \dots \overline{(z - d_m)}$$

dove  $z_0 = e^{i2\theta_0}$ . Sia inoltre  $t$  un'applicazione tale che  $t(z) = az + b$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$  dove  $a, b \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$ . Se si considerano le singolarità trasformate mediante  $t$  e il vettore  $z_0$  trasformato mediante l'applicazione tangente  $Tt$  che manda ogni  $z \in \mathbb{C}$  in  $az$  si ottiene un nuovo campo

$$\begin{aligned} G^2(z) &= Tt(z_0) \cdot (z - t(l_1)) \dots (z - t(l_m)) \overline{(z - t(d_1))} \dots \overline{(z - t(d_m))} \\ &= az_0 \cdot (z - al_1 - b) \dots (z - al_m - b) \overline{(z - ad_1 - b)} \dots \overline{(z - ad_m - b)}. \end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che i campi vettoriali  $F^2$  e  $G^2$  sono  $t$ -correlati a meno di uno scalare reale ovvero che  $Tt(F^2(z)) = k \cdot G^2(t(z))$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Il caso in cui  $m = 0$  è banale, se invece  $m = 1$  si ha

$$\begin{aligned} G^2(t(z)) &= az_0 \cdot (az + b - al_1 - b) \overline{(az + b - ad_1 - b)} \\ &= az_0 \cdot a \bar{a} (z - l_1) \overline{(z - d_1)} \\ &= az_0 \cdot |a|^2 (z - l_1) \overline{(z - d_1)} \\ &= |a|^2 Tt(F^2(z)). \end{aligned}$$

Il termine  $|a|^2$  è uno scalare reale non nullo, segue quindi la tesi. Il caso  $m = 2$  si dimostra in modo analogo.

Consideriamo ora il campo

$$H^2(z) = \bar{z}_0 \cdot (z - \bar{l}_1) \dots (z - \bar{l}_m) \overline{(z - \bar{d}_1)} \dots \overline{(z - \bar{d}_m)}$$

ottenuto trasformando le singolarità e il vettore  $z_0$  mediante la funzione coniugio (ricordiamo che l'applicazione tangente del coniugio è il coniugio stesso). Proviamo che  $H^2(\bar{z}) = \overline{F^2(z)}$ , come prima se  $m = 0$  la dimostrazione

è immediata mentre il caso  $m = 2$  è analogo al caso  $m = 1$ , dimostriamo quindi solo quest'ultimo. Per le proprietà del coniugio abbiamo

$$\begin{aligned}
 H^2(\bar{z}) &= \bar{z}_0 \cdot (\bar{z} - \bar{l}_1) \overline{(\bar{z} - \bar{d}_1)} \\
 &= \bar{z}_0 \cdot \overline{(z - l_1)} (z - d_1) \\
 &= \overline{z_0 \cdot (z - l_1)} \overline{(z - d_1)} \\
 &= \overline{F^2(z)}.
 \end{aligned}$$

Poichè ogni similitudine è esprimibile come un'applicazione del tipo  $z \mapsto az + b$  oppure del tipo  $z \mapsto a\bar{z} + b$  con  $a, b \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$  abbiamo dimostrato l'invarianza, a meno di uno scalare reale, di  $F^2$  rispetto a tali trasformazioni. Da questo segue l'invarianza del relativo campo direzionale  $\theta$  rispetto alle similitudini.  $\square$

Il campo  $\theta(x, y)$  di un'impronta digitale reale è un campo direzionale che in generale può differire dalla funzione  $LRO$  anche se ha gli stessi punti singolari, si ha quindi che  $LRO(x, y) = \theta(x, y) + \varepsilon(x, y)$  dove l'errore  $\varepsilon(x, y)$  è un campo direzionale con indici di Poincaré 0 nei punti singolari di  $\theta$  cioè nei loop e nei delta dell'impronta. La figura 3.1 mostra i campi direzionali  $\theta$  generati con il metodo di Sherlock-Monro di due impronte, la prima di tipo loop e la seconda di tipo whorl. Come si può notare anche dall'immagine delle impronte sullo sfondo il campo  $\theta$  non fornisce valori accurati dell'orientazione punto per punto, l'utilità e lo scopo del modello infatti stanno solo nel rappresentare correttamente il comportamento topologico delle ridge line.

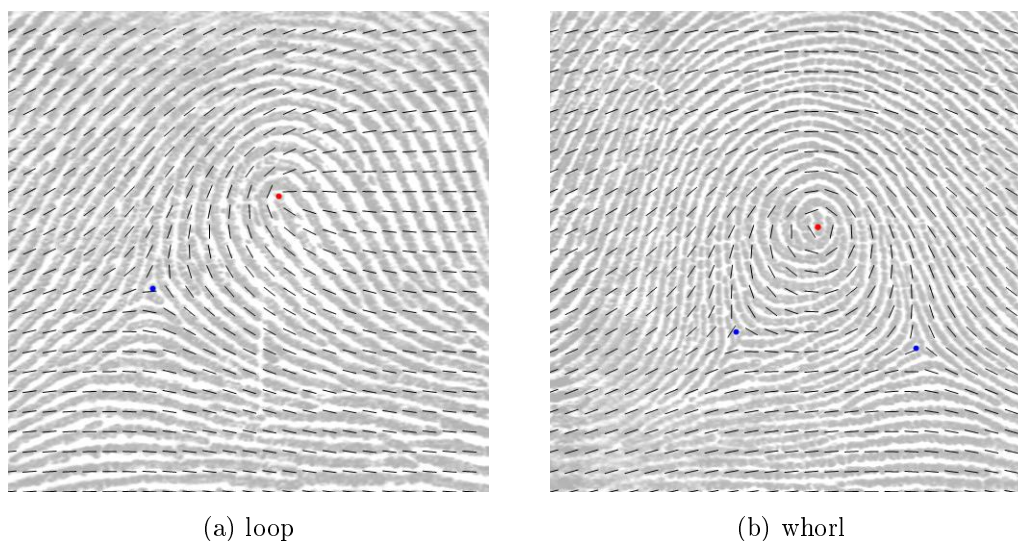


Figura 3.1: Esempi di campi direzionali generati con il metodo Sherlock-Monro.

## 3.2 Sollevamento del campo direzionale

In alcuni ambiti, come ad esempio nell'enhancement delle impronte, nell'analisi dei pattern e nell'estrazione delle minuzie può essere utile lavorare con le orientazioni invece che con le direzioni, è quindi necessario ottenere un campo vettoriale sollevando il campo  $\theta$  definito in 3.1, mediante la proiezione  $\pi: S^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Come già osservato non è possibile utilizzare il teorema di sollevamento delle applicazioni continue (teorema 2.15) nel caso in cui  $\theta$  abbia dei punti singolari, anzi il teorema 2.26 conferma che sotto queste ipotesi non è possibile sollevare  $\theta$  nella regione di piano contenente l'impronta.

È comunque possibile sollevare  $\theta$  lungo curve chiuse che non hanno singolarità all'interno o lungo curve aperte (omeomorfe a  $\mathbb{R}$  o comunque ad un suo aperto), sempre che non incontrino singolarità. Questa possibilità permette un'analisi, anche se in forma ristretta, delle orientazioni nella regione di

piano contenente l'impronta digitale, si può infatti considerare una famiglia finita di rette parallele giacenti nell'insieme dei punti regolari di  $\theta$  in modo tale da "ricoprire" l'immagine dell'impronta e sollevare il campo lungo ogni retta della famiglia.

Un possibile algoritmo per ottenere il sollevamento di  $\theta$  lungo una curva utilizza una stima della derivata della direzione data dal gradiente  $\nabla\theta$ , che per com'è definita la funzione argomento di un numero complesso, è del tipo:

$$\begin{aligned}\nabla\theta(z) &= \nabla \arg(F(z)) \bmod \pi \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \frac{(y_i - y, x - x_{l_i})}{(x - x_{l_i})^2 + (y - y_i)^2} - \frac{(y_{d_i} - y, x - x_{d_i})}{(x - x_{d_i})^2 + (y - y_{d_i})^2} \right].\end{aligned}$$

Questo algoritmo consiste nell'aggiungere un opportuno multiplo di  $2\pi$ , positivo o negativo a seconda del segno della derivata, al valore che  $\theta$  assume in determinati archi della curva in modo da rimuovere le discontinuità e ottenere una funzione continua  $\tilde{\theta}$  a valori in  $S^1$ . Assumiamo che i salti di  $\theta$  visto a valori in  $S^1$ , siano in modulo al massimo pari a  $\pi$ , cosicché sia richiesto solo il segno della derivata. Con questa semplificazione l'algoritmo può essere scritto in questo modo:

```
unwrapping(var x, xdot:array of real)
{x is the data to be unwrapped}
{xdot is the array of derivative values}
const maxdiff = pi/4
begin
  x[1]:=x[1]modpi
  for i:=2 to length of x do
    Restrict x[i] to the range x[i-1]-pi/2,...,x[i-1]+pi/2
    by adding or subtracting a suitable multiple of pi
    diff:=x[i]-x[i-1]
    if (diff>maxdiff) and (xdot[i]<0) then
      x[i]:=x[i]-pi
    else (diff<-maxdiff) and (xdot[i]>0) then
      x[i]:=x[i]+pi
    end if
  end for
end
```

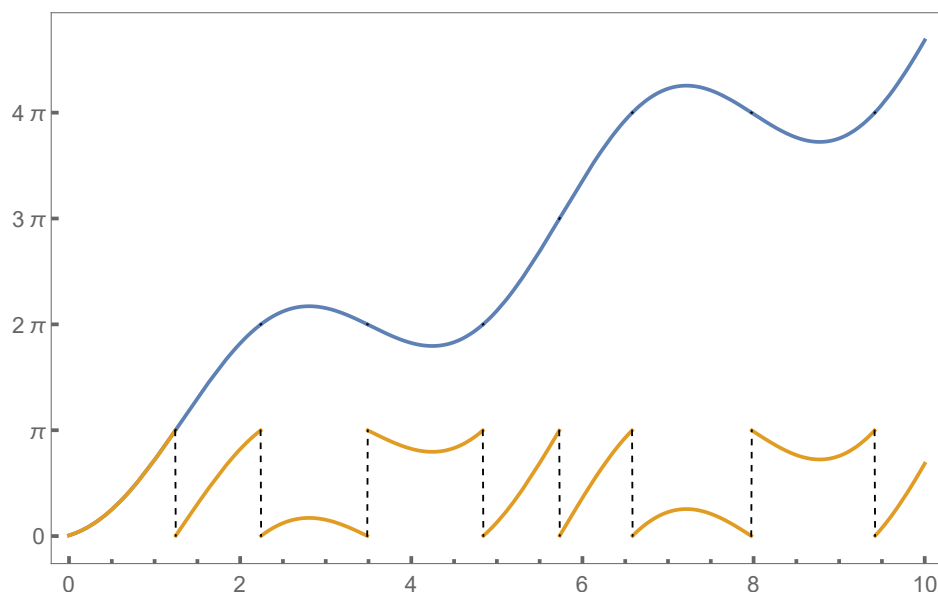


Figura 3.2: Grafico di  $\theta$  in giallo e di  $\tilde{\theta}$  in blu.

La figura 3.2 mostra il grafico del campo  $\theta$  di un'impronta lungo una curva e il grafico del suo sollevamento ottenuto con l'algoritmo sopra descritto.

# Capitolo 4

## Desingularizzazione del campo

### LRO

In questo capitolo vedremo un'applicazione del modello di Sherlock-Monro, a partire dal campo delle direzioni *LRO* di una qualunque impronta digitale infatti è possibile utilizzare il campo direzionale  $\theta$  per creare un nuovo campo direzionale senza singolarità. Tale campo desingularizzato può essere pensato come funzione *LRO* di una qualche impronta digitale ad arco “ideale” e quindi approssimato da un campo sinusoidale controllato da opportuni parametri. I valori dei parametri che forniscono la miglior approssimazione, ovvero quelli che minimizzano l'errore, possono essere associati al campo *LRO* di partenza e usati come invarianti dell'impronta. Abbiamo applicato questo algoritmo di desingularizzazione, con il software Wolfram Mathematica 11.0, ad un campione di 50 impronte digitali, 10 per ogni tipologia secondo la classificazione di Galton. Le impronte digitali sono state prese dal database del NIST (*National Institute of Standards and Technology*), hanno una



risoluzione di  $500 \times 500$  pixel e i rispettivi campi  $LRO$  sono stati calcolati con un algoritmo sviluppato nel nostro dipartimento. Abbiamo infine utilizzato due diversi campi sinusoidali parametrici per l'approssimazione dei campi desingularizzati ottenuti precedentemente e analizzato i rispettivi errori.

