

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E APPLICAZIONI

Granulometria e porosità della polvere di
caffè nei filtri per il caffè espresso



Candidato:
Claudia Belfiori

Relatore:
Prof. Riccardo Piergallini

ANNO ACCADEMICO 2018/2019

Ai miei genitori e a Sofia

Indice

1	Esperimento sulla polvere di caffè	1
1.1	Fase I	2
1.1.1	Macinatura	2
1.1.2	Analisi granulometriche	2
1.1.3	Setacciatura	3
1.2	Fase II	7
1.2.1	Prove fallite	7
1.2.2	Prove riuscite	11
1.2.3	Conclusioni dell'esperimento	14
1.2.4	Prova fallita per il calcolo del volume solido asciutto	15
1.3	Fase III	17
1.3.1	Prove fallite	19
1.4	Fase IV	19
1.4.1	Considerazione sulla porosità asciutta	21
1.5	Esperimento sui chicchi	22
1.6	Conclusioni	24
2	Le distribuzioni di probabilità e ricerca del threshold	25
2.1	La distribuzione gaussiana unimodale	25
2.1.1	La media	26
2.1.2	La varianza	26
2.2	La distribuzione bimodale e bimodale Gaussiana	27
2.3	Il threshold	27
2.3.1	Il threshold adattivo con la tecnica iterativa	28
2.3.2	Thresholding adattivo di base	28
2.3.3	Threshold adattivo calcolato con la bimodale gaussiana	29
2.3.4	Ricerca del valore di Thresholding	31
2.4	Applicazione della tecnica di thresholding adattivo calcolato con la bimodale gaussiana	31
2.5	Applicazione della tecnica di threshold adattivo iterativo	38

3 Il packing di sfere mono e multidimensionali	40
3.1 Porosità e packing di sfere	40
3.2 Packing di sfere monodimensionali	42
3.3 Packing di sfere multidimensionali	44
3.4 Le ultime ricerche	46
A Tabelle dei dati granulometrici delle polveri	47
Bibliografia	49

Elenco delle figure

1.1	Grafico della polvere ottenuta dalla macinatura.	3
1.2	Il setaccio vibrazionale.	4
1.3	(a) Foto del caffè in uno dei setacci del setaccio vibrazionale. (b) Foto della patina di caffè nel setaccio con palline di acciaio.	4
1.4	Kruve: strumento di setacciatura.	5
1.5	Grafico di confronto tra misto analitico e quello del campione.	7
1.6	Grafico delle analisi granulometriche del campione G.	7
1.7	Grafico delle analisi granulometriche del campione M.	8
1.8	Grafico delle analisi granulometriche del campione F.	8
1.9	Cilindri vuoti, con metro applicato lateralmente, utilizzati per tutti gli esperimenti in acqua.	9
1.10	(a) Foto della polvere bagnata compattata; (b) Foto della polvere asciutta compattata.	11
1.11	Polvere di caffè con bagnazione non completata.	12
1.12	Andamento del volume dei chicchi bagnati nel tempo.	15
1.13	Andamento del volume della polvere bagnata del caffè di prova.	16
1.14	(a) Portafiltro da caffè con filtro al suo interno; (b) Pressino dinamometrico.	17
1.15	Sferometro con vetrino e filtro con caffè pressato.	18
1.16	(a) 20 g di caffè nel filtro non pressato; (b) 20 g di caffè nel filtro dopo la pressatura.	19
1.17	Tre pressature per i 3 campioni: verde-misto; blu-<500; rosso-(600-500).	20
1.18	Grafico con le porosità asciutte per tutti i campioni.	21
1.19	Grafico con le porosità bagnate per tutti i campioni.	21
1.20	Macchina fotografica posizionata per scattare foto ai chicchi.	22
1.21	(a) Foto dei 100 chicchi asciutti; (b) Foto dei chicchi dopo 12 h dalla bagnazione.	23
2.1	Grafico di una distribuzione normale.	26

2.2	Fasi di ricerca del threshold.	29
2.3	Funzione di densità di probabilità.	30
2.4	Grafico della curva dei fini, dei grandi e del misto.	35
2.5	Grafico della curva dei fini e della curva fittata.	35
2.6	Grafico della curva dei grandi e della curva fittata.	36
2.7	Grafico della curva della polvere non setacciata e della curva fittata.	36
2.8	Grafico della curva della polvere mista e della curva fittata.	37
3.1	Cubo approssimato da sfere	41
3.2	Grafico descrittivo dei dati ottenuti	45

Elenco delle tabelle

1.1	Dati dell'esperimento 2.1.ii	9
1.2	Dati dell'esperimento 2.1.iii	10
1.3	Dati rielaborati dell'esperimento 2.1.iii	10
1.4	Dati delle altezze dell'acqua nel cilindro in cm per il campione G.	12
1.5	Dati dell'esperimento per la polvere 600-500 micron.	13
1.6	Dati dell'esperimento per il campione M.	13
1.7	Dati delle altezze dell'acqua nel cilindro per il campione M.	14
1.8	Dati dell'esperimento per il campione F.	14
1.9	Dati delle altezze dell'acqua nel cilindro per il campione F.	14
1.10	Dati rielaborati per ciascun campione.	14
1.11	Dati relativi all'esperimento descritto in 2.3.	16
1.12	Dati rielaborati per l'esperimento in 2.3.	16
1.13	Dati della pressatura.	19
1.14	Dati relativi al campione bagnato 600-500 micron.	20
1.15	Dati relativi al campione bagnato misto.	20
1.16	Dati relativi al campione bagnato < 500 micron.	21
1.17	Dati dell'esperimento sui chicchi.	23
2.1	Variabili utilizzate nell'implementazione.	34
2.2	Tabella dei parametri.	37
3.1	Porosità delle varie forme.	40
A.1	Tabella delle taglie con le percentuali volumetriche.	48

Introduzione

L'argomento affrontato in questo elaborato è nato da un'esperienza di stage svolto presso un'azienda di produzione di macchinari da caffè. L'attività è stata incentrata su un'esperimento pensato e poi realizzato per il calcolo della porosità della polvere del caffè. Lo scopo di tale esperimento è stato quello di approfondire un aspetto sull'analisi del caffè fino ad ora poco trattato in letteratura. Gli studi eseguiti in passato hanno riportato dei valori di porosità generici per il caffè macinato senza quindi fornire dei dati precisi. L'obiettivo di tale esperimento è stato pertanto quello di documentare una possibile metodologia di calcolo del parametro della porosità, mettendo in luce le difficoltà che più hanno caratterizzato tale procedimento. Il valore di porosità raggiunto al termine di questa esperienza non è però relativo ad uno stato generico del caffè ma riguarda in realtà un caso particolare, ossia di una polvere ottenuta mediante una specifica macinatura e trattata successivamente con tecniche di calcolo di volume solido in acqua e di pressatura.

