

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea in Matematica e Applicazioni Classe L-35



LA FILLOTASSI DEI SEMI DI GIRASOLE

Tesi di Laurea Triennale
in Geometria

Relatore

Chiar.mo Prof. Riccardo Piergallini

Laureando

Lorenzo Bigioni

Anno Accademico 2012/2013

INDICE

1. <i>Introduzione</i>	3
2. <i>Piano iperbolico</i>	4
3. <i>Reticoli complessi</i>	14
4. <i>Frazioni continue</i>	18
5. <i>La distribuzione fillotattica</i>	24
6. <i>Approssimazione Lineare</i>	27
7. <i>La geodetica fillotattica</i>	30

1. INTRODUZIONE

Agli occhi di coloro che osservano la natura e si meravigliano di fronte ad essa, si possono trovare fonti di stupore nella struttura che manifestano alcune forme botaniche quali: corolle di girasoli, pigne, ananas o broccoli.

Queste forme sono accomunate dall'essere composte da una forma molto ordinata di elementi (semi, foglie, scaglie, ecc.) e salta all'occhio che essi formano delle spirali che avvolgono e formano così l'intera struttura, in modo tale che ogni elemento appartenga a due spirali una che si avvolge un senso orario e l'altra in senso antiorario. Inoltre se si vuole contare queste spirali, ci si accorge che quelle simili ricorrono scandite dalla successione di Fibonacci.

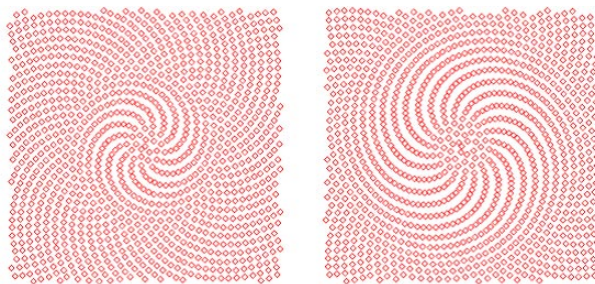


Fig. 1.1: Due configurazioni particolari di semi di girasole

Porteremo la nostra attenzione in particolare sui girasoli e descriveremo sommariamente un modello matematico che spiega la filotassi dei semi, cioè la loro disposizione all'interno del fiore.

Per fare questo coinvolgeremo la geometria del piano iperbolico, una parte di teoria dei reticoli, alcune proprietà della sezione aurea e le frazioni continue.

2. PIANO IPERBOLICO

In questo capitolo descriveremo sommariamente il piano iperbolico \mathbb{H}^2 , cioè l'unica superficie riemanniana completa, semplicemente connessa, con curvatura costante -1 . Analizzeremo inoltre le geodetiche e il gruppo delle isometrie di \mathbb{H}^2 mostrando che tale gruppo agisce in modo omogeneo e isotropo su \mathbb{H}^2 .

Il piano iperbolico è definito con il semipiano

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cong \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$$

dotato di metrica iperbolica il cui elemento di lunghezza ds è definito da

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{(\Im(z))^2},$$

dove $|\cdot|$ indica il modulo.

Ricordiamo che ds^2 è la forma quadratica associata al prodotto scalare dato dalla metrica riemanniana, cioè indicando con $\langle v, w \rangle_h$ il prodotto scalare iperbolico dei vettori tangenti $v, w \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$, si ha

$$ds^2(v) = \|v\|_h^2 = 4\langle v, v \rangle,$$

dove $\|v\|_h$ indica la norma iperbolica.

Quindi se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ è una parametrizzazione di una curva C , la lunghezza di C è data da

$$L(C) = \int_C ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_h dt.$$

Inoltre notiamo che usando la nozione di lunghezza di una curva possiamo associare alla metrica riemanniana di \mathbb{H}^2 una funzione distanza definita

$$d(p, q) = \inf_C L(C)$$

dove C è una qualunque curva tra p e q punti arbitrari del piano iperbolico.

Definizione 2.1. Diciamo che $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ è un'isometria riemanniana se per ogni $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ l'applicazione tangente $T_{(x,y)}g : T_{(x,y)}\mathbb{H}^2 \rightarrow T_{g(x,y)}\mathbb{H}^2$ è un'isometria lineare, cioè

$$\|T_{(x,y)}g(v)\|_h = \|v\|_h$$

o equivalentemente

$$\langle T_{(x,y)}g(v), T_{(x,y)}g(w) \rangle_h = \langle v, w \rangle_h$$

per ogni $v, w \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$.

Osserviamo che g è un'isometria nel senso della definizione appena data se e solo se lo è rispetto alla distanza, cioè

$$d(g(p), g(q)) = d(p, q)$$

per ogni $p, q \in \mathbb{H}^2$.

Indichiamo con $\text{Isom } \mathbb{H}^2$ il gruppo delle isometrie del piano iperbolico e in particolare ci occupiamo delle isometrie che conservano l'orientazione:

Definizione 2.2. $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ è un'isometria che conserva l'orientazione se e solo se $\forall (x, y) \in \mathbb{H}^2$, l'applicazione tangente $T_{(x,y)}g$ conserva l'orientazione come applicazione lineare cioè

$$\det J_{(x,y)}g > 0,$$

dove $J_{(x,y)}g$ è la matrice jacobiana di g .

Le isometrie che conservano l'orientazione formano un sottogruppo del gruppo di tutte le isometrie del piano iperbolico, denotiamo tale sottogruppo con $\text{Isom}^+ \mathbb{H}^2 \subset \text{Isom } \mathbb{H}^2$.

Definizione 2.3. Il *gruppo lineare speciale* $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ è il gruppo delle matrici quadrate del tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a coefficienti reali con determinante unitario.

Teorema 2.1. L'applicazione che associa ad ogni matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ la trasformazione $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ definita $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, è un omomorfismo suriettivo $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Isom}^+ \mathbb{H}^2$ il cui nucleo è costituito da $\pm I$.

Dimostrazione. Prima di tutto facciamo vedere che l'applicazione g è effettivamente un'applicazione del piano iperbolico in se stesso che conserva il prodotto scalare iperbolico.

Sia $g \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ e $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ con $y > 0$, notiamo che:

$$w = g(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + d)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2}$$

ora se sostituiamo z con $x + iy$ e \bar{z} con $x - iy$ e poi moltiplichiamo, otteniamo che

$$w = g(z) = u + iv$$

dove

$$v = \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} = \frac{y}{|cz + d|^2} > 0,$$

quindi $g(v) \in \mathbb{H}^2$.

Ora facciamo vedere che g conserva la metrica iperbolica. Differenziamo $w = g(z)$ rispetto a z e otteniamo:

$$dw = \frac{dw}{dz} dz = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} dz;$$

quindi otteniamo:

$$dw^2 = \frac{\left| \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} dz \right|^2}{v^2} = \left| \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} dz \right|^2 \frac{|cz + d|^4}{(ad - bc)^2 y^2} = \frac{|cz + d|^2}{y^2} = dz^2.$$

Abbiamo mostrato che g conserva il prodotto scalare, quindi g è un'isometria.

Dobbiamo dimostrare che l'applicazione $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \mapsto g$ è un omomorfismo. Per far vedere questo dobbiamo dimostrare che presa $g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ e la matrice associata $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e presa $g' : z \mapsto \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ e la matrice associata $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ la matrice associata alla trasformazione $g'' = g \circ g'$ è la matrice prodotto $C = A \cdot B$, infatti:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}.$$

D'altra parte

$$g'' = g \circ g' = g(g') = \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + ab' + d'b}{(ca' + c'd)z + cb' + d'd}$$

e quindi abbiamo dimostrato che l'applicazione di partenza è un omomorfismo.