## 4.1 Algoritmo di desingularizzazione

Data un'impronta digitale, invece di considerare il campo delle direzioni  $LRO$ , è conveniente lavorare con il campo vettoriale corrispondente cioè  $LRO^2$ , per poi estrarne la radice una volta desingularizzato, ottenendo così un campo di direzioni. Il primo passaggio dell'algoritmo consiste nel calcolo del valore medio di  $LRO^2$  all'estremità dell'immagine. Data la risoluzione delle immagini in nostro possesso abbiamo deciso di calcolare questo valore medio, che indicheremo con  $z_0$  lungo una cornice quadrata di 15 pixel di spessore. Successivamente avviene la localizzazione delle singolarità e a seconda dei casi la definizione del campo vettoriale di Sherlock-Monro:

- $\theta^2(z) = z_0$ ,
- $\theta^2(z) = z_0(z - l_1)\overline{(z - d_1)}$ ,
- $\theta^2(z) = z_0(z - l_1)\overline{(z - d_1)}(z - l_2)\overline{(z - d_2)}$ .

A questo punto l'idea è quella di considerare il quoziente tra il campo  $LRO^2$  e il campo  $\theta^2$  appena definito in modo tale che le singolarità di quest'ultimo vadano ad elidere quelle di  $LRO^2$ . All'atto pratico la localizzazione delle singolarità può avvenire in diversi modi, nel nostro caso ad esempio è stato utilizzato un modulo dinamico in Mathematica, di cui vedremo in

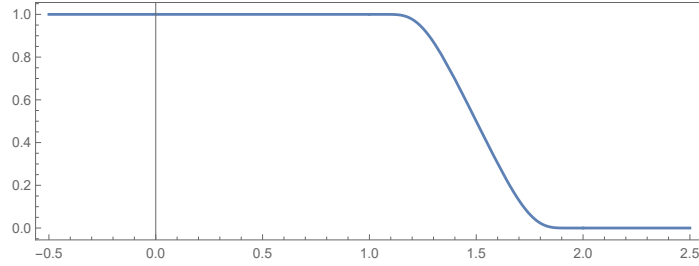


Figura 4.1: Grafico di  $\beta$  con  $\varepsilon = 1$  e  $\delta = 2$  nell'intervallo  $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ .

seguito il codice. Per questo motivo, anche se di poco, le posizioni dei punti singolari di  $\theta$  potrebbero non coincidere con quelle del campo  $LRO$ , in tal caso le singolarità non si eliminerebbero ma se ne aggiungerebbero di nuove. A seconda dei casi è possibile risolvere il problema “raccordando” in modo differenziabile, grazie ad un’opportuna partizione dell’unità, il quoziente tra  $LRO^2$  e  $\theta^2$  dove questo è regolare con i valori medi che assume negli intorni dei punti singolari, ottenendo così un campo differenziabile senza singolarità. Analizziamo nel dettaglio i singoli casi.

Se l’impronta non ha singolarità il campo  $LRO^2$  è già desingularizzato e  $\theta^2$  è costante quindi il quoziente non è altro che il campo di partenza ruotato di un angolo pari a  $-\arg(z_0) = -\theta_0$ .

Se l’impronta ha un loop in  $l_1$  e un delta in  $d_1$  è possibile fissare  $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$  tali che  $\varepsilon < \delta$  e considerare la funzione

$$\beta(t) = \frac{\alpha(\delta - t)}{\alpha(t - \varepsilon) + \alpha(\delta - t)} \quad \text{dove} \quad \alpha(t) = \begin{cases} e^{-\frac{\delta - \varepsilon}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}.$$

Dalla differenziabilità di  $\alpha$  segue quella di  $\beta$ , definiamo quindi la funzione

$$\begin{aligned} f_p: \mathbb{C} &\rightarrow [0, 1] \\ z &\mapsto \beta(\|p - z\|) \end{aligned}$$

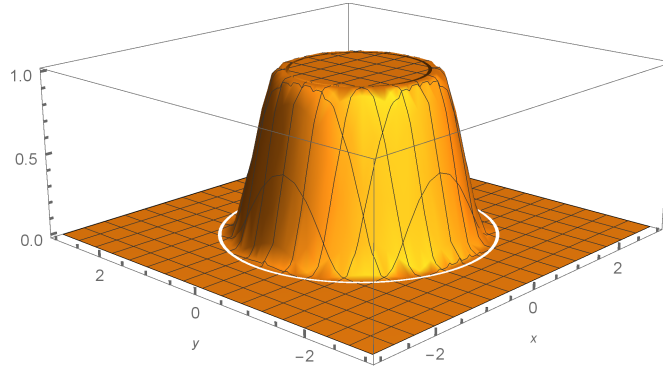


Figura 4.2: Grafico della funzione  $f_0$  con  $\varepsilon = 1$  e  $\delta = 2$  nel dominio  $[-3, 3]^2$ .

che è differenziabile in quanto composizione di funzioni differenziabili e ha le seguenti proprietà:

- $f_p(z) = 1$  per ogni  $z \in D(p, \varepsilon)$ ,
- $f_p(z) = 0$  per ogni  $z \notin D(p, \delta)$ ,

dove con  $D(p, r)$  indichiamo il disco centrato in  $p$  e di raggio  $r$ . Le figure 4.1 e 4.2 mostrano rispettivamente i grafici di  $\beta$  e di  $f_0$  nel caso in cui  $\varepsilon = 1$  e  $\delta = 2$ . Non è difficile dimostrare che la seguente famiglia di funzioni  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  dove

$$\lambda_1 = \frac{f_{l_1}}{1 + f_{l_1}f_{d_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{f_{d_1}}{1 + f_{l_1}f_{d_1}} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2),$$

è una partizione dell'unità differenziabile qualunque sia la posizione delle singolarità  $l_1$  e  $d_1$  e qualunque sia la scelta di  $\varepsilon$  e  $\delta$ , valgono infatti le seguenti proprietà:

- $0 \leq \lambda_n \leq 1$  per  $n = 1, 2, 3$ . Dal momento che  $0 \leq f_p(z) \leq 1$  per ogni  $p, z \in \mathbb{C}$ , indipendentemente dalla posizione delle singolarità e dalla

scelta di  $\varepsilon$  e  $\delta$  abbiamo che  $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$  e per lo stesso motivo  $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{f_{l_1} + f_{d_1}}{1 + f_{l_1} f_{d_1}} \geq 0$ . Inoltre  $f_{l_1} + f_{d_1} \leq 1 + f_{l_1} f_{d_1}$  se e solo se  $f_{l_1} (1 - f_{d_1}) \leq 1 - f_{d_1}$  e quest'ultima disuguaglianza è certamente verificata sia quando  $f_{d_1} = 1$  che nel caso in cui  $f_{d_1} < 1$ . Ciò implica che  $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{f_{l_1} + f_{d_1}}{1 + f_{l_1} f_{d_1}} \leq 1$  e quindi anche  $\lambda_3$  è compresa tra 0 e 1.

- La famiglia dei supporti  $\{\text{Supp} \lambda_n\}_{n=1}^3$  è localmente finita dato che  $\Lambda$  è una famiglia finita di funzioni.
- $\sum_{n=1}^3 \lambda_n(z) = 1$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$  per la prima proprietà e per com'è definita  $\lambda_3$ .
- Ogni  $\lambda_n$  è differenziabile in quanto prodotto e quoziente di funzioni differenziabili.

Presi ora due dischi  $D(l_1, \delta)$  e  $D(d_1, \delta)$  intorno alle singolarità, si può calcolare il valore medio del quoziente  $\tilde{Q}^2(z) = \frac{LRO^2(z)}{\theta^2(z)}$  in  $\partial D(l_1, \delta)$  e  $\partial D(d_1, \delta)$ , rispettivamente  $\mu_{l_1}$  e  $\mu_{d_1}$  e definire il campo

$$Q^2(z) = \lambda_1(z) \mu_{l_1} + \lambda_2(z) \mu_{d_1} + \lambda_3(z) \tilde{Q}^2(z).$$

$Q^2$  è un campo vettoriale differenziabile che coincide con il quoziente  $\tilde{Q}^2$  nel complementare di  $D(l_1, \delta) \cup D(d_1, \delta)$  mentre assume i valori  $\mu_{l_1}$  e  $\mu_{d_1}$  rispettivamente in  $D(l_1, \varepsilon)$  e  $D(d_1, \varepsilon)$ .

Se l'impronta presenta due loop  $l_1, l_2$  e due delta  $d_1, d_2$  il procedimento è analogo a quello del caso precedente, l'unica differenza sta nella scelta della partizione dell'unità  $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^5$  infatti in questo caso

$$\lambda_n = \frac{f_{s_n}}{\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 (1 + f_{s_i} f_{s_j}) \left[ \prod_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^4 (1 + f_{s_i} f_{s_j} f_{s_k}) \right]^p (1 + f_{l_1} f_{d_1} f_{l_2} f_{d_2})^q}$$

per  $n = 1, \dots, 4$  dove  $s_n = l_1, d_1, l_2, d_2$  e

$$\lambda_5 = 1 - \sum_{i=1}^4 \lambda_i.$$

Gli esponenti  $p = \log_2 3 - 3$  e  $q = 8 - 4 \log_2 3$  sono necessari affinché la funzione  $\lambda_5$  assuma il valore 0 nelle intersezioni di tre o addirittura di tutti e quattro i dischi intorno alle singolarità nel caso in cui siano non vuote, ovvero nel caso (improbabile) in cui ci siano tre o quattro singolarità molto vicine tra loro.

Una volta costruito il campo vettoriale  $Q^2(z)$  è sufficiente considerare l'argomento modulo  $\pi$  della sua radice quadrata per ottenere il corrispondente campo direzionale desingularizzato.

### 4.1.1 Implementazione in Mathematica

Il campione di impronte con cui abbiamo lavorato è composto da 50 immagini di risoluzione  $500 \times 500$  e i relativi campi  $LRO$ . Per applicare l'algoritmo di desingularizzazione a queste impronte digitali abbiamo utilizzato il software Wolfram Mathematica 11.0, le immagini sono state perciò codificate come matrici  $500 \times 500$  a 256 livelli di grigio in modo tale da poter essere visualizzate mediante la funzione `Image` di Mathematica. Anche i relativi campi vettoriali  $LRO^2$  sono stati codificati come matrici  $500 \times 500$  a valori complessi e per la visualizzazione dei campi direzionali corrispondenti è stata definita una funzione chiamata `FieldPlot`. Questa funzione prende in input una matrice a valori complessi, ne estrae la radice dimezzando l'argomento dei singoli elementi complessi che vengono poi convertiti in vettori di  $\mathbb{R}^2$ , infine vengono raffigurate le direzioni di tali vettori con dei segmenti trami-

te la funzione `ListVectorPlot` di Mathematica. Le funzioni `FPImage[n]` e `FPField[n]` con  $1 \leq n \leq 50$  permettono di richiamare le matrici corrispondenti alle immagini e ai campi  $LRO^2$  delle 50 impronte. In Mathematica gli indici delle matrici corrispondono alle coordinate  $(-y, x)$  con l'origine nell'angolo in alto a sinistra, abbiamo perciò definito le funzioni `IndToCoord` e `StandardCoord`, che possiamo vedere in 4.1, per passare ad un sistema di coordinate standard con  $-1 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 2$ . Il teorema 3.2 ci garantisce che il campo  $\theta$  è invariante per un tale cambiamento di coordinate.

```
IndToCoord[{i_, j_}] := {j, 500 - i};
StandardCoord[{x0_, y0_}] := {(x0 - 250) / 250, y0 / 250};
```

Codice 4.1: Funzioni `IndToCoord` e `StandardCoord`.

Come possiamo notare in 4.2, per il calcolo del valore medio lungo il bordo delle immagini abbiamo prima di tutto definito l'insieme di indici da cui poi estrarre i valori dei campi  $LRO^2$ , poi abbiamo definito la funzione per il calcolo della media e abbiamo immagazzinato i risultati ottenuti in una lista.

```
frame = Join[
  Flatten[Table[{x, y} = IndToCoord[{i, j}, {500, 500}];
    {i, j}, {i, 16, 30}, {j, 16, 485}], 1],
  Flatten[Table[{x, y} = IndToCoord[{i, j}, {500, 500}];
    {i, j}, {i, 471, 485}, {j, 16, 485}], 1],
  Flatten[Table[{x, y} = IndToCoord[{i, j}, {500, 500}];
    {i, j}, {i, 31, 470}, {j, 16, 30}], 1],
  Flatten[Table[{x, y} = IndToCoord[{i, j}, {500, 500}];
    {i, j}, {i, 31, 470}, {j, 471, 485}], 1]
];

meanframe[n_] := Module[{field = FPField[n]}, Mean[Extract[field, frame]]];

FPMeanFieldList = Table[meanframe[n], {n, 01, 50}];
```

Codice 4.2: `frame` è la cornice cornice di 15 pixel di spessore su cui abbiamo calcolato la media di  $LRO^2$  cioè della matrice `FPField[n]` con la funzione `meanframe`. `FPMeanFieldList` è la lista che contiene il valore medio delle 50 impronte.