Dai risultati dell'esperimento si è poi deciso di approfondire un aspetto fondamentale per il caffè: la granulometria. Questa analisi della polvere ha portato alla ricerca più specifica del significato della distribuzione normale e in particolare della distribuzione bimodale gaussiana. Lo studio di tale curva ha permesso di approfondire la teoria ad essa legata ed anche lo stretto legame con il campo di applicazione qui trattato. Come risultato finale di questa sezione sono state trovati i fit delle curve eriditate dall' esperimento e il valore di threshold.

Infine, nell'ultimo capitolo si è approfondito come occupare uno spazio ben definito utilizzando delle particelle generiche di forma sferica. Importante è il legame tra il diametro delle particelle, la posorità e la granulometria. In questo contesto, le ultime frontiere della ricerca si sono rivolte verso un'analisi più approfondita dell'ambito, con lo scopo di trovare dei metodi di risoluzione per particelle sferiche di dimensioni maggiori di quelle considerate fino ad oggi.

Capitolo 1

Esperimento sulla polvere di caffè

L'attività di stage svolta presso un'azienda di produzione di macchinari da caffè ha avuto come scopo quello di fornire il calcolo sperimentale di uno dei parametri caratterizzanti della polvere di caffè espresso: la porosità. La struttura porosa della polvere di caffè è data dalla presenza di pori e interstizi tra i grani che possono essere riempiti da un fluido o che sono permeabili all'aria.

La porosità è definita come:

$$\text{Porosità} = \frac{\text{Volume spazi vuoti}}{\text{Volume totale}} \quad (1.1)$$

La porosità deve essere controllata affinché l'acqua possa sciogliere tutte le molecole aromatiche nei canonici 20-25 secondi: il tempo di estrazione di un espresso. Il caffè utilizzato per l'esperimento è stato il "Sitio Quilombo", una qualità di caffè monoarabica proveniente dal Brasile. La quantità iniziale è stata di 3 Kg.

L'esperimento svolto è costituito da più fasi:

- FASE I: la preparazione del campione di caffè;
- FASE II: il calcolo del volume solido;
- FASE III: il calcolo del volume totale nel filtro;
- FASE IV: il calcolo della porosità.

1.1 Fase I

1.1.1 Macinatura

Analizzando le varie operazioni relative alla prima fase dell'esperimento, la macinatura è stata effettuata mediante un macinino a macine piane. L'idea iniziale era quella di eseguire due diversi tipi di macinature con il macinino a macine piane e con quello a macine coniche. La differenza tra i due è sostanziale poiché i risultati granulometrici restituiscono dei dati diversi.

Il campione macinato con il macinino a macine piane rompe i chicchi di caffè in particelle riconducibili a micro-sfere la cui granulometria riporta una curva bimodale guassiana; il campione sottoposto alle macine coniche invece ricava dai chicchi delle particelle a forma cilindrica la cui granulometria restituisce una curva trimodale gaussiana. Per motivi legati alla strumentazione si è dovuto abbandonare l'idea del macinino a macine coniche e proseguire l'esperimento utilizzando quello a macine piane.

Le macine piane sono due dischi scanalati; la macina superiore è quasi fissa, e va ad incastrarsi sulla macina inferiore attaccata all'albero del motore. La macina superiore è collegata alla ghiera di regolazione per lo spessore del macinato, quindi, agendo sulla ghiera, si distanziano o si avvicinano le due macine, permettendo la variazione dello spessore della polvere. Il caffè in chicchi si trova nella campana e cade per gravità tra le due macine dove è ridotto in polvere e infine viene espulso nel dosatore per forza centrifuga.

1.1.2 Analisi granulometriche

La polvere di caffè che si ha dalla macinatura può essere analizzata mediante uno strumento chiamato granulometro. Il macchinario nasce come strumento di analisi della granulometria delle particelle. Lo strumento è molto sofisticato. Prima di iniziare l'analisi del campione, esso rileva al suo interno possibili impurità che non verranno prese in considerazione nel calcolo finale. Il campione da inserire, a seconda del tipo di materiale, del diametro delle particelle e dell'unità di dispersione utilizzata, può variare da alcuni milligrammi ad un massimo di circa 500 mg. La misura viene eseguita in modo automatico non appena l'assorbimento radiante del laser è sufficiente per l'operazione selezionata. Il tempo totale di analisi si attesta attorno ai 20-30 secondi, compreso lo spostamento della cella di misura. Il tempo di dispersione prima della misurazione può essere impostato a piacimento. I dati misurati vengono analizzati in automatico secondo la teoria di diffrazione impostata in fase di avvio. I risultati possono essere visualizzati direttamente o esportati. È poi possibile ripetere subito la misurazione.

In questo caso dopo aver analizzato la polvere macinata, il granulometro ha restituito i dati relativi alla granulometria delle particelle. Le analisi granulometriche successivamente analizzate restituiscono una curva bimodale gaussiana. I due picchi di tale curva mostrano una presenza di particelle fini di grandezza 40,1 micron e di particelle grandi con dimensione circa 454 micron come illustrato nel grafico in Figura [1.1](#).