Ora facciamo vedere che l'omomorfismo considerato è suriettivo. Tenendo conto del fatto che un'isometria in $\text{Isom } \mathbb{H}^2$ è univocamente determinata dall'immagine di un dato punto e di un dato versore tangente in quel punto, è sufficiente far vedere che le isometrie ottenute dalle matrici agiscono in modo (semplicemente) transitivo su punti e direzioni.

$\forall p, v$ e $\forall q, w$ con v, w versori $\exists! g : z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$ tale che $g(p) = q$ e $T_p g(v) = w$.

Per provare questo, consideriamo la mappa:

$$a^2 z = \frac{az + 0}{0z + \frac{1}{a}}$$

attraverso la quale è possibile scorrere il punto $p = (0, 1)$ e il versore $v = (0, 1)$ lungo l'asse immaginario $x = 0$.

Poi consideriamo la mappa:

$$z \mapsto \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}},$$

abbiamo diviso per $\sqrt{2}$ per fare in modo che il determinante della matrice associata alla mappa sia 1 e quindi appartenga a $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Questa manda l'asse immaginario nella semicirconferenza unitaria. infatti, posto $z \mapsto \frac{z-1}{z+1} = w = u + iv \in \mathbb{H}^2$ dall'equazione della circonferenza unitaria

$$|w|^2 = 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1$$

si ottiene

$$\left| \frac{z - 1}{z + 1} \right|^2 = 1 \Leftrightarrow |z - 1|^2 = |z + 1|^2 \Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z} - 1) = (z + 1)(\bar{z} + 1),$$

e quindi

$$z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow 2\Re(z) = 0 \Leftrightarrow \Re(z) = 0 \Leftrightarrow (x = 0).$$

Abbiamo così mostrato che l'asse immaginario viene trasformato nella semicirconferenza unitaria.

Infine consideriamo la mappa:

$$z \mapsto z + b,$$

con la quale è possibile traslare l'asse immaginario nella direzione dell'asse reale. Ora è facile vedere che componendo le trasformazioni appena descritte è possibile portare un versore v del piano iperbolico in un qualsiasi altro versore w .

Per concludere la dimostrazione facciamo vedere che il nucleo di questo omeomorfismo è $\pm I$.

Infatti g è l'identità se e solo se per ogni $z \in \mathbb{H}^2$ si ha:

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} - z = 0 \Leftrightarrow \frac{-cz^2 + (a - d)z + b}{cz + d} = 0$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -c = 0 \\ a - d = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $c = 0$, $a = d$ e $b = 0$. Quindi otteniamo la matrice

$$F = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Infine, dovendo essere il determinante unitario, si ha:

$$\det F = a^2 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

□

Osserviamo che 2 matrici A e B determinano la stessa trasformazione se $A = \pm B$ e quindi possiamo definire

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \pm I,$$

e vale il seguente corollario:

Corollario 2.1. $\mathrm{Isom}^+ \mathbb{H}^2 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Le isometrie di \mathbb{H}^2 possono essere classificate in base ai punti fissi, in accordo con la seguente proposizione.

Proposizione 2.1 ([3]). *Se $\phi \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ vale uno e uno solo dei seguenti fatti:*

- (1) ϕ ha un punto fisso in \mathbb{H}^2 ;
- (2) ϕ non ha punti fissi in \mathbb{H}^2 e ne ha esattamente uno all'infinito;
- (3) ϕ non ha punti fissi in \mathbb{H}^2 e ne ha esattamente due all'infinito.

Definizione 2.4. In riferimento alla proposizione precedente diciamo che $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ con $g \neq I$ è: *ellittica* se è di tipo (1);
parabolica se è di tipo (2);
iperbolica se è di tipo (3).

I tipi di isometrie appena definiti possono essere caratterizzati anche in termini di traccia:

Proposizione 2.2. Sia $g \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ con $g \neq I$ rappresentata da una matrice $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$; allora:

- (1) ϕ è ellittica se e solo se $|\text{tr}(A)| < 2$;
- (2) ϕ è parabolica se e solo se $|\text{tr}(A)| = 2$;
- (3) ϕ è iperbolica se e solo se $|\text{tr}(A)| > 2$.

Dimostrazione. Data $g \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ possiamo rappresentarla nella forma $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Se $c = 0$ allora ∞ è un punto fisso, la matrice è del tipo

$$\begin{bmatrix} a & d \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad \text{quindi } \text{tr}(A) = a + \frac{1}{a}.$$

Se $a = \pm 1$ allora $b \neq 0$ (altrimenti $g(z) = I$). Da questo segue che:

$$|\text{tr}(A)| = \pm 2 \Leftrightarrow a = \pm 1 \Leftrightarrow \phi \text{ parabolica};$$

$$|\text{tr}(A)| > 2 \Leftrightarrow a \neq \pm 1 \Leftrightarrow \phi \text{ iperbolica}.$$

Se $c \neq 0$ consideriamo l'equazione

$$\phi(z) = z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

che ha discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= (d-a)^2 - 4bc = d^2 + a^2 - 2ad + 4bc = \\ &= d^2 + a^2 - 2ad - 4ad + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad-bc), \end{aligned}$$

poiché $ad - bc = 1$ otteniamo

$$\Delta = (\text{tr } A)^2 - 4.$$

A questo punto possono verificarsi tre casi:

$$|\text{tr } A| > 2 \Rightarrow \Delta > 0$$

dove abbiamo 2 soluzioni reali (cioè all'infinito) quindi ϕ è iperbolica;

$$|\operatorname{tr} A| = 2 \Rightarrow \Delta = 0$$

dove abbiamo una sola radice reale (cioè all'infinito) quindi ϕ è parabolica;

$$|\operatorname{tr} A| < 2 \Rightarrow \Delta < 0$$

dove abbiamo 2 radici complesse coniugate (una sola di queste sta in \mathbb{H}^2) quindi ϕ è ellittica. \square

Un esempio di isometrie ellittiche, sono le rotazioni iperboliche che tengono fermo il punto $(0, i)$, cioè tutte quelle trasformazioni che soddisfano l'equazione $\phi(i) = i$. Risolvendo si possono determinare tutte le trasformazioni di questo tipo, che sono della forma:

$$\begin{bmatrix} d & -\sqrt{1-d^2} \\ \sqrt{1-d^2} & d \end{bmatrix}$$

con $d \in \mathbb{R}$. Notiamo che l'unico punto fisso è in \mathbb{H}^2 ed è $(0, i)$.

Esempi invece di isometrie paraboliche sono quelle della forma:

$$z \mapsto z + b$$

con b reale, che traslano nella direzione dell'asse reale, facendo scorrere su se stesso il fascio delle rette parallele all'asse immaginario, che ha come punto base il punto all'infinito fissato.

Per finire esempi di isometrie iperboliche sono le trasformazioni quelle della forma:

$$z \mapsto az$$

con a reale cioè sono le omotetie che hanno come punti fissi all'infinito 0 e ∞ e scrono su se stesso l'asse immaginario, cioè la geodetica determinata da questi due punti all'infinito.