Successivamente, per la localizzazione delle singolarità delle 50 impronte, abbiamo definito il modulo dinamico in 4.3 che permette di visualizzare le immagini delle impronte sovrapposte ai relativi campo *LRO* e di posizionare correttamente, tramite degli slider, dei punti rossi in corrispondenza dei loop e dei punti blu in corrispondenza dei delta, partendo dalle posizioni iniziali date dalla funzione `FPSing`. Tale funzione calcola punto per punto l'indice di Poincaré del campo *LRO* e ne determina la posizione e la tipologia dei punti singolari.

```
Manipulate[
  DynamicModule[{{sing = FPSing[n],
    field1 = Show[Image[FPImage[n]],
      FieldPlot[FPField[n], Green], ImageSize ->500],
    field2 = Show[FieldPlot[FPField[n], Black], ImageSize ->500]}},
  Manipulate[
    Show[If[image, field1, field2],
      Graphics[If[loop1, {Red, AbsolutePointSize[5], Point[{l1x, l1y}]}], {}]],
      Graphics[If[loop2, {Red, AbsolutePointSize[5], Point[{l2x, l2y}]}], {}]],
      Graphics[If[delta1, {Blue, AbsolutePointSize[5], Point[{d1x, d1y
    ]}], {}]],
      Graphics[If[delta2, {Blue, AbsolutePointSize[5], Point[{d2x, d2y
    ]}], {}]]],
    {image, {True, False}},
    {{loop1, If[Length[sing]>0, True, False]}, {True, False}},
    {{l1x, If[Length[sing]>0, sing[[1, 2, 1]], 0]}, 0, 500, 1},
    {{l1y, If[Length[sing]>0, sing[[1, 2, 2]], 0]}, 0, 500, 1},
    {{delta1, If[Length[sing]>0, True, False]}, {True, False}},
    {{d1x, If[Length[sing]>0, sing[[2, 2, 1]], 0]}, 0, 500, 1},
    {{d1y, If[Length[sing]>0, sing[[2, 2, 2]], 0]}, 0, 500, 1},
    {{loop2, If[Length[sing]>2, True, False]}, {True, False}},
    {{l2x, If[Length[sing]>2, sing[[3, 2, 1]], 0]}, 0, 500, 1},
    {{l2y, If[Length[sing]>2, sing[[3, 2, 2]], 0]}, 0, 500, 1},
    {{delta2, If[Length[sing]>2, True, False]}, {True, False}},
    {{d2x, If[Length[sing]>2, sing[[4, 2, 1]], 0]}, 0, 500, 1},
    {{d2y, If[Length[sing]>2, sing[[4, 2, 2]], 0]}, 0, 500, 1},
    ControlPlacement ->Right]],
  {n, 1, 50, 1},
  SynchronousUpdating ->False,
  SynchronousInitialization ->False
]
```

Codice 4.3: Modulo dinamico per la localizzazione delle singolarità.

Per ognuna delle 50 impronte abbiamo poi definito i campi vettoriali di Sherlock-Monro con le seguenti funzioni a seconda del numero di singolarità:

```
Field0[n_] := Table[FPMeanFieldList[[n]], {500}, {500}]
```

Codice 4.4: Nessuna singolarità.

```

Field0[n_,l1_,d1_] := Module[{field,x,y},
  field = Table[{x,y}=StandardCoord[IndToCoord[{i,j},{500,500}]];
    FPMeanFieldList[[n]]*(x+I*y-1I)*
    Conjugate[x+I*y-d1},{i,1,500},{j,1,500}];
    NormField[field]^(1/4)*DirField[field]
]

```

Codice 4.5: Due singolarità.

```

Field0[n_,l1_,d1_,l2_,d2_] := Module[{field,x,y},
  field = Table[{x,y} = StandardCoord[IndToCoord[{i,j},{500,500}]];
    FPMeanFieldList[[n]]*(x+I*y-1I)*
    Conjugate[x+I*y-d1]*(x+I*y-1I)*
    Conjugate[x+I*y-d2},{i,1,500},{j,1,500}];
    NormField[field]^(1/4)*DirField[field]
]

```

Codice 4.6: Quattro singolarità.

La funzione `Loop` descritta in 4.7 produce la lista degli indici di una circonferenza di raggio 30 in una matrice di  $500 \times 500$  pixel centrata in  $z$ , cioè nell'elemento della matrice con indici corrispondenti alle coordinate  $\text{Re}(z)$  e  $\text{Im}(z)$ . La funzione `f` in 4.8 invece corrisponde alla funzione  $f_p(z)$ , genera infatti una matrice  $500 \times 500$  che assume il valore 0 fuori dal disco di raggio  $r$  pixel e centro  $z$ , 1 dentro al disco di raggio  $s$  centrato sempre in  $z$  e valori compresi tra 0 e 1 nella corona circolare tra i due dischi.

```

Loop[z_] :=
Module[{x,y,r=30},
  {x,y}=CoordToInd[OriginalCoord[{Re[z],Im[z]}],{500,500}];
  Select[LoopList[r,{x,y}],15<#[[1]]<485 && 15<#[[2]]<485 &]
]

```

Codice 4.7: Funzione `Loop`.

```

f[z_] :=
Module[{x,y,r=30,s=20},
  {x,y}=CoordToInd[OriginalCoord[{Re[z],Im[z]}],{500,500}];
  FPMask[1]*GaussianFilter[FuzzyDiskMatrix[r,1,{x,y},{500,500}],s]
]

```

Codice 4.8: Funzione `f`.

La funzione `Loop` è stata utilizzata per il calcolo del valore medio del quoziente  $\tilde{Q}^2 = \frac{LRO^2}{\theta^2}$  in un intorno dei punti singolari mentre la `f` per la



costruzione della partizione dell'unità  $\Lambda$ . Questi passaggi dell'algoritmo sono stati implementati direttamente nelle funzioni 4.9, 4.10 e 4.11, che a seconda del numero di singolarità restituiscono il campo vettoriale desingularizzato  $Q^2$ . I 50 campi desingularizzati ottenuti sono stati inseriti in una lista ed è stata definita una funzione chiamata `FPQuotientField` per richiamarli velocemente.

```
QuotientField[n_] :=
Module[{field=FPField[n],
       field0=Field0[n]},
       DirField[field/field0]
]
```

Codice 4.9: Nessuna singolarità.

```
QuotientField[n_, l1_, d1_] :=
Module[{field=FPField[n],
       field0=Replace[Field0[n, l1, d1], v_/; Chop[Abs[v]]==0->1., {2}],
       l11, ld1, F1, F2, Fden, qfield, lambda1, lambda2, lambda3},
       l11=Loop[l1];
       ld1=Loop[d1];
       F1=F[l1];
       F2=F[d1];
       Fden=1+F1 F2;
       qfield=field/field0;
       lambda1=F1/Fden;
       lambda2=F2/Fden;
       lambda3=1-(lambda1+lambda2);
       DirField[
         Mean[Extract[qfield, l11]]*lambda1+
         Mean[Extract[qfield, ld1]]*lambda2+
         qfield*lambda3
       ]
]
```

Codice 4.10: Due singolarità.

```
QuotientField[n_, l1_, d1_, l2_, d2_] :=
Module[{field=FPField[n],
       field0=Replace[Field0[n, l1, d1, l2, d2], v_/; Chop[Abs[v]]==0->1., {2}],
       l11, ld1, l12, ld2, F1, F2, F3, F4, Fden, qfield,
       lambda1, lambda2, lambda3, lambda4, lambda5},
       l11=Loop[l1];
       ld1=Loop[d1];
       l12=Loop[l2];
       ld2=Loop[d2];
       F1=F[l1];
       F2=F[d1];
       F3=F[l2];
       F4=F[d2];
       Fden=(1+F1*F2)*(1+F1*F3)*(1+F1*F4)*(1+F2*F3)*(1+F2*F4)*(1+F3*F4)*
         ((1+F1*F2*F3)*(1+F2*F3*F4)*(1+F3*F4*F1)*(1+F4*F1*F2))^(Log
[2,3]-3)*
```

```
(1+F1*F2*F3*F4)^(8-4*Log[2,3]);
qfield=field/field0;
lambda1=F1/Fden;
lambda2=F2/Fden;
lambda3=F3/Fden;
lambda4=F4/Fden;
lambda5=1-(lambda1+lambda2+lambda3+lambda4);
DirField[
  Mean[Extract[qfield,l11]]*lambda1+
  Mean[Extract[qfield,ld1]]*lambda2+
  Mean[Extract[qfield,l12]]*lambda3+
  Mean[Extract[qfield,ld2]]*lambda4+
  qfield*lambda5
]
```

Codice 4.11: Quattro singolarità.

### 4.1.2 Esempi

Nelle figure dalla 4.3 alla 4.7 possiamo osservare in alto le immagini di 10 impronte digitali, 2 per ogni tipologia, al centro una rappresentazione grafica dei relativi campi *LRO* e in basso la rappresentazione campi desingularizzati ottenuti con Mathematica.

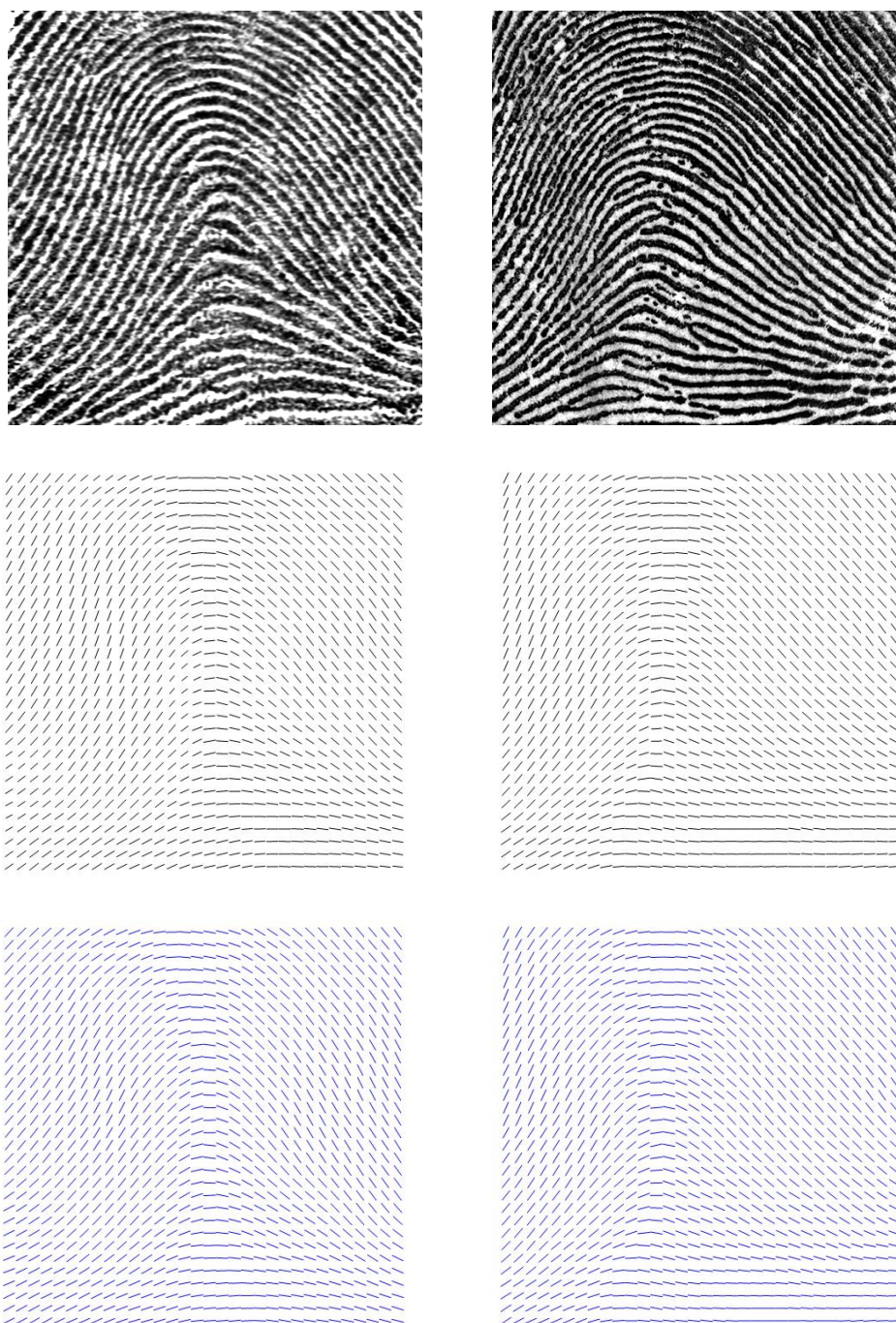


Figura 4.3: Impronte di tipo arch.