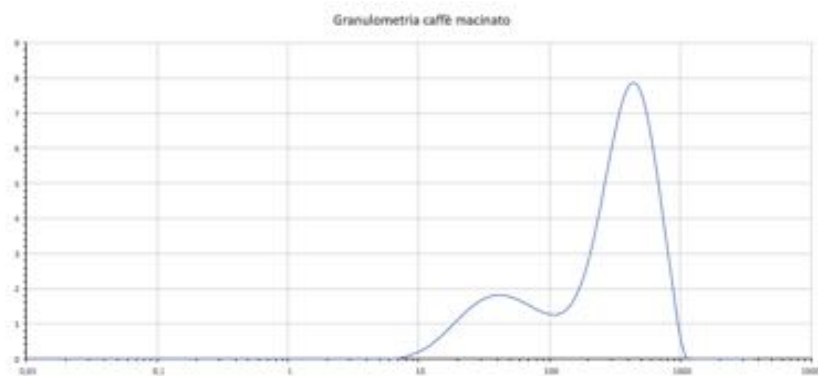


Figura 1.1: Grafico della polvere ottenuta dalla macinatura.

1.1.3 Setacciatura

Una volta osservate le analisi di partenza, è stato necessario effettuare un'operazione di setacciatura del campione.

L'idea iniziale era quella di separare tutto il campione in modo da isolare le particelle grandi da quelle fini utilizzando le dimensioni lette nel grafico in figura [1.1](#).

Separazione delle particelle grandi

Per isolare le particelle grandi è stato necessario utilizzare uno strumento che setacciasse tutto il campione. Il risultato atteso era di poter ottenere dalla polvere iniziale solamente la parte di campione con particelle di dimensione circa 500 micron.

Prove fallite

Lo strumento che era stato destinato alla setacciatura, inizialmente era il setaccio vibrazionale ma la componente oleosa del campione ha reso la setacciatura difficile da effettuare in tempi idonei. Questo strumento è costituito da una serie di setacci posti in pila l'uno sopra l'altro; alla base vi è un motore che permette la vibrazione di tutto il sistema.



Figura 1.2: Il setaccio vibrazionale.

Dopo vari tentativi si è potuto osservare che i movimenti del setaccio, prevalentemente vibrazionali e poco oscillatori, non permettevano alle particelle di caffè di attraversare la maglia del setaccio, creando così una patina sulla superficie (Figura 1.3 a).

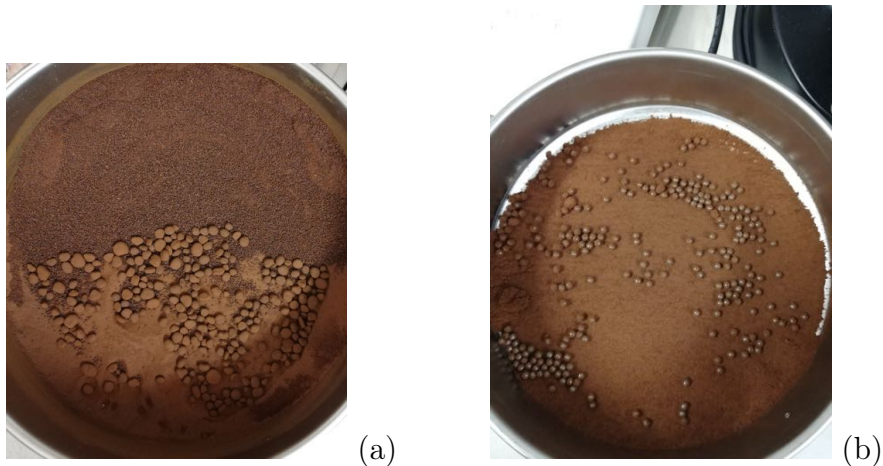


Figura 1.3: (a) Foto del caffè in uno dei setacci del setaccio vibrazionale. (b) Foto della patina di caffè nel setaccio con palline di acciaio.

Si è provato a stimolare il passaggio delle particelle inserendo delle micro-sfere di acciaio all'interno del setaccio, ma i risultati sono rimasti invariati (Figura 1.3 b).

Prove riuscite

Per poter separare il campione si è dunque utilizzato il Kruve. Questo strumento è un setaccio ad azione manuale costituito da tre piatti con un coperchio adagiato in cima. I primi due piatti sono costruiti in modo tale da poter applicare delle reti aventi fori effettuati al laser con diverse dimensioni. L'ultimo piatto ha la funzione di raccolta del materiale setacciato.

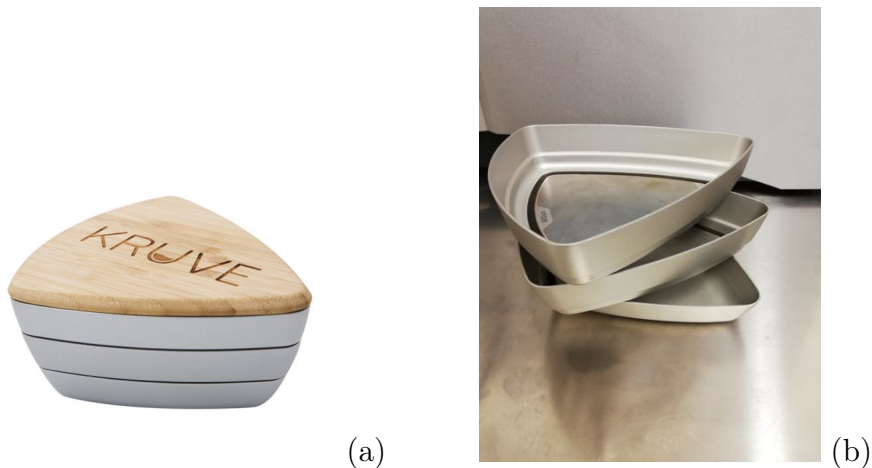


Figura 1.4: Kruve: strumento di setacciatura.