Continuiamo lo studio delle proprietà del piano iperbolico dando una definizione generale:

Teorema 2.2. \mathbb{H}^2 è omogeneo e isotropo sotto l'azione di $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{Z})$, cioè $\forall p, v$ e $\forall q, w$ con v, w versori $\exists g : z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ tale che $g(p) = q$ e $T_p g(v) = w$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo fatto è inclusa nella dimostrazione del teorema precedente. \square

Definizione 2.5. Uno spazio metrico si dice *completo* se ogni successione di Cauchy converge ad un elemento dello spazio. Una successione $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $N(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $n, m > N(\varepsilon)$: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

per provare che il piano iperbolico è completo, utilizziamo il teorema di Hopf-Rinow, tuttavia prima di enunciarlo diamo la seguente definizione:

Definizione 2.6. Dato X spazio metrico la curva $\gamma : I \rightarrow X$ dove $I \subset \mathbb{R}$ è una *geodetica* se minimizza localmente la distanza tra 2 punti cioè $\forall t \in I$ esiste un intorno J di t in I , tale che $\forall t_1, t_2 \in J$ abbiamo

$$L(\gamma([t_1, t_2])) = d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)).$$

Ora enunciamo il teorema

Teorema 2.3 (Hopf-Rinow [6]). *Sia (M, g) superficie riemanniana connessa. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

- (1) M è completa;
- (2) un sottoinsieme di M è compatto se e solo se è chiuso e limitato;
- (3) ogni geodetica è estendibile su tutto \mathbb{R} .

Quindi andiamo a studiare le geodetiche del piano iperbolico, tenendo conto che vale il seguente fatto generale:

Teorema 2.4 ([1]). *Data una superficie riemanniana (M, g) , per ogni punto $p \in M$ e per ogni punto $v \in T_p M$ versore, $\exists!$ geodetica massimale $\gamma_v : I \rightarrow M$ tale che $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma'_v(0) = v$.*

Ora vediamo che le geodetiche del piano iperbolico sono le semicirconferenze e le semirette parallele all'asse immaginario ed uscenti dall'asse reale come mostrato in figura. Prima di tutto mostriamo che il semiasse immagi-

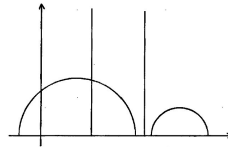


Fig. 2.1: le geodetiche del piano iperbolico: semicirconferenze perpendicolari all'asse reale e semirette uscenti e perpendicolari anch'esse all'asse reale.

nario è una geodetica. Sia C l'asse immaginario e consideriamo la riflessione σ , isometria di \mathbb{H}^2 che inverte l'orientazione, definita

$$\sigma(x, y) = (-x, y).$$

Ora prendiamo $p = (0, 1)$ e $v = (0, 1)$ notiamo che $\sigma(p) = p$ e $T_p\sigma(v) = v$. Inoltre si ha anche che,

$$\sigma(C) = C$$

e

$$\sigma \cdot \gamma_v = \gamma_v.$$

Mettendo insieme queste due cose otteniamo

$$\gamma_v(I) = C.$$

Questo dimostra che il semiasse immaginario è una geodetica. Questo si può parametrizzare nel seguente modo:

$$\gamma(t) = (0, e^t) = ie^t.$$

Notiamo che tale parametrizzazione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ e rappresenta il semiasse immaginario infatti $\gamma(t)$ tende a 0 per t che tende a $-\infty$ e $\gamma(t)$ tende ad ∞ per t che tende ad ∞ . Oltre a questo osserviamo che $\gamma(t)$ ha velocità unitaria: $\gamma'(t) = (0, e^t)$ quindi

$$\|\gamma'(t)\|_h = \frac{0 + e^{2t}}{e^{2t}} = 1.$$

A partire dal fatto che C è una geodetica e applicando le isometrie di $\text{Isom}^+ \mathbb{H}^2$ si ha:

(1) la semicirconferenza di raggio unitario è una geodetica, perchè è ottenuta da C mediante la trasformazione

$$z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$$

e abbiamo già dimostrato nel teorema 1.1 che questa trasformazione manda il semiasse immaginario nella circonferenza unitaria;

(2) possiamo portare la semicirconferenza unitaria in un'altra semicirconferenza centrata nell'origine avente raggio $a \in \mathbb{R}$ attraverso la dilatazione radiale:

$$z \mapsto az;$$

(3) attraverso la traslazione

$$z \mapsto z + b$$

con $b \in \mathbb{R}$, è possibile traslare orizzontalmente le semirette e le semicirconferenze;

(4) queste sono tutte le geodetiche (cioè non ce ne sono altre) perchè ce n'è già una per ogni punto e ogni velocità iniziali;

(5) tutte le geodetiche si ottengono mediante isometrie da C che è completa, cioè definita su tutto \mathbb{R} , e quindi lo sono anche tutte le altre.

Corollario 2.2. Il piano iperbolico è completo.

Dimostrazione. In base a quanto detto nel punto (5), possiamo applicare il teorema di Hopf-Rinow e questo conclude la dimostrazione. \square

Per concludere il nostro discorso facciamo vedere che la curvatura di \mathbb{H}^2 è costante uguale a -1 .

Data una superficie riemanniana con coordinate locali (x, y) si definisce la curvatura $k(x, y)$ sulla base della connessione di Levi-Civita associato alla metrica. La formula che la esprime in termini dei simboli di Christoffel si riduce ad una molto più semplice quando la metrica è multipla di quella euclidea. Cioè, se Ω è un dominio di \mathbb{R}^2 e $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione C^∞ su Ω , allora per la metrica riemanniana il cui elemento di lunghezza è dato da

$$ds_{(x,y)}^2(v_x, v_y) = \alpha(x, y)^2 \|v\|_e$$

si ha:

$$k(x, y) = -\frac{1}{\alpha(x, y)^2} \Delta \log \alpha(x, y).$$

Proposizione 2.3. *La curvatura di \mathbb{H}^2 è -1 .*

Dimostrazione. Nel nostro caso posto $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ la funzione $\alpha : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ è definita $\alpha(x, y) = \frac{1}{y}$.

Notiamo subito che:

$$-\frac{1}{\alpha(x, y)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{y^2}}.$$

Ora calcoliamo il laplaciano di $\log \alpha(x, y)$ cioè la somma delle derivate seconde rispetto ad x e y , ma la nostra funzione dipende solo da y , quindi basta calcolare la derivata seconda rispetto a y : la derivata prima di $\log \alpha(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{1}{y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\log y) = -\frac{1}{y};$$

da cui otteniamo la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 y} (-\log y) = \frac{1}{y^2}.$$

Sostituendo quanto ricavato nella formula otteniamo:

$$k(x, y) = -\frac{1}{\frac{1}{y^2}} = -1.$$

\square

Per concludere osserviamo che la curvatura non dipende dal punto scelto di coordinate (x, y) in quanto la curvatura è un'invariante per isometrie e \mathbb{H}^2 è omogeneo e isotropo.

3. RETICOLI COMPLESSI

In questo capitolo daremo alcuni richiami sui reticoli. Iniziamo con alcune definizioni:

Definizione 3.1 (reticolo lineare). Un reticolo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ nel piano complesso è un sottogruppo additivo libero generato da 2 elementi \mathbb{R} -linearmente indipendenti $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$.

Definizione 3.2 (reticolo affine). Un *reticolo affine* è una classe laterale $\alpha + \Gamma$ ottenuta traslando un reticolo complesso $\Gamma \subset \mathbb{C}$ di un vettore $\alpha \in \mathbb{C}$.

Un esempio di reticolo complesso è l'insieme degli *interi di Gauss* indicati con il simbolo $\mathbb{Z}[i]$ avente la forma:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

mentre per avere un esempio di reticolo affine basta prendere l'insieme degli interi di Gauss e traslarli di un vettore $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\alpha = c + id$ con $c, d \in \mathbb{R}$ otteniamo

$$\alpha + \mathbb{Z}[i] = \{a + c + i(b + d) \mid a, b \in \mathbb{Z}, c, d \in \mathbb{R}\}$$

D'ora in poi studieremo i reticoli lineari, tutto quello che diremo vale anche per i reticoli affini basta traslare quelli lineari in modo opportuno.