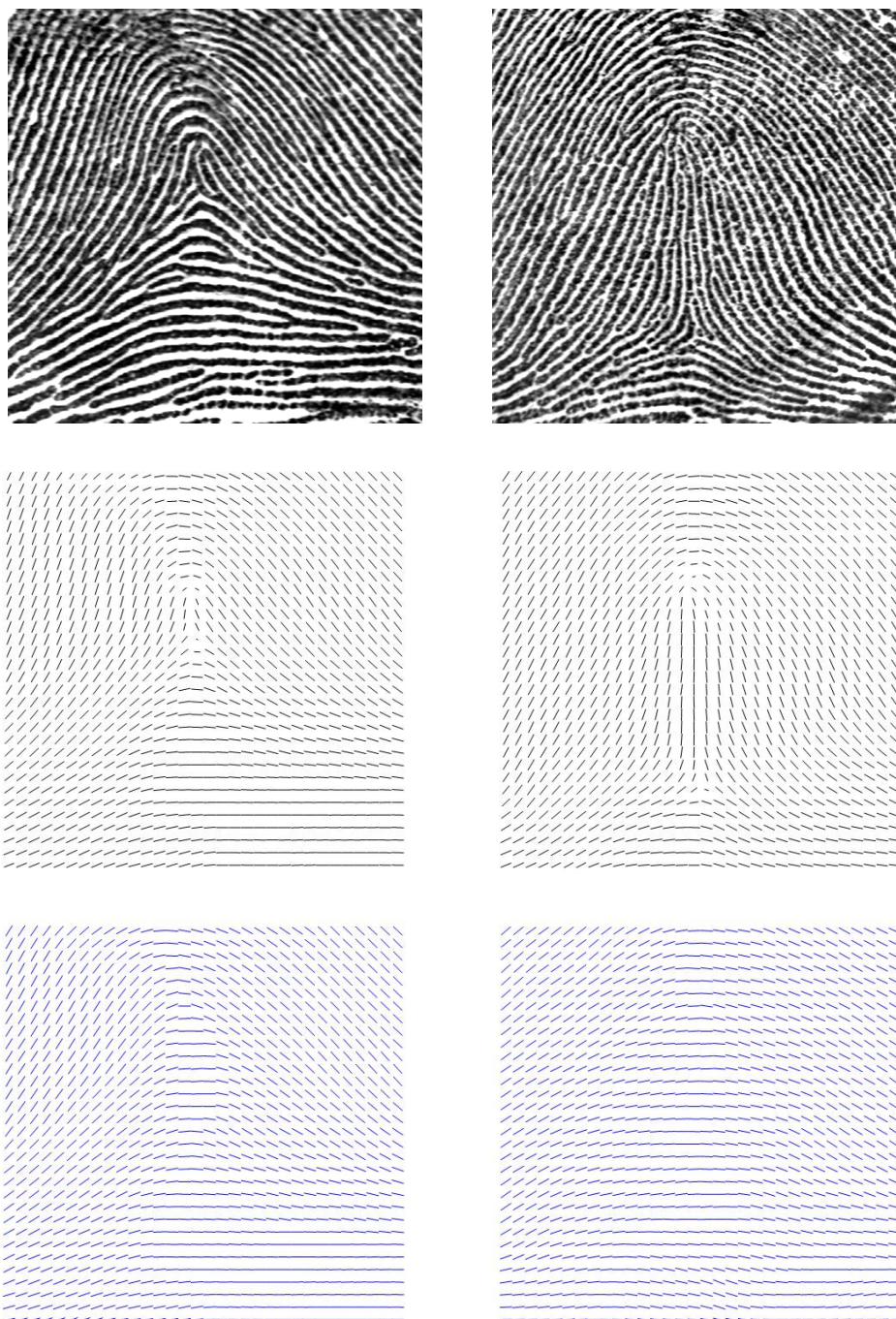


Figura 4.4: Impronte di tipo tented arch.



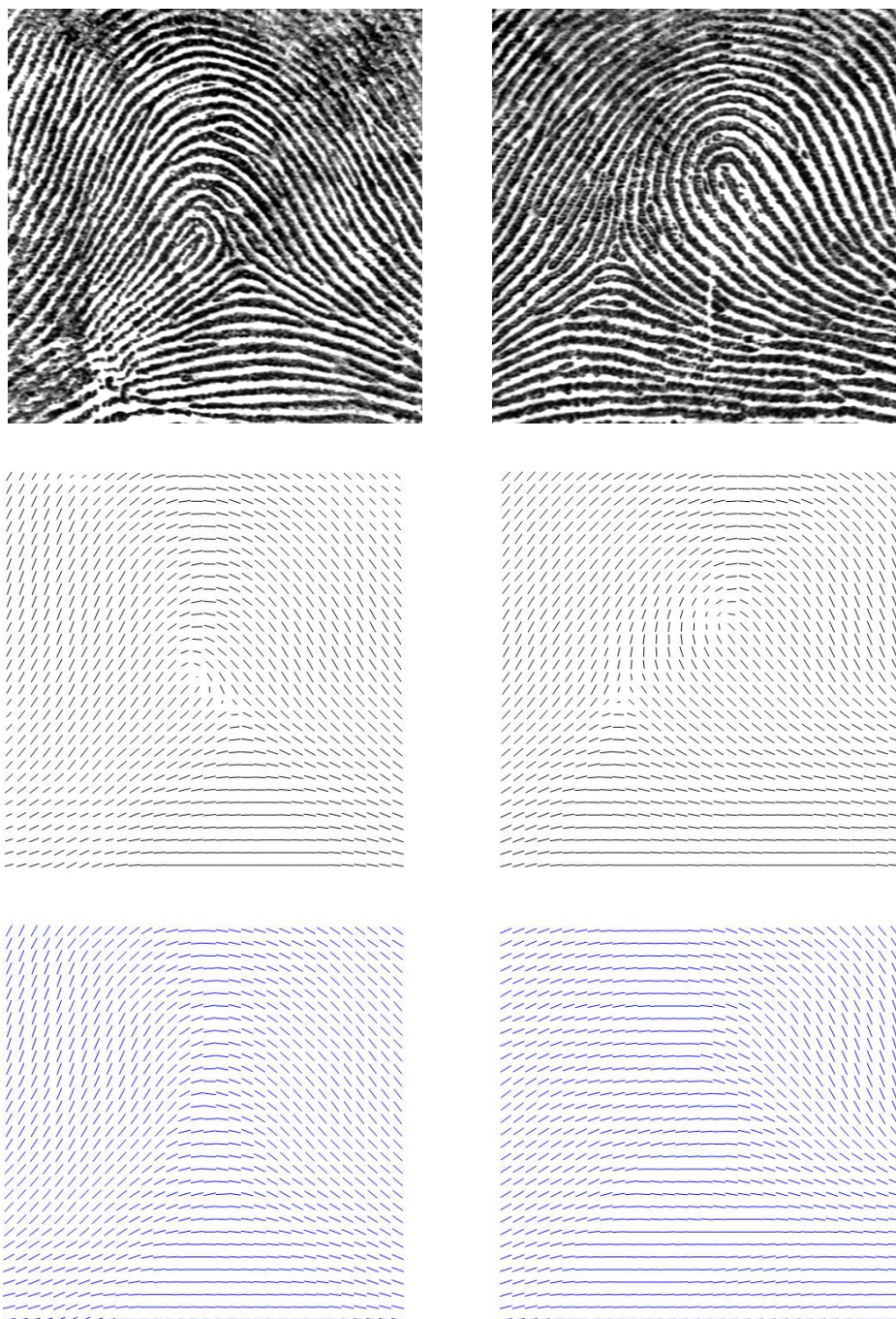


Figura 4.5: Impronte di tipo loop.

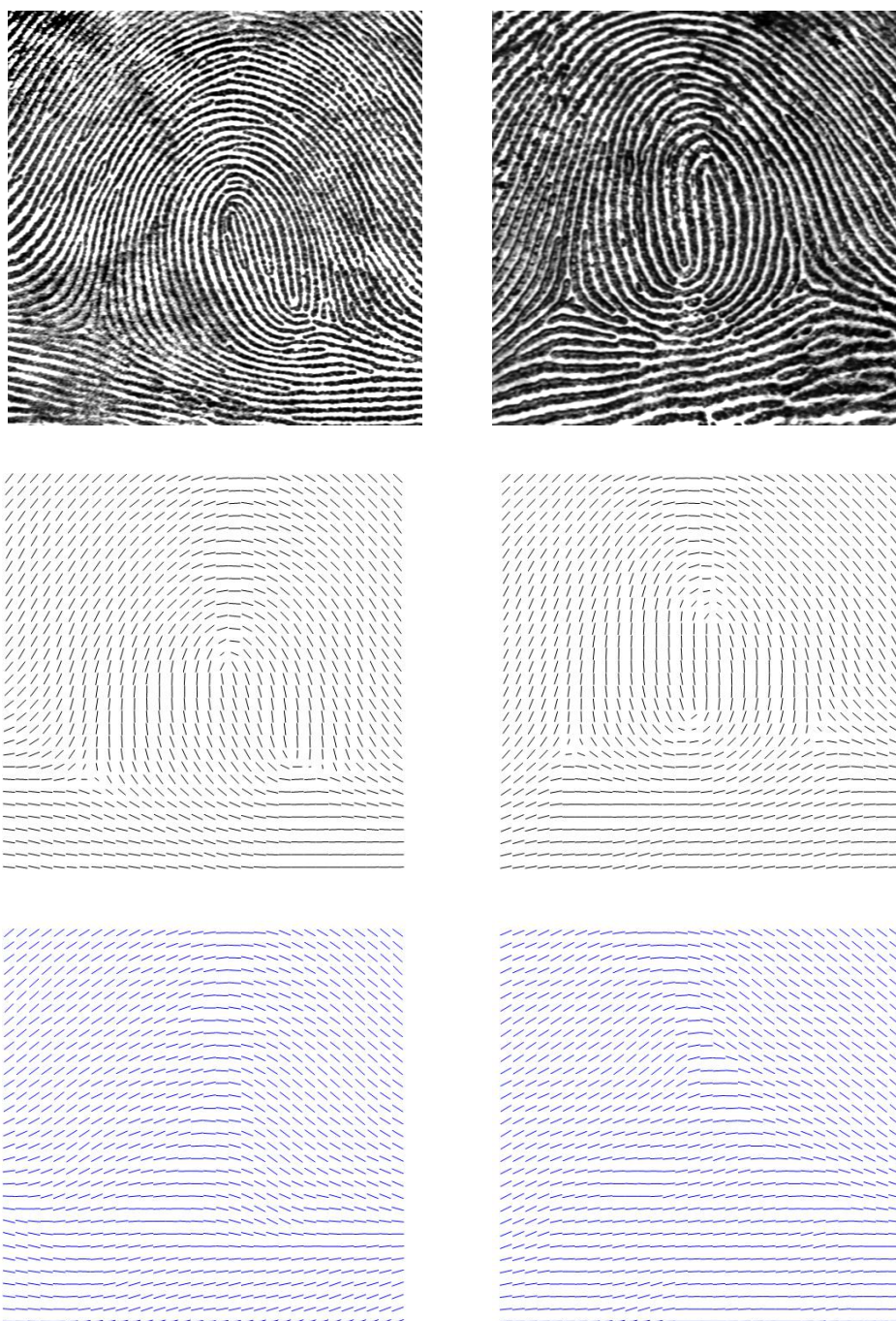


Figura 4.6: Impronte di tipo double loop.



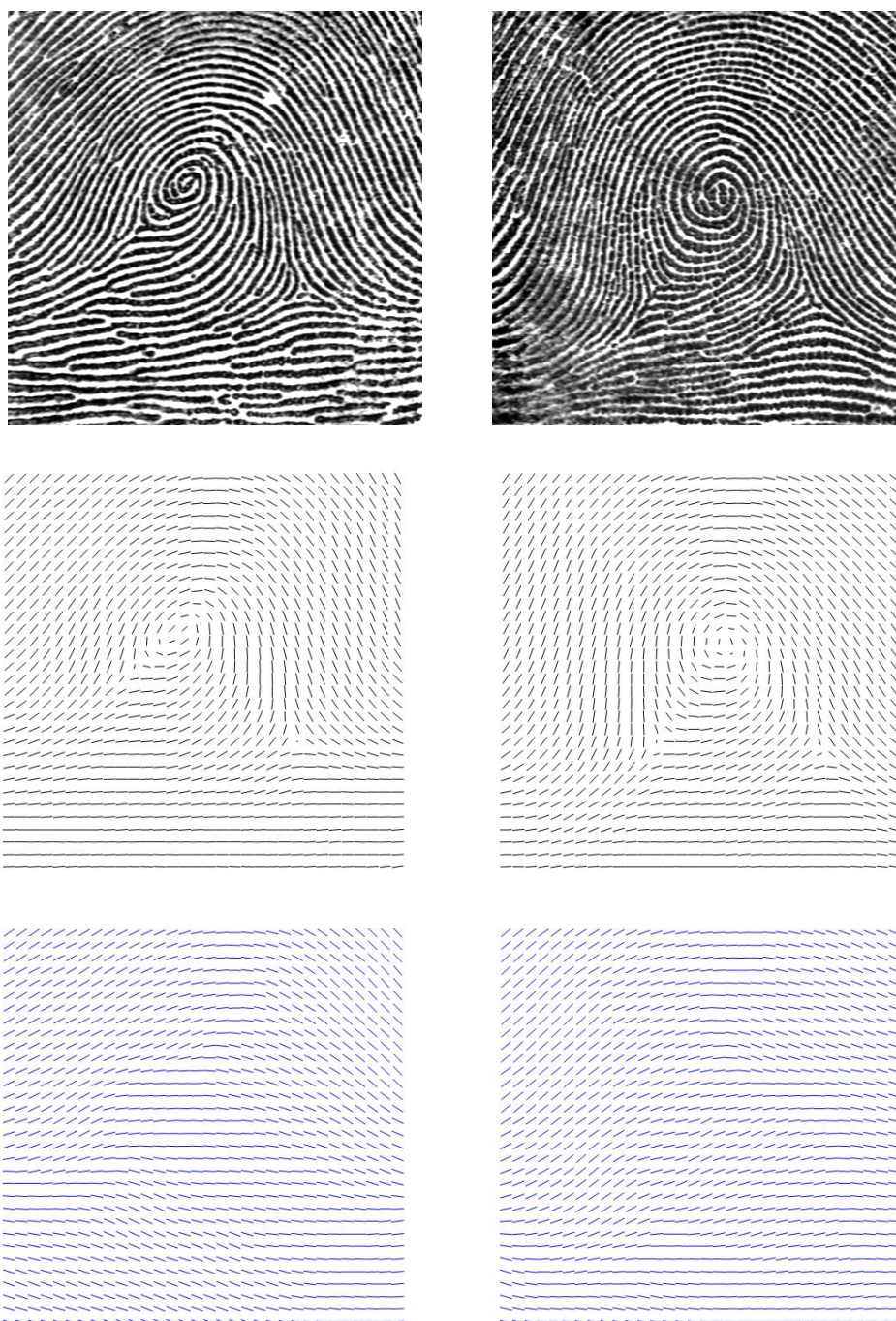


Figura 4.7: Impronte di tipo whorl.