Con questo strumento, utilizzando le reti di dimensione 600 micron e 500 micron, è stato possibile estrapolare le particelle grandi dal campione iniziale. Si è potuto osservare che, per facilitare la caduta delle particelle nelle varie reti, il Kruve necessita di una quantità molto piccola di materiale (circa 20 g) così che i tempi di lavorazione sono risultati dilatati rispetto a quelli che erano stati stimati. Una volta setacciata tutta la polvere di caffè, si è potuto dunque ottenere circa 846 g di caffè con taglia 600-500 micron (rimasta sulla superficie del secondo piatto da 500 micron) e circa 972 g di caffè con taglia minore di 500 micron (raccolta nell'ultimo piatto).

Separazione particelle fini

La quantità raccolta di polvere di caffè con dimensione minore di 500 micron si pensava inizialmente dovesse subire un'ulteriore fase di setacciatura con una rete di dimensione più vicina a quella delle particelle fini indicata dal granulometro.

Prove fallite

- i. Purtroppo il Kruve ha mostrato, in questo caso, particolare difficoltà nel gestire la polvere fine del campione. La rete utilizzata aveva una dimensione pari a 200 micron ma i tempi di setacciatura di una minima quantità sono risultati estremamente lunghi, mostrando scarsi risultati.
- ii. Per poter isolare le particelle fini si è pensato allora ad un nuovo tipo esperimento di separazione sfruttando l'aria compressa e la gravità. Per provare l'esperimento si è utilizzato un caffè di prova/scarto inserito all'interno di un cilindro graduato. Le quantità utilizzate, non pesate, erano all'incirca un cucchiaino da caffè. L'aria compressa è stata poi fatta circolare nel cilindro mediante un tubicino inserito al suo interno, permettendo l'erogazione di

aria compressa dal fondo. Al capo del tubicino, collegato alla pistola dell'aria compressa è stata utilizzata una valvola per regolare il flusso di aria. Ciò che ci si aspettava era che, mediante la valvola, fosse possibile controllare il flusso dell'aria che muovendo le particelle, per gravità, avrebbe gettato fuori dal cilindro le particelle più fini lasciando all'interno quelle più grandi. Nel complesso si è osservato che, il getto dell'aria dentro al cilindro creava un vortice in grado di sollevare le particelle più fini fino a farle fuoriuscire. L'esperimento ha mostrato dei grandi limiti quando, dopo circa un minuto dall'erogazione dell'aria, le particelle hanno iniziato a uscire dal cilindro non seguendo più uno schema, mescolandosi dunque particelle fini e grandi, contaminando il campione che si era potuto raccogliere all'esterno; inoltre, la valvola, seppur più precisa rispetto alla pistola ad azione manuale, non ha permesso di controllare in maniera puntuale il getto dell'aria. Si è constatato che il margine di errore di tale esperimento risultava elevato e che i tempi di separazione con questa tecnica non avrebbero velocizzato il processo; si è deciso pertanto di abbandonare l'esperimento.

Conclusioni della fase I

Considerando che, la separazione al di sotto dei 200 micron dei fini risultava difficile, estremamente lunga e bisognosa di strumenti più sofisticati, è stato necessario fermare la fase di setacciatura ai campioni ottenuti con il Krüve. Come da progetto, dovendo lavorare con tre campioni differenti tra loro, si è pensato di sfruttare queste tre polveri: minore di 500 micron, 600-500 micron e un campione misto (metà minore di 500 e metà 600-500). Le analisi granulometriche del misto hanno mostrato che il campione avente per metà il primo campione e per metà il secondo campione restituiva ugualmente una curva bimodale gaussiana. In figura [1.6](#) si è confrontato il grafico del campione misto analitico e non. Per misto analitico si intende il grafico ottenuto sommando i dati del primo campione con quelli del secondo campione. Il grafico non analitico rispecchia invece le analisi fatte sulla polvere del campione misto; le due curve mostrano lo stesso andamento.

Osservando dunque i risultati, i tre campioni successivamente utilizzati sono stati: il 600-500 micron (grandi), il misto e il minore di 500 micron (fini) che chiameremo rispettivamente campione G, campione M e campione F.

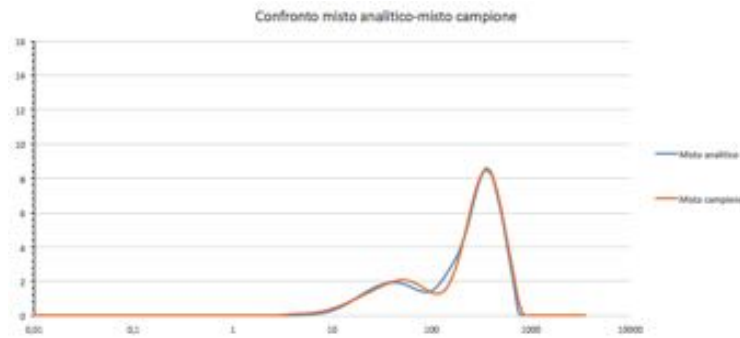


Figura 1.5: Grafico di confronto tra misto analitico e quello del campione.

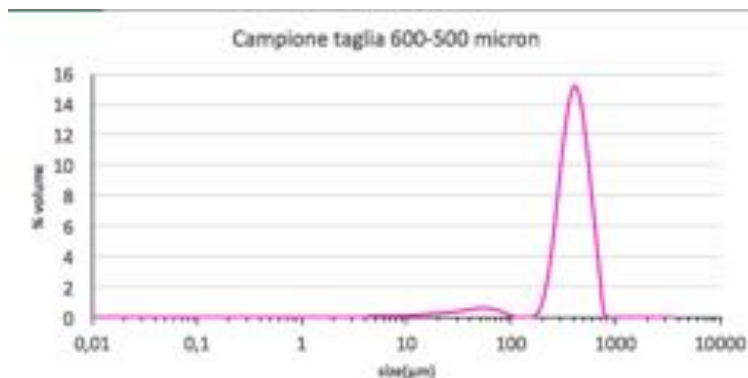


Figura 1.6: Grafico delle analisi granulometriche del campione G.