Siano

$$\mathcal{R} = \{\Gamma \subset \mathbb{C} \mid \Gamma \text{ è un reticolo lineare}\}$$

e

$$\mathcal{D} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^* \mid \Im \omega_1 / \omega_2 > 0\}.$$

Indichiamo con $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ l'applicazione che associa ad una coppia (ω_1, ω_2) il reticolo:

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

generato da (ω_1, ω_2) . Si può verificare che tale applicazione è suriettiva.

Consideriamo ora un importante sottogruppo di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$:

Definizione 3.3. si definisce $SL_2(\mathbb{Z})$ il sottogruppo delle matrici quadrate a coefficienti interi con determinante uguale ad 1, cioè

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{Z}) | \det(A) = 1\}.$$

Notiamo che $SL_2(\mathbb{Z})$ agisce su \mathcal{D} nel seguente modo:

$$\forall g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), g : (\omega_1, \omega_2) \mapsto (\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2).$$

Due coppie (ω_1, ω_2) e (ω'_1, ω'_2) generano lo stesso reticolo se e solo se sono equivalenti a meno di questa azione, di conseguenza Φ induce una biiezione

$$\Psi : \mathcal{D}/SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{R}.$$

Ora osserviamo che \mathbb{C}^* agisce su \mathcal{D} per moltiplicazione e si ha $\forall (\omega_1, \omega_2), (\omega'_1, \omega'_2) \in \mathcal{D}$,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega'_1}{\omega'_2} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C}^* \text{ tale che } \omega'_1 = c\omega_1 \text{ e } \omega'_2 = c\omega_2,$$

quindi possiamo quotientare Φ , in modo da avere una funzione $\Phi' : \mathcal{D}/\mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{R}/\mathbb{C}^*$ tale che induce una biiezione

$$\Psi' : \mathcal{D}/SL_2(\mathbb{Z})\mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{R}/\mathbb{C}^*.$$

Consideriamo la mappa $Q : \mathcal{D}/\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{H}^2$, definita $(\omega_1, \omega_2) \mapsto z = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ e la mappa $F : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{R}/\mathbb{C}^*$ definita $z \mapsto \mathbb{Z} + \mathbb{Z}z$.

Notiamo che dividere per ω_2 , è come fare una similitudine perché ω_2 si può esprimere in forma polare:

$$\omega_2 = \rho e^{i\theta}$$

dove il fattore $e^{i\theta}$ è una rotazione e nel moltiplicare per ρ facciamo un'omotetia e componendo una rotazione con un'omotetia si ottiene una similitudine.

Detto questo, consideriamo i reticoli lineari a meno di similitudini che conservano l'osservazione e quindi, il reticolo generato da (ω_1, ω_2) diventa equivalente al reticolo generato da $(z = \frac{\omega_1}{\omega_2}, 1)$, infatti:

$$\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \left(\mathbb{Z}\frac{\omega_1}{\omega_2} + \mathbb{Z}\right)\omega_2 = \mathbb{Z}z + \mathbb{Z}.$$

In base a quanto detto osserviamo che:

$$\Phi' = F \cdot Q$$

infatti:

$$F \cdot Q(\omega_1, \omega_2) = F \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = \mathbb{Z} \frac{\omega_1}{\omega_2} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \Phi'(\omega_1, \omega_2).$$

A questo punto introduciamo un sottogruppo delle isometrie del piano iperbolico $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \pm I = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid A = -A\},$$

questo sottogruppo agisce su \mathcal{D}/\mathbb{C}^* mediante l'azione indotta da quella di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ su \mathcal{D} , e si ha che: per ogni $(\omega_1, \omega_2), (\omega'_1, \omega'_2)$ in \mathcal{D}/\mathbb{C}^* e per ogni $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, le coppie (ω_1, ω_2) e (ω'_1, ω'_2) generano lo stesso reticolo se posti $z = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ e $z' = \frac{\omega'_1}{\omega'_2}$ vale:

$$z' = \frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} = \frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2} + b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d} = \frac{az + b}{cz + d} = gz.$$

Proposizione 3.1. *Sotto l'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, Φ' induce una biiezione*

$$\eta : \mathbb{H}^2 / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{R}/\mathbb{C}^*.$$

Dimostrazione. La mappa η è biiettiva perché composizione della mappa biiettiva Ψ' e di una mappa suriettiva $Q' : \mathcal{D}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Q' è biiettiva perché è l'applicazione passata al quoziente mediante l'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ della mappa Q che è biiettiva perché esiste la sua inversa $Q^{-1} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{D}/\mathbb{C}^*$ definita $z \mapsto (z, 1)$. \square

Il quoziente $\mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ è detto *spazio modulare*.

Cosa importante per l'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ su \mathbb{H} è il *dominio fondamentale*

$$\mathcal{M} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1 \text{ e } |\Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Consideriamo ora alcune proprietà fondamentali dell'insieme \mathcal{M} . Siano $S, T \in (\mathbb{Z})$ rispettivamente da

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e osserviamo che:

$$Sz = -\frac{1}{z}, \quad Tz = z + 1, \quad S^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1.$$

Ora per mostrare che \mathcal{M} è un dominio fondamentale utilizziamo il seguente risultato

- Teorema 3.1** ([4]). (1) $\forall z \in \mathbb{H}, \exists g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ tale che $gz \in \mathcal{M}$.
 (2) Se due punti distinti z_1, z_2 di \mathcal{M} sono congrui modulo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow \Re(z) = \pm \frac{1}{2}$ e $z_1 = z_2 \pm 1$ o $|z_1| = \pm 1$ e $z_2 = -\frac{1}{z_1}$.
 (3) Sia $z \in \mathcal{M}$ e sia $I(z) = \{g \mid g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), gz = z\}$ stabilizzatore di z in \mathcal{M} , $\Rightarrow I(z) = \{1\}$ tranne nei seguenti casi:
 (a) $z = i$ dove $I(z)$ è il gruppo di ordine due generato da S ;
 (b) $z = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ dove $I(z)$ è il gruppo di ordine tre generato da ST ;
 (c) $z = e^{\frac{\pi i}{3}}$ dove $I(z)$ è il gruppo di ordine tre generato da TS .

I punti (1) e (2) del teorema precedente inducono al seguente corollario:

Corollario 3.1 ([4]). La mappa canonica $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ è suriettiva e la sua restrizione all'interno di \mathcal{M} è iniettiva.

In altre parole abbiamo ottenuto una mappa “quasi-biiettiva”, cioè biiettiva ovunque, tranne in alcuni punti del bordo.

Teorema 3.2 ([4]). Il gruppo $(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ è generato da S e T .

Inoltre notiamo che data la relazione di equivalenza \sim definita nel seguente modo: $z \sim z_2$ con $z_1, z_2 \in \mathcal{M} \Leftrightarrow z_2 = -\frac{1}{z_1}$ o $z_2 = z_1 \pm 1$, possiamo scrivere

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2 = \mathcal{M} / \sim .$$

4. FRAZIONI CONTINUE

L'algoritmo di Euclide per la ricerca del massimo comun divisore tra due numeri naturali, può essere usato per rappresentare il quoziente di quei due numeri come frazione continua.

Per esempio, applichiamo l'algoritmo di Euclide ai numeri 67 e 24:

$$67 = 2 \cdot 24 + 19,$$

$$24 = 1 \cdot 19 + 5,$$

$$19 = 3 \cdot 5 + 4,$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1,$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0,$$

questo implica: $MCD(67, 24) = 1$.