## 4.2 Approssimazione dei campi desingularizzati

Come si può notare dalle immagini ogni campo desingularizzato ha un andamento simile a quello di un campo *LRO* di un'impronta ad arco, perciò, come suggerito anche in [10] e in [6] abbiamo definito un campo sinusoidale che, al variare di alcuni parametri reali, può approssimare i campi desingularizzati ottenuti precedentemente. Il campo parametrico che abbiamo utilizzato è  $P_1(\Phi, x, y)$  con parte reale  $\text{Re}(P_1(\Phi, x, y)) = 1$  e parte immaginaria

$$\text{Im}(P_1(\Phi, x, y)) = -(y - b + gx) \frac{pa\pi}{\omega} \sin(k(x, y)) \left( \frac{\cos(k(x, y)) + 1}{2} \right)^{p-1},$$

dove  $k(x, y) = \frac{2\pi}{\omega}(x + h \cdot (y - b))$  e con parametri  $\Phi = (a, p, b, \omega, h, g)$ . I parametri  $a$  e  $p$  determinano l'ampiezza e la pendenza della curve integrali del campo,  $b$  è un parametro che permette di traslare in verticale il campo,  $\omega$  corrisponde al periodo delle curve mentre  $h$  e  $g$  sono due fattori di taglio, rispettivamente orizzontale e verticale. Data un impronta digitale e il suo campo desingularizzato  $Q$  abbiamo utilizzato il metodo dei minimi quadrati per ottenere il vettore dei parametri  $\bar{\Phi}$  che dà la migliore approssimazione. Tale vettore potrebbe essere utilizzato negli algoritmi per il confronto di impronte digitali.

Osservando i campi desingularizzati delle impronte digitali abbiamo notato che sebbene ricordino le funzioni *LRO* di impronte ad arco non sempre hanno un andamento regolare, ovvero alcune caratteristiche come l'ampiezza, il periodo ma anche il fattore di taglio orizzontale possono non essere costanti ma dipendere dalla coordinata  $y$ , il fattore di taglio verticale invece può dipendere da  $x$ . abbiamo deciso perciò di sostituire i parametri del campo  $P_1$



con dei polinomi, in questo caso di terzo grado, nella variabile  $y$  per  $a, \omega, h$  e  $x$  per  $g$ . Abbiamo quindi definito il campo  $P_2(\Psi, x, y)$  che come  $P_1$  ha parte reale costante pari a 1 ma parte immaginaria

$$\text{Im}(P_2(\Psi, x, y)) = -(y-b+g(x)) \frac{pa(y)\pi}{\omega(y)} \sin(k(x, y)) \left( \frac{\cos(k(x, y)) + 1}{2} \right)^{p-1},$$

dove  $k(x, y) = \frac{2\pi}{\omega}(x + h(y - b))$  e il vettore dei parametri  $\Psi$  è costituito dai coefficienti del polinomio  $a(y)$ ,  $p$ ,  $b$  e i coefficienti di  $\omega(y)$ ,  $h(y)$ ,  $g(x)$ . In questo modo a scapito di un maggior numero di parametri si ottiene una migliore approssimazione del campo desingularizzato, vedremo in seguito degli esempi.

### 4.2.1 Implementazione in Mathematica

Il codice seguente è relativo al campo parametrico  $P_1$ , per il campo  $P_2$  sono state utilizzate le stesse funzioni opportunamente modificate.

Le funzioni `Arch1` e `Arch2` in 4.12 definiscono il campo  $P_1^2$ , la differenza tra le due sta nel fatto che la prima restituisce una matrice  $500 \times 500$  dipendente dai parametri  $a, p, b, \omega, h, g$ , mentre la seconda non dipende solo dai parametri ma anche dagli indici  $i$  e  $j$  che sono variabili.

```

Arch1[a_, p_, b_, omega_, h_, g_] :=
Module[{arg, f, field, Vx, Vy, x, y},
  arg = 2*Pi/omega*(x+h*(y-b));
  f = Compile[{x, y}, -((y-b)+g*x)*p*a/2*(2*Pi/omega)*
    Sin[arg]*((Cos[arg]+1)/2)^(p-1)];
  field = N[FPMask[01]*
    DirField[Table[{x, y} = StandardCoord[IndToCoord[{i, j}, {500, 500}]]];
    Vx = 1;
    Vy = -((y-b)+g*x)*p*a/2*(2*Pi/omega)*
      Sin[arg]*((Cos[arg]+1)/2)^(p-1);
  (Vx+I*Vy)^2,
  {i, 1, 500}, {j, 1, 500}]]]

Arch2[a_, p_, b_, omega_, h_, g_][i_, j_] :=
Module[{arg, f, field, Vx, Vy, x, y},
  arg = 2*Pi/omega*(x+h*(y-b));

```

```

f = Compile[{x,y}, -((y-b)+g*x)*p*a/2*(2*Pi/omega)*
      Sin[arg]*((Cos[arg]+1)/2)^(p-1)];
field = N[FPMask[01][[i,j]]*DirField[
{x,y} = StandardCoord[IndToCoord[[i,j],{500,500}]]];
Vx = 1;
Vy = -((y-b)+g*x)*p*a/2*(2*Pi/omega)*
      Sin[arg]*((Cos[arg]+1)/2)^(p-1);
(Vx+I*Vy)^2]]
]

```

Codice 4.12: Definizione del campo  $P_1^2$ .

Per ogni impronta abbiamo utilizzato la funzione `Fit1` definita in 4.13 per determinare il vettore dei parametri  $\bar{\Phi}$  che restituisce la miglior approssimazione del rispettivo campo desingularizzato. Tale funzione calcola il minimo rispetto a  $\Phi$  della funzione  $\|P_1^2(\Phi, x, y) - Q^2(x, y)\|$  nel dominio  $[-1, 1] \times [0, 2]$  tramite la funzione di Mathematica `FindMinimum`. Ricordiamo che i campi sono codificati come matrici perciò la norma è la norma di *Frobenius* definita in questo modo:  $\|A\| = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{i,j}}$ .

```

Fit1[n_] := Module[{field = FPQuotientField[n]},
FindMinimum[
Evaluate[Chop[Norm[
Table[Arch2[a,p,b,omega,h,g][i,j]-field[[i,j]],
{i,Range[1,500,5]+2},{j,Range[1,500,5]+2}],
"Frobenius"]]],
{{a,0.5},{p,1.2},{b,0},
{omega,2.5},{h,0},{g,0}},
MaxIterations->200]
]

```

Codice 4.13: La funzione `Fit1` calcola  $\bar{\Phi}$ .

Una volta valutato il campo  $P_1^2$  in  $\bar{\Phi}$  con la seguente funzione, abbiamo utilizzato `FieldPlot` per visualizzare il campo direzionale corrispondente.

```

FittedField1[n_] := Module[{fit = Fit1[n],parameters},
parameters = fit[[2]];
Arch1[a,p,b,omega,h,g] /. parameters
]

```

Codice 4.14: Funzione che restituisce la matrice corrispondente al campo  $P_1^2(\bar{\Phi}, x, y)$ .

Infine per quantificare e analizzare l'errore tra il campo desingularizzato  $Q(z)$  e l'approssimazione  $P_1(\bar{\Phi}, x, y)$  abbiamo raffigurato in un grafico a

colori la differenza tra gli argomenti dei rispettivi campi vettoriali, la scala di colori va dal blu che corrisponde ad un errore di  $-\pi$  fino al rosso che indica un errore pari a  $\pi$  passando per il bianco che significa errore nullo.

```

ErrorDensity1c[n_] :=
Module[{field = FPQuotientField[n], fit = Fit1[n],
  parameters, fittedfield, density},
  parameters = fit[[2]];
  fittedfield = Arch1[a, p, b, omega, h, g] /. parameters;
  density = Arg[fittedfield] - Arg[field];
  ListDensityPlot[Reverse[density], Mesh -> None,
    PlotLegends -> BarLegend[{ColorData["TemperatureMap"] [
  Rescale[#, {-Pi, Pi}] &, {-Pi, Pi}]}],
    ColorFunction -> (ColorData["TemperatureMap"] [Rescale[#, {-Pi
  , Pi}] &)],
    ColorFunctionScaling -> False,
    PlotRange -> {-Pi, Pi}, ClippingStyle -> {Blue, Red},
    ImageSize -> 500]
]

```

Codice 4.15: La funzione `ErrorDensity1c` permette di visualizzare l'errore tra  $Q^2(z)$  e  $P_1^2(\bar{\Phi}, x, y)$ .

### 4.2.2 Esempi

Le figure dalla 4.8 alla 4.12 mostrano in alto i campi desingularizzati delle 10 impronte viste precedentemente, al centro le relative approssimazioni ottenute con il campo  $P_1$ , mentre in basso sono riportati i grafici ottenuti con la funzione definita in 4.15. Nelle successive figure invece, dalla 4.13 alla 4.17, possiamo notare l'approssimazione dei campi desingularizzati con il campo  $P_2$  e come questa sia in generale migliore rispetto a quella che si può ottenere con il campo  $P_1$ .

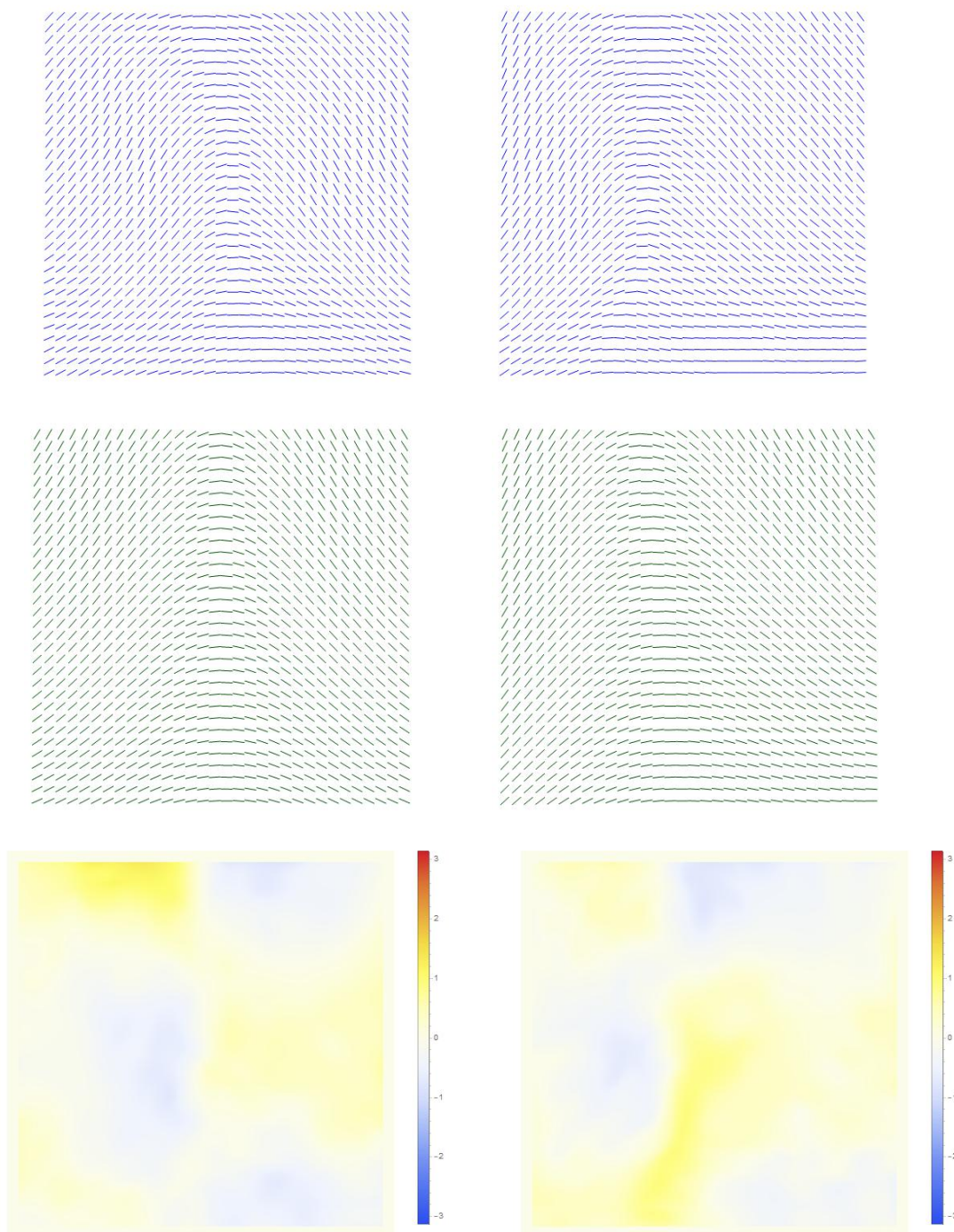


Figura 4.8: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_1$  di due impronte di tipo arch.