1.2 Fase II

Il caffè, sottoforma sia di chicco sia di polvere, ha al suo interno delle cavità generalmente occupate dall'aria. Lo scopo di questa fase del progetto era quello di riuscire a calcolare un volume solido della polvere. Per volume solido si intende un volume privo di spazi tra le particelle e all'interno delle particelle. Per fare ciò, si sono effettuate delle misurazioni in acqua. L'acqua infatti in queste prove ha avuto il compito di occupare gli spazi generalmente pieni di aria e rendere possibile il calcolo del volume solido.

1.2.1 Prove fallite

Gli esperimenti effettuati sono stati molti e prima di utilizzare i tre campioni stabiliti, si è osservato il comportamento del caffè in acqua utilizzando una polvere di prova/scarto. Tutti gli esperimenti sono stati effettuati in cilindri graduati sia da un litro con gradazione 10 ml sia da mezzo litro con gradazione 5 ml. Pallelamente alla superficie laterale di ciascun cilindro, è stato posizionato un metro per poter registrare misurazioni più precise. Tutte le misure sono sia in millilitri sia in centimetri. Si prende nota che lo zero di tutte le misurazioni sui cilindri è in alto e che i numeri procedono in ordine crescente fino alla base del

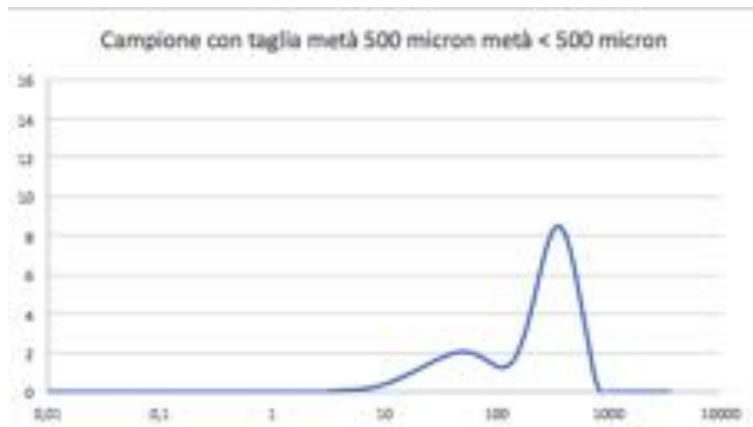


Figura 1.7: Grafico delle analisi granulometriche del campione M.

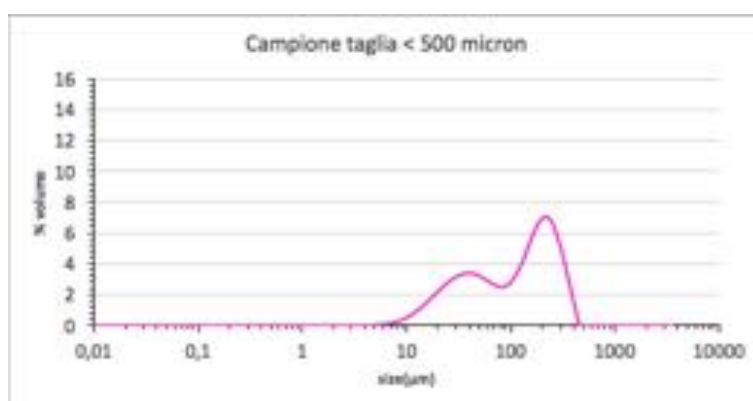


Figura 1.8: Grafico delle analisi granulometriche del campione F.

cilindro.

- i. Il primo esperimento che si è provato a fare è stato con l'utilizzo di una canula: sul cilindro da 1 litro sono stati inseriti 100 g di caffè, successivamente mediante la canula sono stati fatti scendere 500 ml di acqua. Alla base della canula è stato inserito un dischetto bucato al centro con microfori sulla superficie, con lo scopo di tenere la polvere compatta e non vagante nell'acqua. L'esperimento in questione necessita di strumentazioni adatte, in questo caso si è osservato che, utilizzando questa metodologia non era possibile contenere la dispersione di acqua, ottenendo delle misurazioni non precise. Il problema maggiore riscontrato in questo esperimento è stato però che le prime gocce di acqua calate attraverso la canula bagnavano il primo strato di caffè che incontravano creando una sorta di effetto tappo tra canula e caffè. Per fare scendere tutta l'acqua è stato necessario muovere la canula più volte, creando bolle e schiuma. Gli effetti sulle misurazioni sono stati decisivi tanto da non procedere con l'esperimento ulteriormente. I dati ottenuti sono riportati nella Tabella [1.1](#).



Figura 1.9: Cilindri vuoti, con metro applicato lateralmente, utilizzati per tutti gli esperimenti in acqua.

Tempo	Altezza acqua più caffè
zero	31,8 cm
2 ore	29,5 cm

Tabella 1.1: Dati dell'esperimento 2.1.ii

- ii. La metodologia introdotta sopra, essendo risultata fallimentare ha dunque lasciato spazio al secondo esperimento in cui si sono versati nel cilindro in prima battuta 100 g di polvere di caffè. In questo caso si è pensato di versare acqua nel cilindro lentamente e di aiutare la bagnazione mescolando il caffè. Il risultato dell'esperimento è stato anch'esso fallimentare poiché la creazione della schiuma sulla superficie ha ostacolato una misurazione precisa del livello di caffè più acqua nel tempo.
- iii. Nell'esperimento successivamente effettuato si è invece potuto osservare qualcosa di significativo poiché, una volta inseriti 50 g di polvere di caffè sul fondo, si è poi versato dell'acqua fino a raggiungere un livello di acqua più caffè pari a 500 ml. Le misurazioni prese nel tempo mostrano come il livello di acqua più caffè sia monotono decrescente. L'esperimento in questo caso è stato prolungato per tre giorni.