Scriviamo ora ciascuna equazione in forma frazionaria:

$$\frac{67}{24} = 2 + \frac{19}{24},$$

$$\frac{24}{19} = 1 + \frac{5}{19},$$

$$\frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5},$$

$$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}.$$

L'ultima frazione in ciascuna equazione è la reciproca della prima frazione nell'equazione successiva. Possiamo quindi eliminare tutte le frazioni intermedie ed esprimere quella originale $\frac{67}{24}$ nella forma

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

una tale espressione è detta *frazione continua finita*. I numeri 2, 1, 3, 1, 4 sono detti *termini* della frazione continua o *quozienti parziali*, mentre i numeri

$$\frac{67}{24}; \frac{24}{19}; \frac{19}{5}; \frac{5}{4},$$

sono detti *quozienti completi*.

Definiamo più in generale la frazione continua: se a_0, a_1, \dots, a_n sono coefficienti indeterminati, definiamo la frazione continua

$$\{a_0; a_1, \dots, a_n\}$$

nel seguente modo:

$$\{a_0; a_1, \dots, a_n\} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Le frazioni continue semplici sono quelle in cui gli a_i sono numeri interi strettamente positivi per ogni $i > 0$ e notiamo che l'algoritmo di Euclide ci dice che possiamo esprimere ogni numero razionale come frazione continua finita, tuttavia se i coefficienti a_1, \dots, a_n, \dots sono infiniti otteniamo una frazione continua infinita

$$\{a_0; a_1, \dots, a_n, \dots\} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \dots}}}$$

a cui associamo il limite delle funzioni continue finite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_0; a_1, \dots, a_n\} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Le frazioni continue hanno diversi tipi di notazione e di trattazione, e una delle più efficaci è rappresentata dalla regola di Eulero. Vediamo ora in che cosa consiste tale regola e come può essere applicata alle frazioni continue.

Definizione 4.1. Se $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sono coefficienti indeterminati, indichiamo con $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ il polinomio ottenuto sommando i seguenti monomi:

- (0) il prodotto di tutti gli $n + 1$ fattori a_0, a_1, \dots, a_n ;
- (1) i prodotti di $n - 1$ fattori ottenuti dal precedente prodotto (0) omettendo (in tutti i modi possibili) un paio di fattori contigui del tipo $a_0 a_1, a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_{n-1} a_n$. Questo contributo alla somma è dunque:

$$a_2 a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_n + a_0 a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_n + \dots + a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-3} a_n + a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-2};$$

- (2) i prodotti di $n - 3$ fattori, ottenuti dal precedente prodotto (0) omettendo (in tutti i modi possibili) due paia disgiunte di fattori contigui come $a_0 a_1$ e

a_2a_3 , a_0a_1 e a_3a_4 , ..., a_0a_1 e $a_{n-1}a_n$, ..., a_1a_2 e a_3a_4 , ..., $a_{n-3}a_{n-2}$ e $a_{n-1}a_n$. Questo contributo alla somma è dunque:

$$a_4a_5\dots a_{n-1}a_n + a_2a_5\dots a_{n-1}a_n + a_2a_3a_6\dots a_{n-1}a_n + \dots + a_0a_1\dots a_{n-4};$$

(k) i prodotti di $n - (2k - 1)$ fattori, ottenuti dal precedente prodotto (0) omettendo (in tutti i modi possibili) k paia disgiunte di fattori contigui come a_0a_1 e a_2a_3 e ... e $a_{k-1}a_k$, a_2a_3 e a_4a_5 e ... e $a_k a_{k+1}$. Questo contributo alla somma è dunque:

$$\begin{aligned} & a_{k+1}a_{k+2}\dots a_{n-1}a_n + a_{k-1}a_k a_{k+3}\dots a_{n-1}a_n + \\ & + a_{k-3}a_{k-2}a_{k+3}\dots a_{n-1}a_n + \dots + a_0a_1\dots a_{n-k}; \end{aligned}$$

Quando $n - 1$ è pari l'ultimo contributo è 1.

Vediamo qualche esempio:

$$[] = 0; [a_0] = a_0; [a_0; a_1] = a_0a_1 + 1; [a_0; a_1, a_2] = a_0a_1a_2 + a_2 + a_0;$$

$$[a_0; a_1, a_2, a_3] = a_0a_1a_2a_3 + a_2a_3 + a_0a_3 + a_0a_1 + 1;$$

e così via.

Vediamo come si può usare la regola di Eulero per le espansioni in frazione continua, in particolare vale il seguente risultato:

Teorema 4.1. *Per i convergenti $\frac{p_n}{q_n}$ della frazione continua $\{a_0; a_1, \dots, a_n\}$ valgono:*

$$p_n = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_n[a_0, \dots, a_{n-1}] + [a_0, \dots, a_{n-2}] = p_{n-2} + a_n p_{n-1}$$

e

$$q_n = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_n[a_1, \dots, a_{n-1}] + [a_1, \dots, a_{n-2}] = q_{n-2} + a_n q_{n-1}.$$

Proposizione 4.1. *Qualsiasi coppia di convergenti consecutive, nello sviluppo in frazioni continue di un numero, soddisfa la relazione:*

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n \cdot [5]$$

dividendo per $q_{n-1}q_n$ otteniamo:

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n};$$

notiamo che la differenza al primo membro è positiva se n è dispari, e negativa se n è pari. Poichè q_0, q_1, q_2, \dots crescono costantemente, tale differenza decresce al crescere di n , pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{q_1} &> \frac{p_0}{q_0}; \\ \frac{p_2}{q_2} &< \frac{p_1}{q_1} \text{ ma } \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2}; \\ \frac{p_3}{q_3} &> \frac{p_2}{q_2} \text{ ma } \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3}; \end{aligned}$$

e così via.

Alla fine segue che tutti i convergenti pari sono minori di ogni convergente dispari, mentre tutti i convergenti dispari sono maggiori di ogni convergente pari.

Sia θ un numero irrazionale, possiamo scrivere θ come segue:

$$\theta = a_0 + \frac{1}{\theta_1}$$

dove $a_0 = [\theta]$ parte intera di θ e $0 < \frac{1}{\theta_1} < 1$ rappresenta la parte frazionaria di θ , ora θ_1 è strettamente positivo e posso scriverlo allo stesso modo:

$$\theta_1 = a_1 + \frac{1}{\theta_2},$$

iterando il processo, costruiamo una successione:

$$\theta_n = a_n + \frac{1}{\theta_{n+1}},$$

dove $a_n = [\theta_n]$ parte intera di θ_n e $0 < \frac{1}{\theta_{n+1}} < 1$ rappresenta la parte frazionaria di θ_n , utilizzando la regola di Eulero ricaviamo la seguente identità:

$$\theta = \frac{p_{n-2} + \theta_n p_{n-1}}{q_{n-2} + \theta_n q_{n-1}} \quad \forall n \geq 0 [2]$$

Proposizione 4.2 ([5]). *Sia θ numero reale, il convergente $\frac{p_n}{q_n}$ converge a θ , cioè:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta$$

A questo punto possiamo mostrare che:

Teorema 4.2. *Ogni numero reale θ si può espandere univocamente in frazione continua semplice.*

Dimostrazione. Considerando la sottosuccessione delle convergenti pari $(\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \dots)$ sappiamo che essa è crescente e superiormente limitata da $\frac{p_1}{q_1}$, dunque la sottosuccessione ammette limite.

Analogamente la sottosuccessione delle convergenti dispari $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \dots)$ è decrescente e inferiormente limitata da $\frac{p_0}{q_0}$, dunque la sottosuccessione ammette limite.

Ora, per il lemma precedente, questi due limiti coincidono.