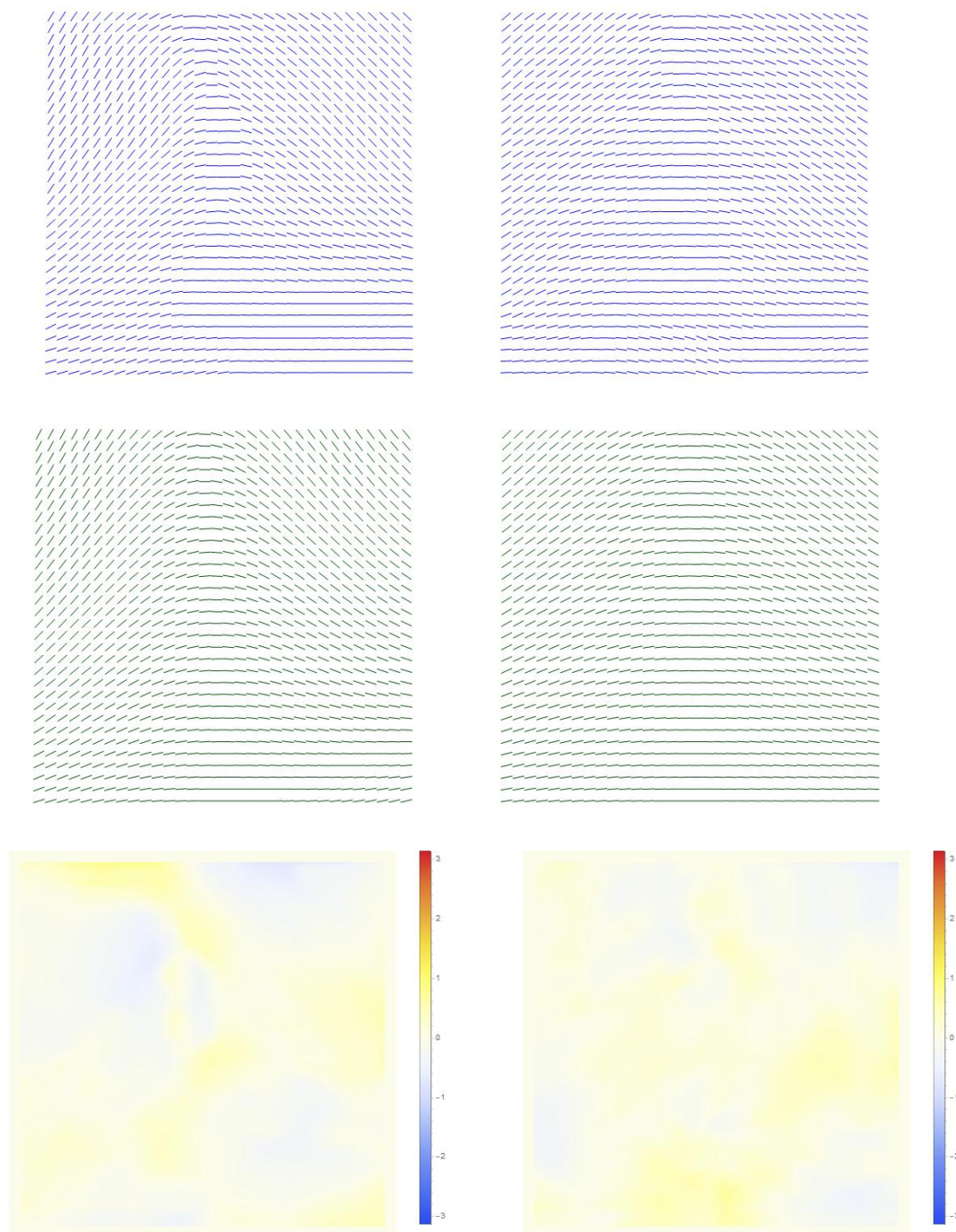


Figura 4.9: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_1$  di due impronte di tipo tented arch.



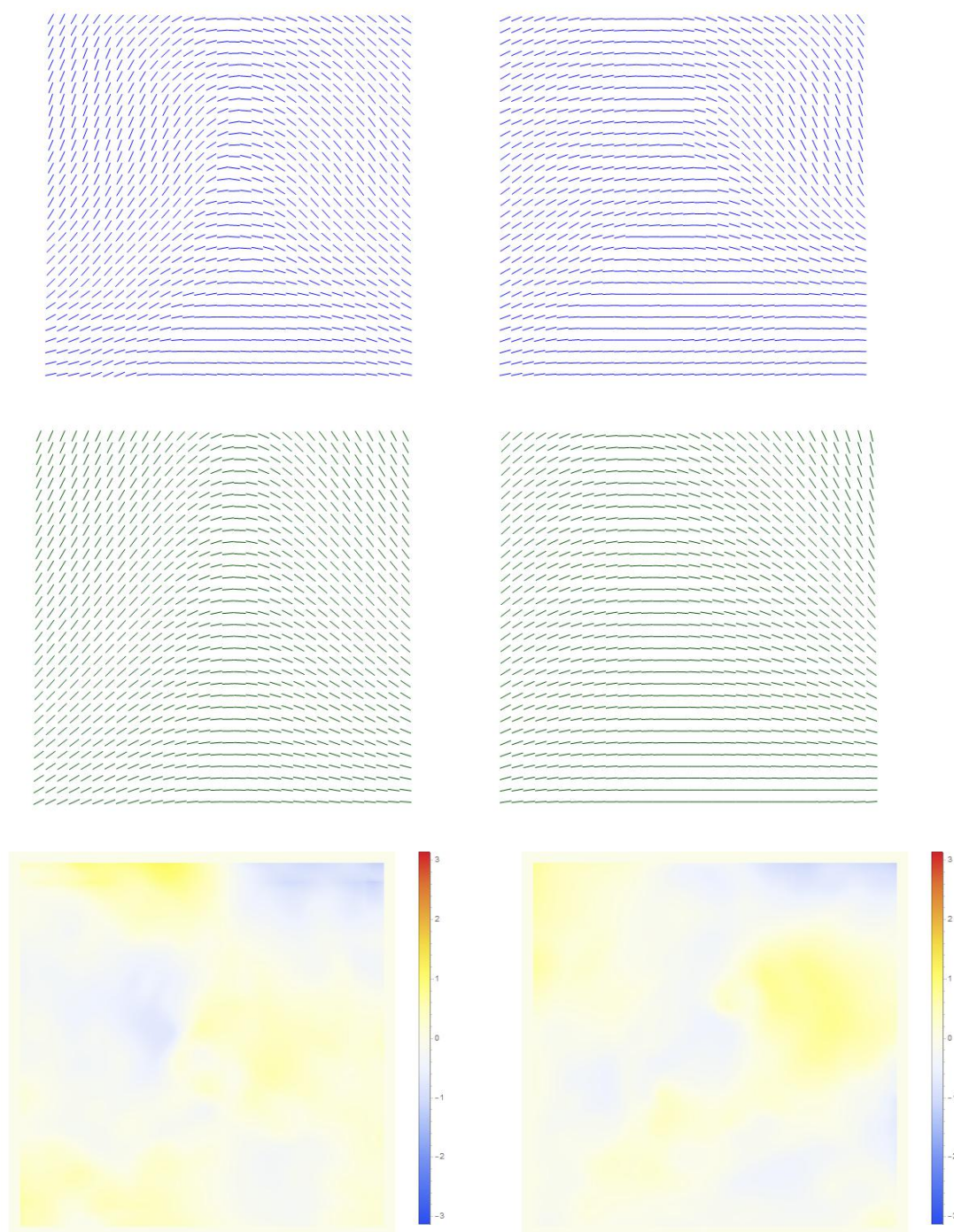


Figura 4.10: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_1$  di due impronte di tipo loop.

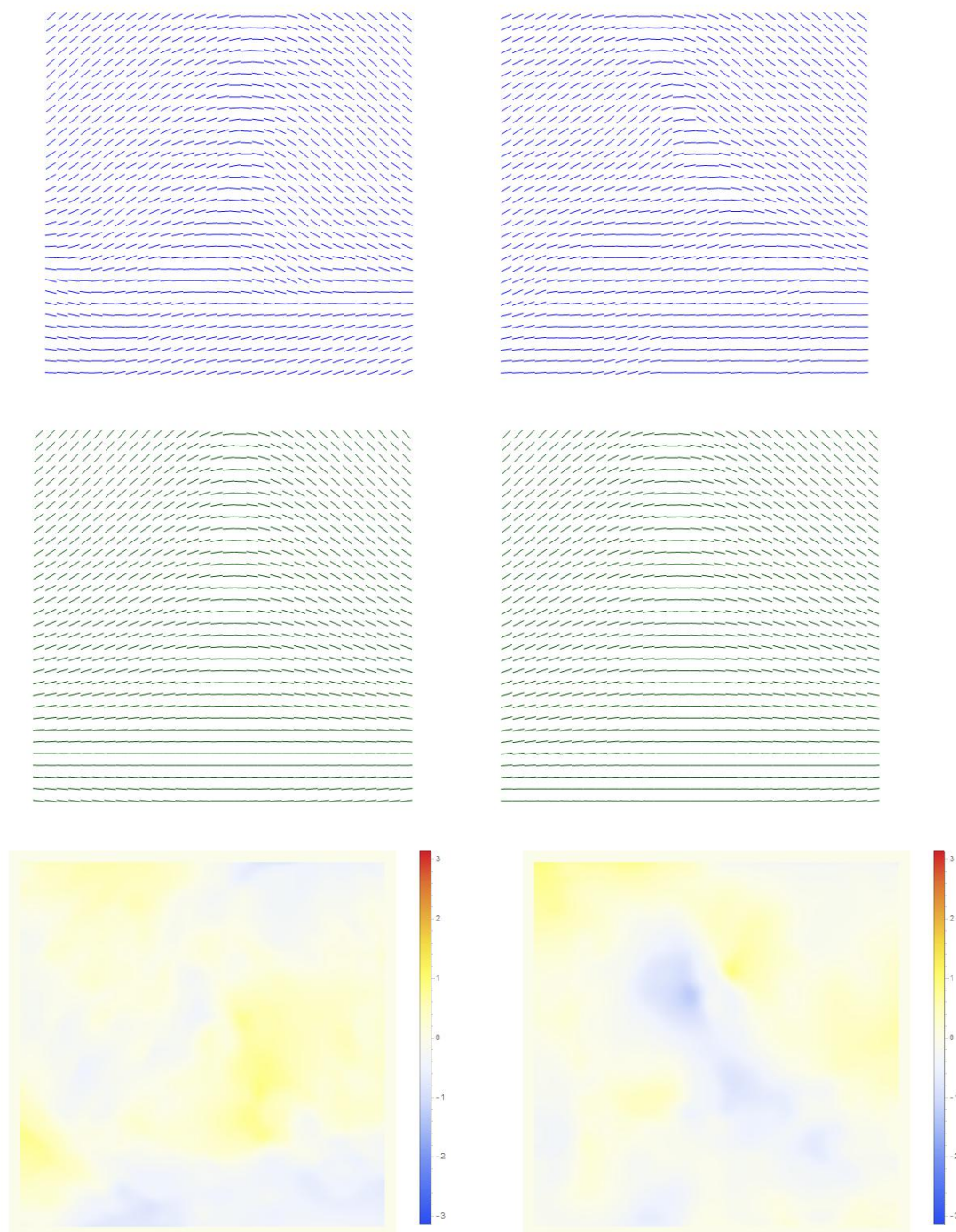


Figura 4.11: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_1$  di due impronte di tipo double loop.