A fine esperimento le conclusioni che sono state tratte sono le seguenti:

- Nei primi 15 minuti l'acqua penetra velocemente all'interno della polvere;
- Dopo h 1,10 dall'inizio dell'esperimento, la bagnazione visibile attraverso le pareti trasparenti del cilindro risulta completata;
- Dopo 2 giorni di ammollo il caffè non ha subito una bagnazione con

Tempo di bagnazione in ore	Livello acqua più caffè in cm	Volume acqua più caffè in ml
0,00	8,10	500
0,15	8,70	490
0,30	8,85	
1,10	9,15	
3,30	9,30	477
5,00	9,45	475
6,30	9,70	
72,00	9,80	

Tabella 1.2: Dati dell'esperimento 2.1.iii

Tempo di bagnazione in ore	Volume in cm cubi	Volume solido in cm cubi
0,00	500,00	91,39
0,15	488,96	80,34
0,30	486,20	77,58
1,00	480,67	72,06
3,30	477,91	69,30
5,00	475,15	66,54
6,30	470,55	61,94
72,00	468,71	60,10

Tabella 1.3: Dati rielaborati dell'esperimento 2.1.iii

crescita lineare.

I dati sono riportati nella Tabella [1.2](#) e nella Tabella [1.3](#). I dati ottenuti dall'esperimento e i calcoli del volume solido portano ad osservare che a livello volumetrico la polvere ha come maggiore effetto l'assorbimento che compensa l'espansione delle particelle.

- iv. Per poter ottenere dei risultati sul fattore di espansione dallo stato asciutto a quello bagnato, è stato effettuato un esperimento che prevedeva l'utilizzo di un programma di rielaborazione immagini. L'esperimento pensato è stato quello di filtrare la polvere di caffè con un panno, registrando tutti i pesi prima della bagnazione e successivamente. Il caffè nel panno è stato lasciato in ammollo per circa 30 minuti, dopodiché il caffè rimasto sulla superficie del panno è stato raccolto e pesato. Purtroppo però la consistenza del caffè bagnato non ha permesso di effettuare nessuna analisi immagine. Il programma utilizzato necessita di foto di materiali ben distinti tra loro, il caffè bagnato presentava diverse difficoltà nel suddividersi in modo da ottenere una foto utilizzabile. Il programma ha avuto problemi di calcolo anche gestendo immagini del caffè compattato poiché l'acqua presente nelle particelle creava

un effetto specchio (Figura 1.10 a). La distinzione delle particelle è risultato

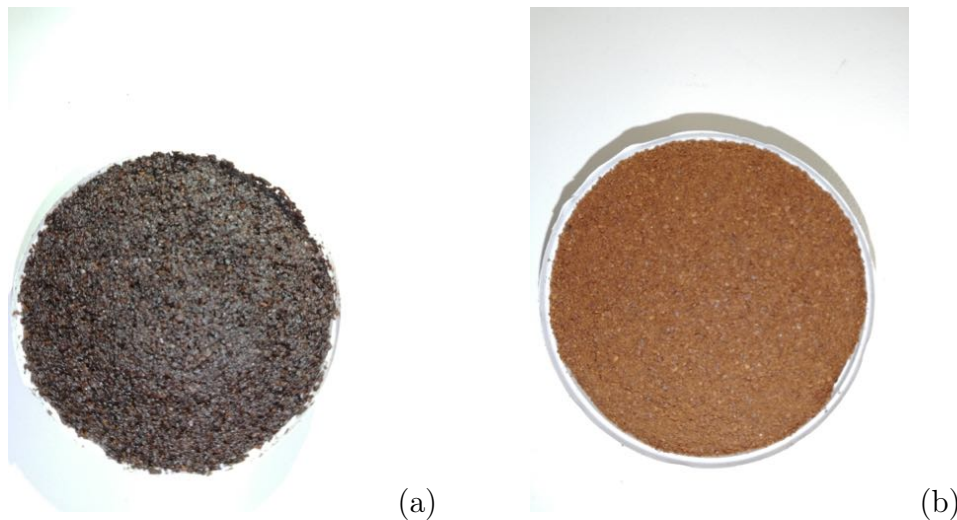


Figura 1.10: (a) Foto della polvere bagnata compattata; (b) Foto della polvere asciutta compattata.

non possibile neanche con la polvere del caffè asciutto (Figura 1.10 b).

Viste le problematiche riguardo la polvere, si è passati ad analisi sui chicchi per studiarne i comportamenti dall'asciutto al bagnato. L'esperimento sui chicchi verrà poi spiegato in seguito.

1.2.2 Prove riuscite

Analizzando i dati dell'esperimento sopra descritto, esso è risultato essere il miglior candidato per il calcolo del volume solido. Il passaggio dalla polvere del caffè di prova a quello con il campione vero e proprio ha portato però a delle modifiche. Le misurazioni registrate sono relative infatti al momento della bagnazione, come verrà meglio spiegato in seguito. Passando dunque ai 3 campioni creati nella fase di setacciatura si è potuto effettuare il calcolo del volume solido su ciascun campione. Ogni campione è stato analizzato mediante 3 ripetizioni dell'esperimento scelto e registrando negli stessi tempi le misurazioni effettuate da 3 individui differenti. I dati riportati in Tabella 1.5 mostrano una media delle altezze registrate per ciascuna misurazione. Per ogni campione è stata prelevata una quantità pari a 150 g (50 g per ciascuna misurazione). Per l'esperimento sono stati utilizzati 4 cilindri: 2 da un litro con gradazione da 10 ml e due da 1/2 litro con gradazione da 5 ml. Uno di quest'ultimi è stato utilizzato per misurare 500 ml di acqua. Essa è stata poi versata nei cilindri con caffè fino a raggiungere un livello di acqua più caffè pari a 500 ml. La quantità di acqua non inserita nel caffè è stata poi registrata. Le misurazioni registrate sono riferite al livello di acqua e caffè subito dopo la bagnazione, visibile dalle pareti del cilindro ma che non assicurano la fuoriuscita

completa dell'aria presente nel campione. I 3 campioni, in relazione all'esperimento hanno mostrato dei comportamenti differenti. La polvere di caffè del campione F ha impiegato per la bagnazione circa 1,20 h, le particelle del campione G hanno impiegato un tempo pari a 10 min, mentre le particelle del campione M hanno effettuato la bagnazione dopo 30 min. Tutti i campioni dopo aver versato l'acqua sono stati sigillati per evitare effetti di evaporazione.