Sia θ il limite di cui si parla, allora possiamo scrivere:

$$\theta = a_0 + \frac{1}{\theta_1}$$

dove $a_0 = \lfloor \theta \rfloor$ parte intera di θ e $0 < \frac{1}{\theta_1} < 1$ rappresenta la parte frazionaria di θ , analogamente possiamo scrivere iterando questo procedimento

$$\theta_1 = a_1 + \frac{1}{\theta_2}$$

dove $a_1 = \lfloor \theta_1 \rfloor$ parte intera di θ_1 e $0 < \frac{1}{\theta_2} < 1$ parte frazionaria di θ_1 e così via. Poiché θ è l'unico limite, con questo procedimento otteniamo l'espansione:

$$\theta = 1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

i cui coefficienti sono univocamente determinati. Pertanto è possibile attribuire un significato numerica a qualsiasi frazione continua semplice anche infinita. \square

Osservazione 4.1. Le frazioni continue forniscono un mezzo per costruire numeri irrazionali, e anzi stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra gli irrazionali maggiori di 1 e le sequenze infinite di numeri naturali $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$.

I numeri irrazionali che sono zeri di polinomi irriducibili quadratici a coefficienti razionali si dicono *irrazionali quadratici*. In particolare la radice quadrata di un qualsiasi naturale N che non sia un quadrato perfetto è un irrazionale quadratico, in quanto soluzione dell'equazione $x^2 - N = 0$. Lagrange dimostrò che un numero è un irrazionale quadratico se e solo se si rappresenta come frazione continua periodica, cioè da un certo indice r in poi, gli interi a_i si ripetono periodicamente cioè:

$$\theta = \{a_0; a_1, a_2, \dots, \underbrace{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+r}}, \underbrace{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+r}}, \dots\}$$

che indichiamo con

$$\theta = \{a_0; a_1, a_2, \dots, \overline{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+r}}\}.$$

Teorema 4.3 ([5]). *Lo sviluppo in frazioni continue di un numero reale è periodico se e solo se è algebrico su \mathbb{Q} di grado 2.*

In particolare c'è un numero reale particolare che si esprime come frazione continua, mostriamo che il rapporto aureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ha espansione continua $\{1; 1, 1, 1, \dots\}$:

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

dove $1 = [\theta]$ e $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\theta_1}$ parte frazionaria di θ , ora ripetiamo il procedimento per θ_1 :

$$\theta_1 = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = 1 + \frac{3 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$$

dove 1 è la parte intera di θ_1 e $\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{\theta_2}$ è la parte frazionaria di θ_1 .

Iterando questo metodo otteniamo:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

infatti notiamo che posto

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} = x,$$

anche il denominatore della frazione

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} = x,$$

da cui otteniamo l'equazione di secondo grado

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

equivalente a

$$x^2 - x - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Consideriamo quella positiva in quanto lo è anche l'espansione in frazione continua associata.

5. LA DISTRIBUZIONE FILLOTATTICA

La distribuzione dei semi di girasole è modellata dalla mappa $n \mapsto \varphi_\theta(n) = \sqrt{n}e^{2i\pi n\theta}$, che porta ad una ripartizione uniforme tra 2 semi consecutivi separati da un angolo di divergenza $2\pi\theta$ con θ rapporto aureo. A tale angolo associamo un percorso geodetico $\gamma_\theta : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{H}^2 / \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ e utilizziamo questo percorso per descrizioni locali dell'immagine $\varphi_\theta(\mathbb{N})$ della mappa φ_θ .

Dato θ parametro reale chiamiamo la mappa $\varphi_\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, definita dalla relazione

$$\varphi_\theta(n) = \sqrt{n}e^{2i\pi n\theta}$$

mappa fillotattica con angolo di divergenza $2\pi\theta$. L'immagine $\varphi_\theta(\mathbb{N})$, detta insieme fillotattico, è uniformemente discreta, cioè 2 elementi distinti appartenenti all'insieme sono a distanza almeno ϵ per qualche ϵ positivo, e ha densità uniforme se

$$\theta = \{a_0; a_1, a_2, \dots\} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

è irrazionale con coefficienti limitati a_0, a_1, \dots nella sua espansione in frazione continua.

Tra tutti i possibili parametri, il valore dato dalla sezione aurea è $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \dots]$ e dà una particolare configurazione dei semi all'interno del girasole, come mostra la figura 0.1 relativa alla mappa $\varphi_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(\mathbb{N})$.

Approssimazioni finite di tale mappa, possono essere osservate in capolini (infiorescenze formate da un insieme di piccoli fiori disposti all'estremità del talamo) di girasoli o margherite e notiamo che, unendo punti vicini di $\varphi_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(\mathbb{N})$, otteniamo delle spirali parastiche che appaiono in coppie di famiglie di reticolati incrociati, scandite da 2 elementi consecutivi dalla successione di Fibonacci: 1,2,3,5,8,13,21...

Associamo ad una mappa fillotattica φ_θ con $\theta \in [0, 1)$ la curva

$$(0, +\infty) \ni t \mapsto \gamma_\theta(t) = \frac{4i\pi t}{4i\pi\theta t + 1} = \frac{16\pi^2\theta t^2 + 4i\pi t}{16\pi^2\theta^2 t^2 + 1}$$

del semipiano di Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$.

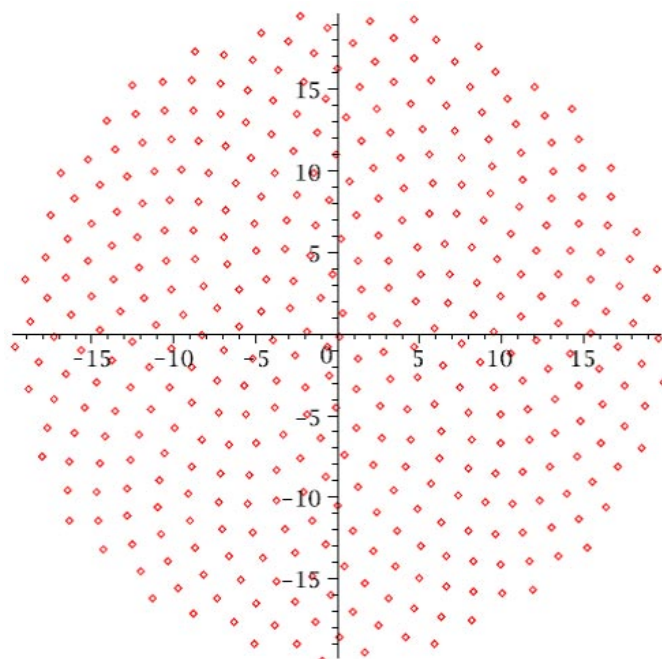


Fig. 5.1: tutti i punti di $\varphi_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(\mathbb{N})$ nel disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 20\}$.

Poiché $\varphi_\theta = \varphi_{\theta+n} \forall n \in \mathbb{Z}$ definiamo $\gamma_\theta \forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\gamma_\theta(t) = \frac{4i\pi t}{4i\pi \{\theta\} t + 1}$$

chiamiamo tale mappageodetica fillotattica associata a φ_θ , dove $\theta = [\theta] + \{\theta\}$ con $[\theta] \in \mathbb{Z}$ e $\{\theta\} \in [0, 1)$ rispettivamente parte intera e parte razionale di θ .

Notiamo che per N grande appartenente a \mathbb{N} la proiezione di $\gamma_\theta(N)$ nello spazio modulare $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_1$ che classifica reticoli complessi, descrive, a meno di similitudini che conservano l'orientazione, il reticolo affine ottenuto dalla linearizzazione di φ_θ in un intorno di $\varphi_\theta(n)$.