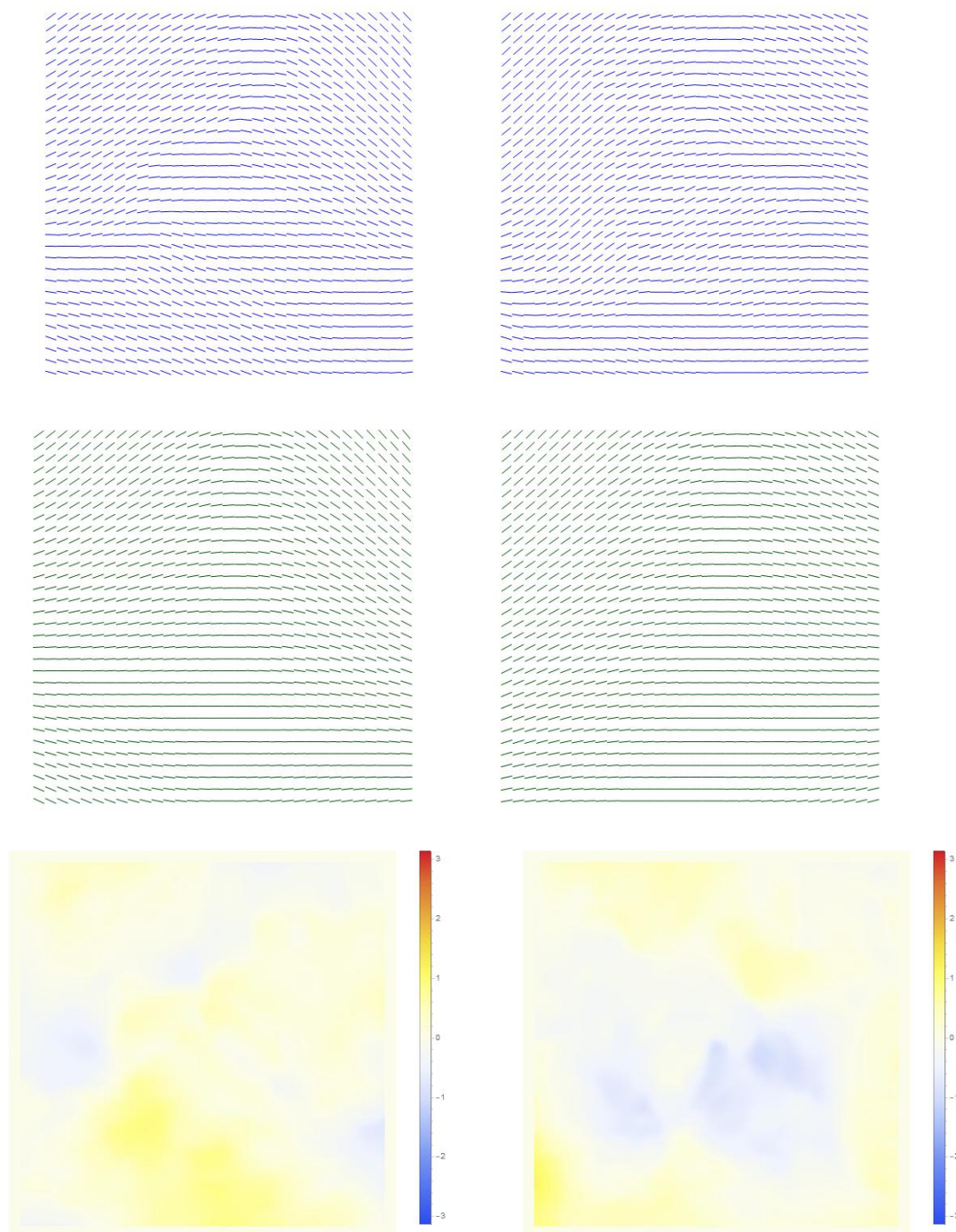


Figura 4.12: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_1$  di due impronte di tipo whorl.



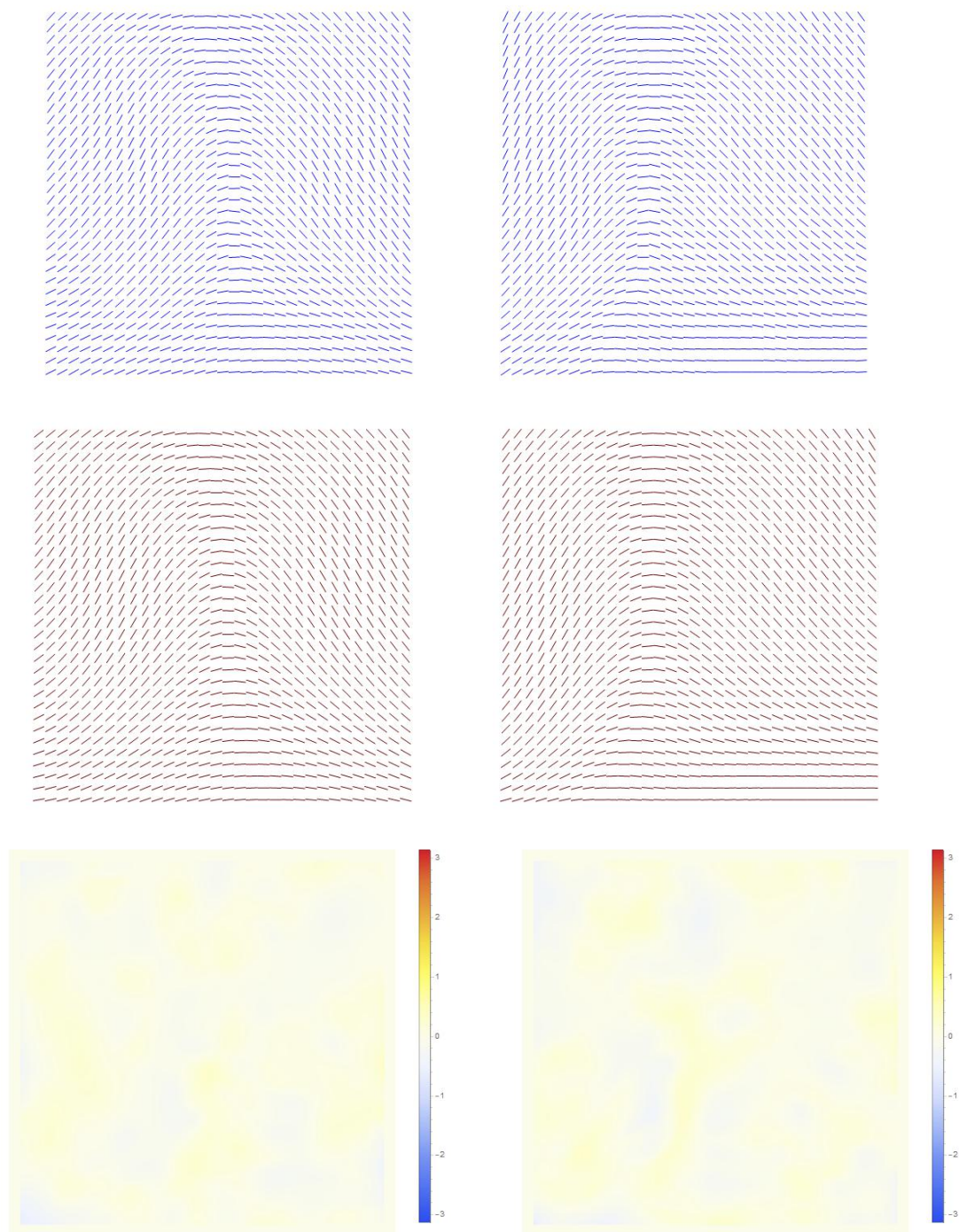


Figura 4.13: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_2$  di due impronte di tipo arch.

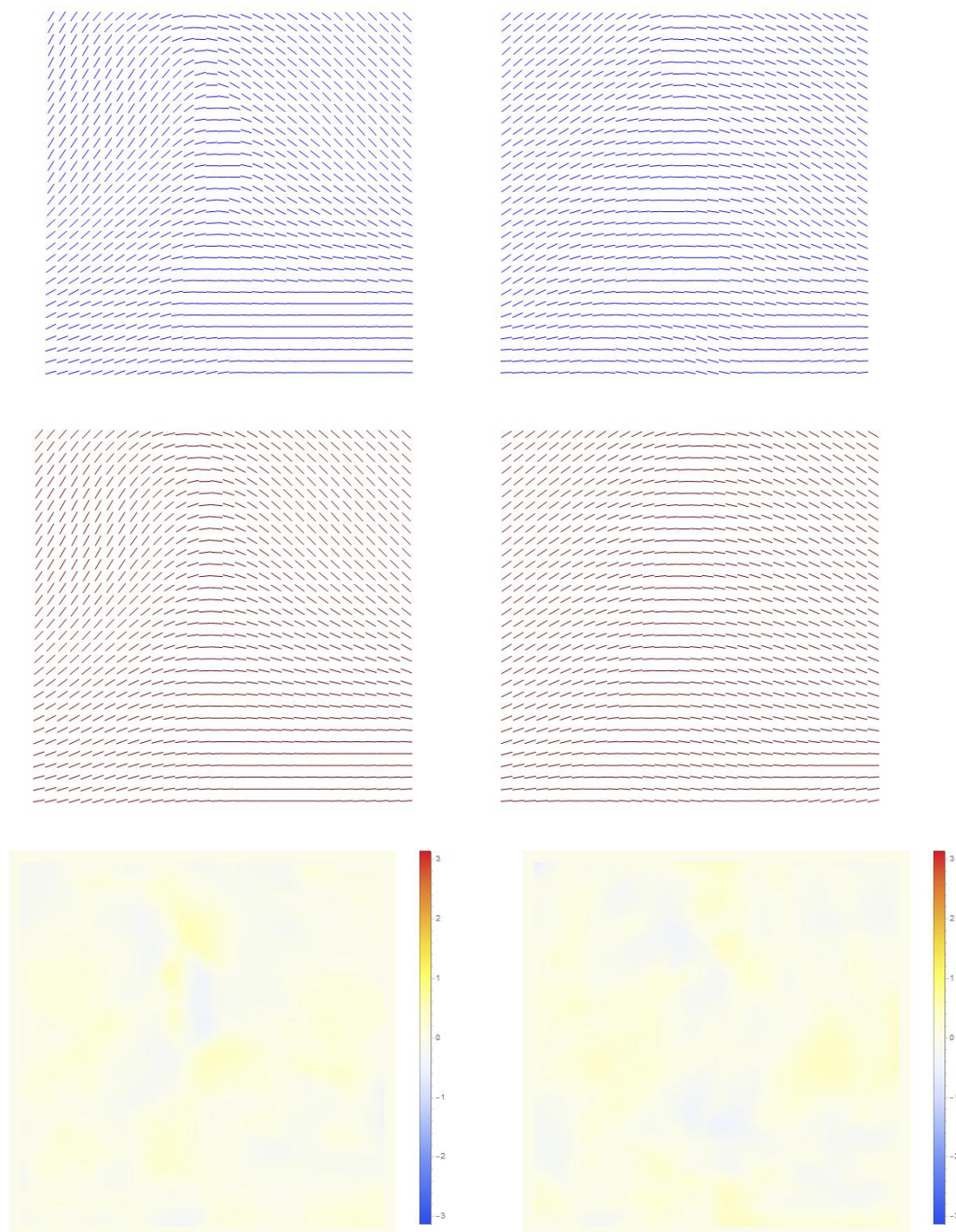


Figura 4.14: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_2$  di due impronte di tipo tented arch.



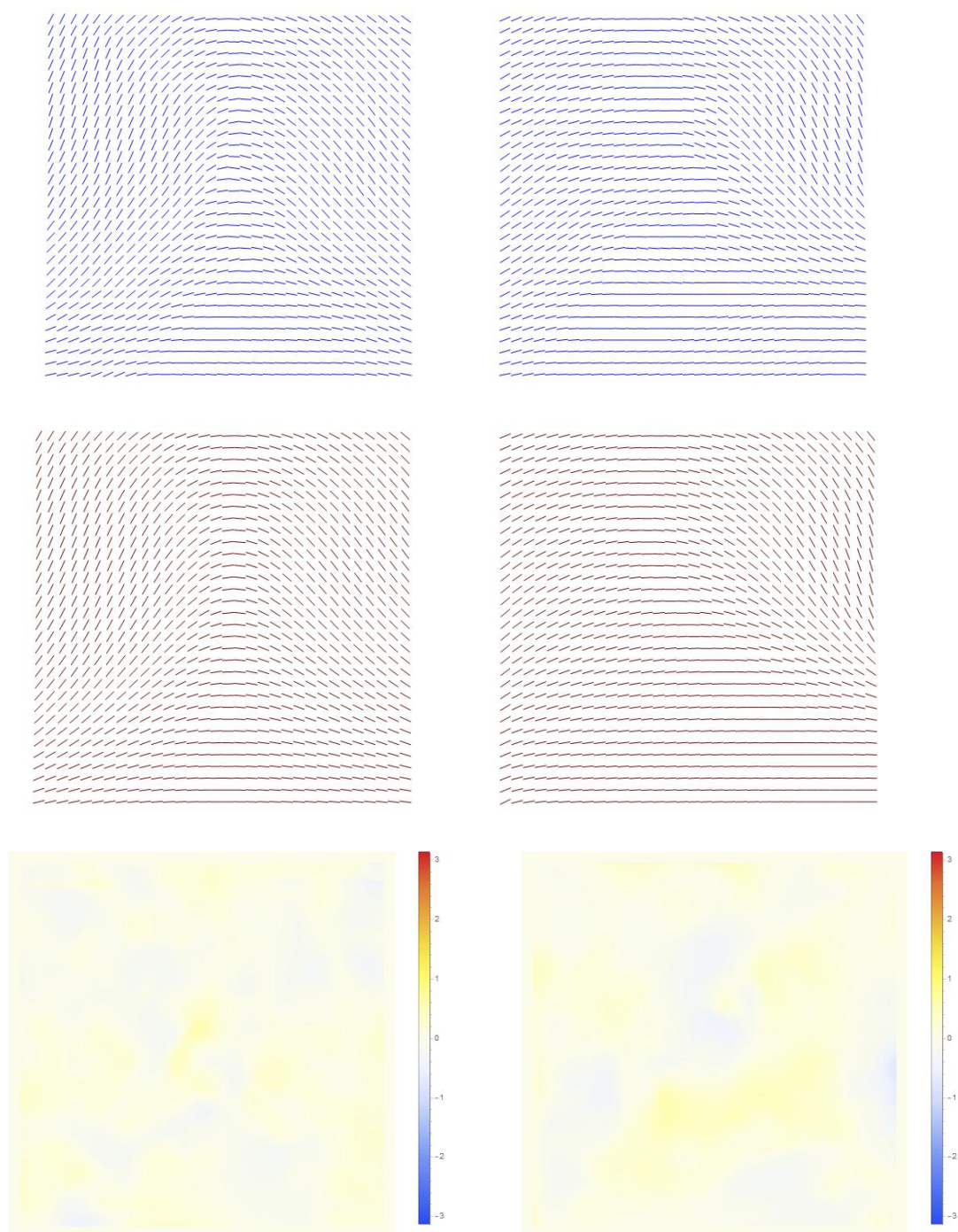


Figura 4.15: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_2$  di due impronte di tipo loop.