Figura 1.11: Polvere di caffè con bagnazione non completata.

Grazie ai dati ottenuti si è potuto procedere con il calcolo del volume solido bagnato e la rispettiva densità. Come detto sopra si è preso nota delle altezze dell'acqua rimasta nel cilindro di misurazione per ogni prova effettuata.

I dati utilizzati per il calcolo dei volumi solidi di ciascuna misurazione per tutti i campioni sono:

- Diametro cilindro da 1 L: 6,21 cm;
- Diametro cilindro da 1/2 L: 4,84 cm;
- Livello acqua rimasta nel cilindro relativo a ciascuna misurazione ottenuto per differenza;
- Altezza del livello di acqua più caffè ottenuta per differenza.

E' importante notare che per il calcolo di tutti i volumi, le altezze utilizzate sono state calcolate successivamente per differenza.

Campione 600-500 micron

Le quantità di acqua rimaste nel cilindro in cm, per il campione G sono state registrate in Tabella [1.4](#).

Prima misurazione	Seconda misurazione	Terza misurazione *
31,85	32,15	31,95

Tabella 1.4: Dati delle altezze dell'acqua nel cilindro in cm per il campione G.

Le altezze nei cilindri di acqua più caffè dopo la bagnazione e i rispettivi volumi

solidi sono state riportate nella Tabella [1.5](#).

(*) Il cilindro utilizzato ha capienza 1/2 L con gradazione 5 ml.

	Prima misurazione	Seconda misurazione	Terza misurazione *
Altezze in cm	24,02	24,00	8,20
Volume medio in cm cubi	67,00	60,42	69,00

Tabella 1.5: Dati dell'esperimento per la polvere 600-500 micron.

Analizziamo ora come sono stati ricavati i volumi solidi relativi alla prima misurazione per il campione G.

Al volume totale nel cilindro viene tolto il volume di acqua più caffè nel cilindro e poi viene ulteriormente sottratto il volume di acqua immessa nel cilindro.

Il volume dell'acqua più caffè è calcolato come:

$$\text{Altezza acqua più caffè} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\text{Diametro cilindro}^2}{2} \right) \quad (1.2)$$

Il volume dell'acqua immessa nel cilindro è calcolato come:

$$\text{Altezza per differenza} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\text{Diametro cilindro}^2}{2} \right) \quad (1.3)$$

Osserviamo ora un esempio numerico per il calcolo del volume solido relativo al campione G utilizzando le formule [1.2](#) e [1.3](#) sopra descritte:

$$500 - (0,05) \cdot (\text{PI}) \cdot \left(\frac{(6,21)^2}{2} \right) - ((23,5) \cdot (\text{PI}) \cdot \left(\frac{(4,84)^2}{2} \right)) = 68,97 \text{ cm cubi} \quad (1.4)$$

Campione misto

Per il campione M (metà 600-500 micron e metà < 500 micron) i dati raccolti sono riportati nella Tabella [1.6](#).

	Prima misurazione	Seconda misurazione	Terza misurazione *
Altezze in cm	24,72	24,72	9,3
Volume medio in cm cubi	57,69	54,93	61,94

Tabella 1.6: Dati dell'esperimento per il campione M.

Le altezze del livello di acqua rimasta sul cilindro da 1/2 L per il campione M

calcolate per differenza sono osservabili nella Tabella [1.7](#).

Prima misurazione	Seconda misurazione	Terza misurazione*
22,85	23,00	22,8

Tabella 1.7: Dati delle altezze dell'acqua nel cilindro per il campione M.

(*) Il cilindro utilizzato ha capienza 1/2 L con gradazione 5 ml.

Campione < 500 micron

Passando ora al campione F, i dati raccolti sono riportati nella Tabella [1.8](#).

	Prima misurazione	Seconda misurazione	Terza misurazione *
Altezze in cm	25,4	25,37	10,43
Volume medio in cm cubi	58,14	52,71	67,77

Tabella 1.8: Dati dell'esperimento per il campione F.

Le altezze dell'acqua rimasta sul cilindro da 1/2 L per il campione F calcolate per differenza sono descritte nella Tabella [1.9](#).

(*) Il cilindro utilizzato ha capienza 1/2 L con gradazione 5 ml.

Prima misurazione	Seconda misurazione	Terza misurazione *
21,70	22,05	21,00

Tabella 1.9: Dati delle altezze dell'acqua nel cilindro per il campione F.

1.2.3 Conclusioni dell'esperimento

Una volta ottenuti i dati sui volumi solidi in acqua dei campioni si è calcolato il volume medio per campione in cm cubi e la densità bagnata.

Campione	Volume solido bagnato	Volume solido per 20 g	Densità bagnata in g/cm cubo
Campione G	65,46	26,18	0,76
Campione F	59,54	23,82	0,84
Campione M	58,19	23,28	0,86

Tabella 1.10: Dati rielaborati per ciascun campione.

Tutte le misure dei volumi sono state riscalate ad una quantità pari a 20 g poiché

successivamente nella fase di pressatura si avranno confronti con misurazioni di campioni pari a questa grandezza (Tabella 1.10).

Per ottenere il volume solido bagnato nella quantità di 20 g si è utilizzata la formula:

$$\frac{(20 \text{ g})}{(\text{Densità bagnata})} \quad (1.5)$$

Per trovare la densità bagnata si è invece effettuato il seguente calcolo:

$$\frac{(50 \text{ g})}{(\text{Volume solido bagnato})} \quad (1.6)$$

1.2.4 Prova fallita per il calcolo del volume solido asciutto

Dall'esperimento sui chicchi, il fattore di espansione ottenuto era stato inizialmente assunto veritiero anche per la polvere. Da un confronto tra le analisi dei chicchi e quelle della polvere era stato osservato che, i tempi di bagnazione della polvere erano 1/8 rispetto a quello sui chicchi. Infatti, confrontando l'esperimento sul volume della polvere e quello sui chicchi nel tempo, si potevano vedere che gli andamenti erano simili. Confrontando i tempi del primo tratto della spezzata si è ricavato il rapporto 1 a 8. I dati relativi alla polvere sono riferiti all'esperimento con il caffè di prova poiché le misurazioni erano state prese nel tempo.