L'apparire della sezione aurea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ora si può spiegare dal fatto che la corrispondente geodetica fillotattica $t \mapsto \frac{4i\pi t}{2i\pi(\sqrt{5}-1)t+1}$ evita la cuspidale dello spazio modulare $\mathbb{H}^2/PSL_2(\mathbb{Z})$: questo garantisce una piccola eccentricità per i domini di Voronoi (o buona costante isoperimetrica) dell'insieme fillotattico $\varphi_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(\mathbb{N})$.

Definizione 5.1 (dominio di Voronoi). Sia E uno spazio metrico e S uno spazio discreto incluso in E . Il dominio di Voronoi V_v rispetto a $v \in S$ è il sottoinsieme $V_v = \{x \in E : d(x, v) = \min_{y \in S} d(x, y)\}$ di tutti i punti più vicini a v .

Le piante che hanno le aree dei semi con una buona costante isoperimetrica, sono favorite dalla selezione naturale perché hanno bisogno di meno materiale per costruire i tegumenti intorno ai semi di volume dato; quindi le proprietà *Diofantee* della sezione aurea $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ assicurano che $\varphi_\tau(\mathbb{N})$ soddisfi vincoli naturali nella classe di tutti gli insiemi della forma $\varphi_\theta(\mathbb{N})$.

Osserviamo che punti consecutivi: $\varphi_\theta(0), \varphi_\theta(1), \dots$ hanno angolo di divergenza consecutivo $2\pi\theta$ perché modellati dalla *mappa fillotattica* $t \mapsto \sqrt{t}e^{2\pi i\theta t}$.

6. APPROSSIMAZIONE LINEARE

Proposizione 6.1. *Abbiamo*

$$\begin{aligned} & \varphi_\theta(n + aq_{j-1} + b_j) - \varphi_\theta(n) = \\ & = a\left(\frac{q_{j-1}}{2\sqrt{n}} - \frac{(-1)^j 2i\pi\sqrt{n}\theta_{j+1}}{q_{j-1} + \theta_{j+1}q_j}\right)e^{2i\pi n\theta} + b\left(\frac{q_j}{2\sqrt{n}} + \frac{(-1)^j 2i\pi\sqrt{n}\theta_{j+2}}{q_j + \theta_{j+2}q_{j+1}}\right)e^{2i\pi n\theta} + E_j(a, b) \end{aligned}$$

dove q_k è il denominatore del k -esimo convergente $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ per $\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$, dove $\theta_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$ e l'errore $E_j(a, b)$ è dato asintoticamente da

$$\left(\frac{-1}{8n^{3/2}}(aq_{j-1} + bq_j)^2 + \frac{i\pi}{\sqrt{n}}(aq_{j-1} + bq_j)\delta - 2\pi^2\sqrt{n}\delta^2\right)e^{2i\pi n\theta}$$

dove

$$\delta = -a\frac{(-1)^j\theta_{j+1}}{q_{j-1} + \theta_{j+1}q_j} + b\frac{(-1)^j\theta_{j+2}}{q_j + \theta_{j+2}q_{j+1}}$$

se $|\varphi_\theta(n + aq_{j-1} + bq_j) - \varphi_\theta(n)| = O(1)$.

Corollario 6.1. Se q_{j-1} e q_j sono denominatori di 2 convergenti consecutivi $\frac{p_{j-1}}{q_{j-1}}$ e $\frac{p_j}{q_j}$ di θ tali che $q_{j-1} \leq \sqrt{n} < q_j$, i punti più piccoli di

$$(\varphi_\theta(\mathbb{N}) - \varphi_\theta(n))e^{-2i\pi n\theta}$$

sono vicini ai punti più piccoli del reticolo (9)

$$\mathbb{Z}\left(\frac{q_{j-1}}{2\sqrt{n}} - \frac{(-1)^j 2i\pi\sqrt{n}\theta_{j+1}}{q_{j-1} + \theta_{j+1}q_j}\right) + \mathbb{Z}\left(\frac{q_j}{2\sqrt{n}} + \frac{(-1)^j 2i\pi\sqrt{n}\theta_{j+2}}{q_j + \theta_{j+2}q_{j+1}}\right)$$

con un errore dell'ordine di $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Il reticolo descritto da (9) contiene sempre un elemento non nullo il cui valore assoluto è minore di $\sqrt{\frac{1}{a} + 4\pi^2} < 3\pi$.

Osservazione 6.1. Un dominio fondamentale del reticolo Λ dato da (9) ha area pari a π come mostrato dalle identità:

$$\begin{aligned} (-1)^j \det \begin{bmatrix} \frac{q_{j-1}}{2\sqrt{n}} & -\frac{(-1)^j 2i\pi\sqrt{n}\theta_{j+1}}{q_{j-1} + \theta_{j+1}q_j} \\ \frac{q_j}{2\sqrt{n}} & \frac{(-1)^j 2i\pi\sqrt{n}\theta_{j+2}}{q_j + \theta_{j+2}q_{j+1}} \end{bmatrix} &= (q_{j-1} \frac{\theta_{j+2}}{q_j\theta_{j+2}q_{j+1}} + q_j \frac{\theta_{j+1}}{q_{j-1} + \theta_{j+1}q_j})\pi = \\ &= (q_{j-1} \frac{1}{q_{j-1}\theta_{j+1}q_j} + q_j \frac{\theta_{j+1}}{q_{j-1}\theta_{j+1}q_j})\pi = \pi, \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza è data dal lemma 3.1 in [2].

Dato che il reticolo esagonale regolare ha densità massima, il reticolo Λ contiene almeno un elemento diverso da 0 con valore assoluto al massimo $\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \sim 1.9046$

Dimostrazione (proposizione 5.1). Data

$$F(s, \gamma) = \sqrt{n+s} e^{2i\pi(n\theta+\gamma)}$$

vogliamo approssimare

$$F(aq_{j-1} + bq_j, \delta) - F(0, 0)$$

dove $\delta = (aq_{j-1} + bq_j)\theta - c$. Facciamo questo considerando l'approssimazione lineare

$$L = \frac{\partial F}{\partial s}(0, 0)(aq_{j-1} + bq_j) + \frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, 0)\delta$$

e stimando l'errore utilizzando derivate del secondo ordine. Le derivate parziali che occorrono sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s}(0, 0) &= \frac{1}{2\sqrt{n}} e^{2i\pi n\theta}; \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, 0) &= 2i\pi\sqrt{n} e^{2i\pi n\theta}; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(0, 0) &= \frac{-1}{4n^{3/2}} e^{2i\pi n\theta}; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial \gamma}(0, 0) &= \frac{i\pi}{\sqrt{n}} e^{2i\pi n\theta}; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2}(0, 0) &= -4\pi^2\sqrt{n} e^{2i\pi n\theta}. \end{aligned}$$

Il contributo proveniente da $\frac{\partial F}{\partial s}(0, 0)(aq_{j-1} + bq_j)$ a L è dato da $\frac{1}{2\sqrt{n}} e^{2i\pi n\theta}(aq_{j-1} + bq_j)$.