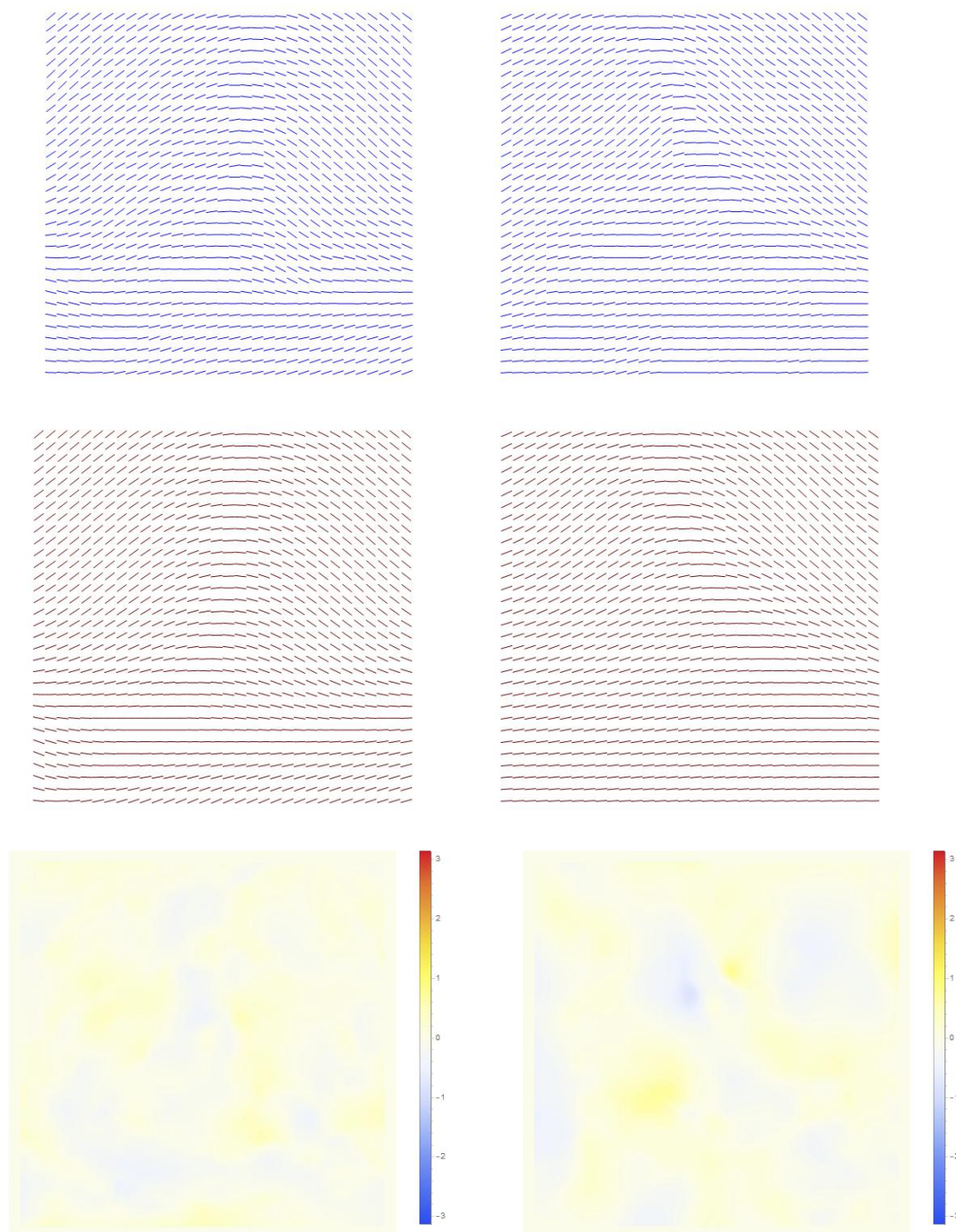


Figura 4.16: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_2$  di due impronte di tipo double loop.



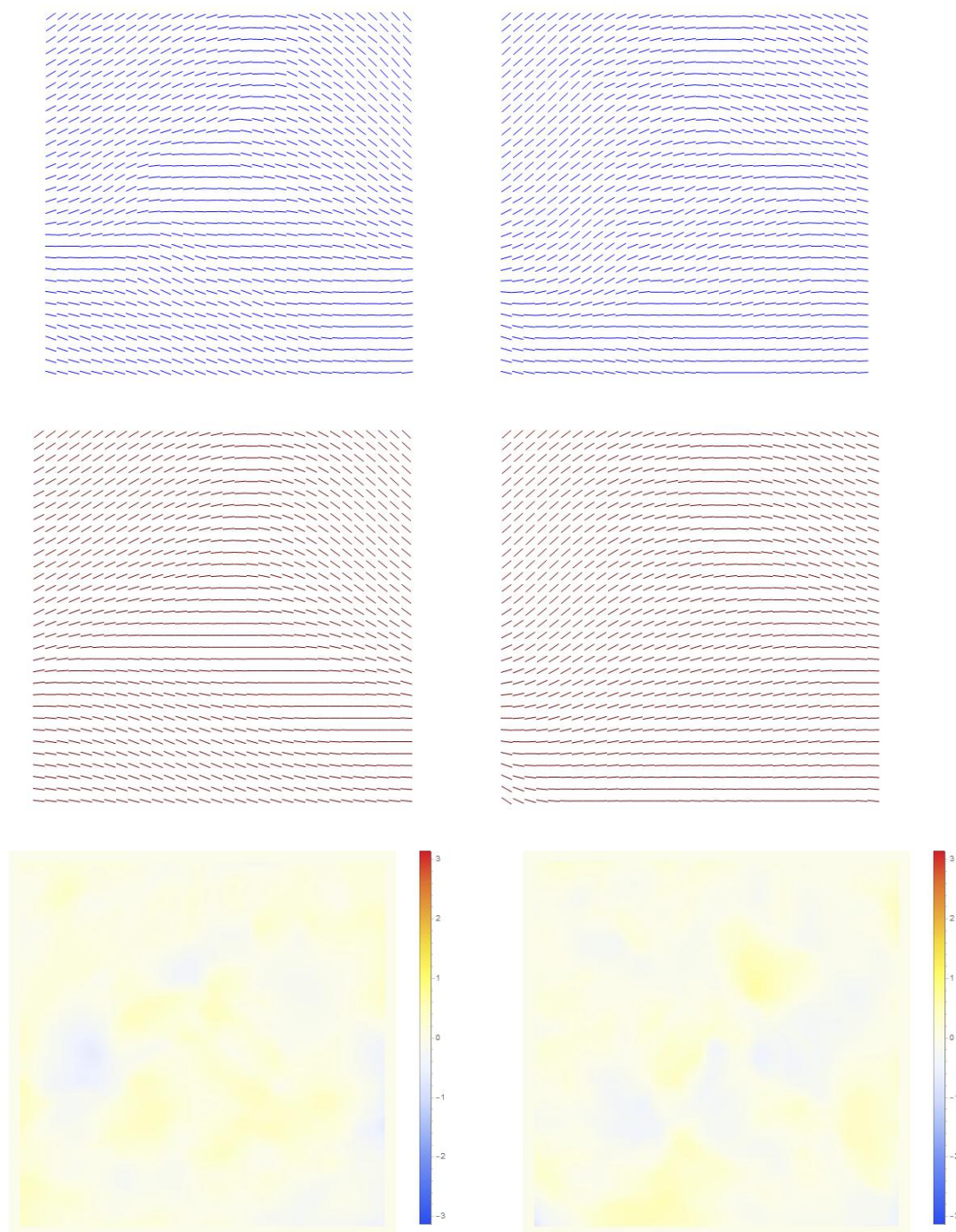


Figura 4.17: Approssimazione dei campi desingularizzati mediante il campo  $P_2$  di due impronte di tipo whorl.

# Conclusione

L'obiettivo principale di questo elaborato era quello di fornire degli strumenti utili per il confronto delle impronte.

Abbiamo analizzato il modello di Sherlock-Monro che utilizza un campo direzionale per approssimare la funzione *LRO* di un'impronta digitale e ne abbiamo dimostrato l'invarianza rispetto alle similitudini del piano. L'approssimazione che offre tale modello non è molto accurata dato che si basa solo su  $\theta_0$  ovvero la direzione media di *LRO* all'estremità dell'immagine, sulla tipologia e sulla posizione delle singolarità dell'impronta. Uno degli obiettivi che ci prefiggiamo per il futuro infatti è quello di riuscire a migliorare tale approssimazione con un modello che tiene conto anche dell'orientazione delle singolarità e che sia invariante per similitudini o meglio ancora per tutte le applicazioni conformi.

Nonostante i difetti, il modello analizzato risulta comunque utile in diverse applicazioni, nel nostro caso ad esempio è stato utilizzato per desingularizzare i campi *LRO* di partenza. L'algoritmo di desingularizzazione è stato implementato in Wolfram Mathematica 11.0 ed è stato applicato ad un campione di 50 impronte, alcuni dei campi ottenuti sono mostrati nella sottosezione 4.1.2. Un problema da evidenziare in tale procedimento è il se-

guente:  $\theta_0$  nel modello rappresenta la direzione "all'infinito" del campo, nella pratica invece viene calcolato come la media del campo *LRO* in una cornice del bordo dell'immagine, dipende quindi dall'immagine dell'impronta e dalla forma della cornice considerata.

Infine abbiamo utilizzato i campi desingularizzati precedentemente ottenuti per associare un vettore di numeri reali alle impronte. Tale vettore, utilizzabile negli algoritmi per il confronto e matching delle impronte, è stato ottenuto approssimando i campi desingularizzati con un campo sinusoidale controllato da alcuni parametri. I problemi riscontrati in questa fase e che saranno oggetto di studi futuri sono i seguenti: il campo parametrico da noi utilizzato non è esprimibile come funzione della variabile complessa  $z$ , inoltre per ottenere delle buone approssimazioni sono necessari molti parametri.

# Bibliografia

- [1] Abate M., Tovena F., *Curve e superfici*, Springer, Milano, 2006.
- [2] Ahlfors L. V., *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.
- [3] Bramanti M., Pagani C. D., Salsa S., *Analisi matematica 2*, Zanichelli, 2009.
- [4] Dubrovin B. A., Fomenko A. T., Novikov S. P., *Modern Geometry - Methods and Applications: Part 2: The Geometry and Topology of Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 93, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [5] Godbillon C., *Dynamical Systems on Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.
- [6] Gu J., Zhou J., *Modeling orientation fields of fingerprints with rational complex functions*, Pattern Recognition 37, 389-391, 2004, Department of Automation, Tsinghua University, Beijing.
- [7] Kawagoe M., Tojo A., *Fingerprint Pattern Classification*, Pattern Recognition 17, 295-303, Electrotechnical Laboratory, Tsukuba Science City, Ibaraki, 1984.



- 
- [8] Kinsey L. C., *Topology of Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [9] Maltoni D., Maio D., *Direct Gray-Scale Minutiae Detection In Fingerprint*, IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, Vol. 19, No. 1, 1997.
- [10] Maltoni D., Maio D., Jain A. K., Prabhakar S., *Handbook of Fingerprint Recognition*, Springer-Verlag, London, 2009.
- [11] Massey W. S., *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [12] Milnor J. W., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Princeton, 1965.
- [13] Monro D. M., Sherlock B. G., *A Model for Interpreting Fingerprint Topology*, Pattern Recognition 26, 1047-1055, 1993.
- [14] Spivak M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1*, Publish or Perish Inc., Houston, 1999.
- [15] Spivak M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 3*, Publish or Perish Inc., Houston, 1999.
- [16] Thorpe J. A., *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1979.