Per calcolare $\frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, 0)\delta$ abbiamo diviso δ in $\delta = a\delta_{j-1} + b\delta_j$ dove δ_k per $k \in \{j-1, j\}$ è la differenza tra $q_k\theta$ e il suo intero successivo. Dato che q_k è il denominatore del convergente $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ l'intero è dato dal numeratore p_k . Abbiamo

$$\theta - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_k + \theta_{k+2}p_{k+1}}{q_k + \theta_{k+2}q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1})\theta_{k+2}}{q_k(q_k + \theta_{k+2}q_{k+1})} = \frac{(-1)^k\theta_{k+2}}{q_k(q_k + \theta_{k+2}q_{k+1})};$$

in queste uguaglianze abbiamo usato la proposizione 4.1 e l'identità (3) in [2]. Questo porta a

$$\delta_k = \frac{(-1)^k\theta_{k+2}}{q_k(q_k + \theta_{k+2}q_{k+1})}$$

e mostra che

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s}(0, 0)\delta &= \frac{\partial F}{\partial s}(0, 0)(a\delta_{j-1} + b\delta_j) \frac{\partial F}{\partial s}(0, 0) = \\ &= \left(-a \frac{(-1)^j\theta_{j+1}}{q_{j-1} + \theta_{j+1}q_j} + b \frac{(-1)^j\theta_{j+2}}{q_j + \theta_{j+2}q_{j+1}}\right) \end{aligned}$$

L'ordine dell'errore è dato da

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(0, 0)(aq_{j-1} + bq_j)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial \gamma}(0, 0)(aq_{j-1} + bq_j)\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2}(0, 0)\delta^2$$

e può essere facilmente valutato. □

7. LA GEODETICA FILLOTATTICA

Usando il lemma 3.2 in [2], possiamo riscrivere il reticolo Λ dato da (9), del corollario 5.1, nel seguente modo

$$\mathbb{Z}\left(\frac{q_{j-1}}{2\sqrt{n}} - (-1)^j \frac{2i\pi\sqrt{n}}{q_{j-2} + \theta_j q_{j-1}}\right) + \mathbb{Z}\left(\frac{q_j}{2\sqrt{n}} - (-1)^j \frac{2i\pi\sqrt{n}}{q_{j-1} + \theta_{j+1} q_j}\right)$$

in particolare tale reticolo è simile al reticolo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_j(n)$ dove

$$\tau_j(t) = -(-1)^j \frac{q_{j-1} - (-1)^j \frac{4i\pi t}{q_{j-2} + \theta_j q_{j-1}}}{q_j + (-1)^j \frac{4i\pi t}{q_{j-1} + \theta_{j+1} q_j}}$$

Osservazione 7.1. Un semplice calcolo mostra che la parte immaginaria di $\tau_j(t)$ data da

$$\frac{\frac{q_{j-1}}{q_{j-1} + \theta_{j+1} q_j} + \frac{q_j}{q_{j-2} + \theta_j q_{j-1}}}{q_j^2 + \frac{16\pi^2 t^2}{(q_{j-1} + \theta_{j+1} q_j)^2}} 4\pi t$$

è strettamente positiva se t è strettamente positivo.

Teorema 7.1 ([2]). $\forall j \geq 0$ abbiamo

$$(\tau_j(t) - (-1)^j a_{j+1}) \tau_{j+1}(t) = -1$$

Definizione 7.1. sia (E, d) spazio metrico, $x \in E$ e $\epsilon, R > 0$. A, B sottoinsiemi discreti di E si dicono ϵ -vicini in $B(x, R)$, boccia di centro x e raggio R , se $\exists \psi : A' \rightarrow B'$ corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi $A' \subset A$ e $B' \subset B$ contenenti tutti i punti di A e di B a distanza al massimo R da x che muove tutti i punti di A' a distanza minore di ϵ , cioè abbiamo $d(a, \psi(a)) < \epsilon \forall a \in A'$.

Intuitivamente ciò è vero se A e B sono “uguali a meno di un errore pari ad ϵ ” in un intorno di $B(x, R)$.

Teorema 7.2. Dati $\epsilon, R > 0 \exists$ un intero $N = N(\epsilon, R)$ t.c. $\forall \theta \in [0, 1)$ e $\forall n \geq N$, l'insieme $\varphi_\theta(\mathbb{N})$ è ϵ -vicino nel disco di raggio R e centro $\varphi_\theta(n)$ ad un reticolo affine nella classe di equivalenza di $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \frac{4i\pi n}{4i\pi\{\theta\}_{n+1}}$ (a meno di similitudini ~~affini~~ che conservano l'orientazione).

Dimostrazione. Grazie al teorema 6.1 le 2 geodetiche definite da τ_j e τ_{j+1} sono ~~relazionate dalla trasformazione~~

$$\tau_{j+1} = \frac{-1}{\tau_j - (-1)^j a_{j+1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (-1)^j a_{j-1} \end{bmatrix} \tau_j$$

e

$$\tau_j = \frac{(-1)^j a_{j+1} \tau_{j+1} - 1}{\tau_{j+1}} = \begin{bmatrix} (-1)^j a_{j+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tau_{j+1}$$

e vengono proiettate in un'unica geodetica dello spazio modulare $\mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ per esempio rappresentata da

$$\tau_0(t) = -\frac{q_{-1} - \frac{4i\pi t}{q_{-2} + \theta_0 q_{-1}}}{q_0 + \frac{4i\pi t}{q_{-1} + \theta_1 q_0}} = \frac{4i\pi t}{1 + \frac{4i\pi t}{\theta_1}} = \frac{4i\pi t}{1 + 4i\pi \{\theta\}} t$$

dove $q_{-2} = 1$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$ e $\theta_1 = \frac{1}{\theta - a_0} = \frac{1}{\{\theta\}}$.

Questo dimostra il teorema 2.1 ~~con un errore di linearizzazione~~ dell'ordine di $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ per elementi di $\varphi_\theta(\mathbb{N})$ a distanza limitata da $\varphi_\theta(n)$. \square

La mappa

$$(0, +\infty) \ni t \mapsto \gamma_\theta(t) = \frac{4i\pi t}{4i\pi \{\theta\} t + 1}$$

definisce una geodetica nel semipiano iperbolico di Poincaré ~~(in accordo con la metrica iperbolica $\frac{ds}{y}$, con ds intendiamo l'elemento di lunghezza euclideo, rispetto a $z = x + iy \in \mathbb{H}$)~~ come mostra il Lemma 3.1, possiamo chiamare γ_θ *geodetica fillotattica di φ_θ* e notiamo che la curva che manda $t \mapsto \gamma_\theta(t)$ ha velocità iperbolica $\frac{1}{|\Im(\gamma_\theta(t))|} |\gamma'_\theta(t)| = \frac{1}{t}$.

Osservazione 7.2. Questo teorema vale per θ razionale: in questo caso γ_θ termina nella cuspide dello spazio modulare $\mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ e i reticoli affini associati $\Lambda_{\theta,n}$ degenerano in sottogruppi discreti di rango 1, nel senso che intersecano una boccia di raggio R fissato, centrata in un punto del reticolo affine lungo una copia traslata di un sottogruppo discreto di rango 1.

Osservazione 7.3. Denotato con $V(n)$ il dominio di Voronoi di $\varphi_\theta(n) \in \varphi_\theta(\mathbb{N})$, abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathrm{vol} V(n) = \pi$ se θ irrazionale. Se $\theta = \frac{p}{q}$ con $q \geq 3$ e p, q interi coprimi, l'unione dei domini di Voronoi (definiti da $\varphi_\theta(\mathbb{N})$) di tutti i punti a distanza $\leq R$ è approssimativamente un poligono regolare con q lati e raggio inscritto R ; questo implica $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathrm{vol} V(n) = q \tan \frac{\pi}{q} = \pi + \frac{\pi^3}{3q^2} + O(\frac{1}{q^4})$.

Se $\theta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ i domini di Voronoi sono illimitati e hanno volume infinito.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ~~Sernesi Edoardo *Geometria 2* Bollati Boringhieri 1994;~~
- [2] ~~Bacher Rholand *On geodesics of phyllotaxis* 1 February 2013;~~
- [3] Benedetti, Petronio *Lectures on hyperbolic geometry*;
- [4] Jean-Pierre Serre, *A course in arithmetic*;
- [5] Rudy Cesaretto, *Frazioni continue ed equazioni di Pell*;
- [6] Manfredo Perdigao do Carmo, *Riemannian Geometry* 1994.