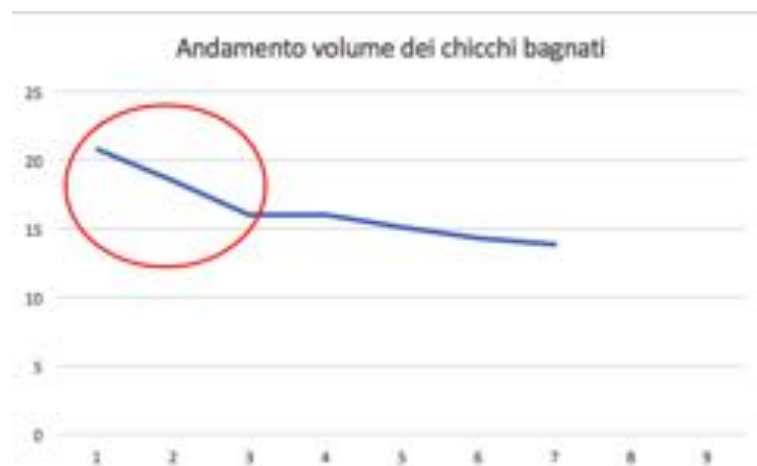


Figura 1.12: Andamento del volume dei chicchi bagnati nel tempo.

Dall'esperimento sui grani di caffè erano stati registrati più fattori di espansione volumetrica nel tempo; questi dati sono stati poi utilizzati con corrispondenza temporale con la polvere. Per la polvere del campione F è stato utilizzato il fattore di espansione dopo 8 h; per il campione G il fattore di espansione è quello

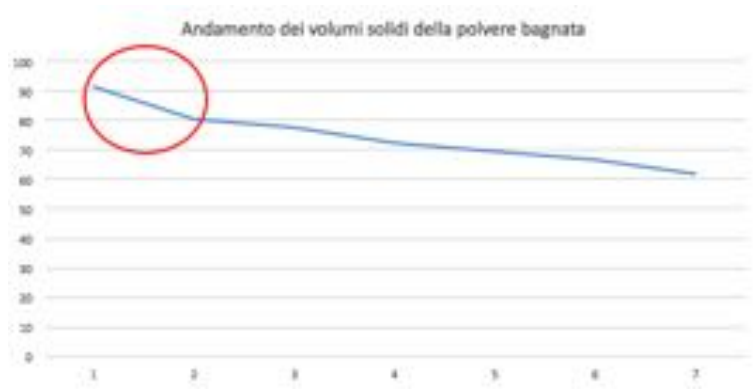


Figura 1.13: Andamento del volume della polvere bagnata del caffè di prova.

Campione	Fattore di espansione volumetrico
Campione G	1,134
Campione F	1,133
Campione M	1,122

Tabella 1.11: Dati relativi all'esperimento descritto in 2.3.

di 1 h dopo la bagnazione; per il campione M il fattore utilizzato è quello dopo 4 h.

Ottenuti i fattori elencati in Tabella 1.11, si è potuto calcolare il volume solido asciutto per ciascun campione e la densità asciutta (Tabella 1.12).

La formula utilizzata per il calcolo del volume solido asciutto è stata:

$$\left(\frac{\text{Volume solido bagnato}}{\text{(Fattore di espansione)}} \right) \quad (1.7)$$

Ad esempio, per il campione G il calcolo eseguito è il seguente:

$$\frac{(65,46)}{(1,13)} = 62,22 \quad (1.8)$$

Per quanto riguarda il calcolo del volume solido asciutto per una quantità pari a

Campione	Volume solido asciutto campione	Volume solido per 20 g	Densità asciutta in g/cm cubo
Campione G	62,22	24,89	0,80
Campione F	51,08	20,43	0,98
Campione M	50,12	20,05	0,10

Tabella 1.12: Dati rielaborati per l'esperimento in 2.3.

20 g lo si è effettuato tramite la formula:

$$\frac{(20 \text{ g})}{(\text{Densità asciutta})} \quad (1.9)$$

Il valore della densità asciutta si è infine trovato come:

$$\frac{(50 \text{ g})}{(\text{Volume solido asciutto})} \quad (1.10)$$

I risultati però ottenuti dopo la pressatura sono stati deludenti. Assumere che il comportamento dei chicchi dall'asciutto al bagnato sia simile a quello della polvere ha portato a delle approssimazioni grossolane.

1.3 Fase III

Una volta ottenuti i volumi solidi bagnati relativi a ciascun campione, si è potuto procedere con la fase di pressatura. Gli strumenti utilizzati per questo tipo di operazione sono stati: il portafiltro, il filtro, il pressino dinamometrico e lo sferometro. Ogni campione è stato sottoposto a 7 pressature differenti: 10,12,14,16,18,20,30 N.



Figura 1.14: (a) Portafiltro da caffè con filtro al suo interno; (b) Pressino dinamometrico.

Il pressino dinamometrico è uno strumento tale che una volta inserito il numero in Newton della forza della pressatura, a contatto con il filtro pieno di caffè effettua due pigiature consecutive. Lo scopo di questa operazione era quello di calcolare il volume totale del caffè più aria. In questo caso sono stati utilizzati filtri da 20 g; la quantità dunque di caffè su ciascun filtro è sempre rimasta costante mentre a variare erano le pressature. Per effettuare le misurazioni nel filtro è stato utilizzato lo sferometro.



Figura 1.15: Sferometro con vetrino e filtro con caffè pressato.

Lo sferometro è uno strumento di misura utilizzato nella lavorazione di uno specchio astronomico, per verificare la profondità di scavo raggiunta e quindi il raggio di curvatura della superficie in esame. Lo strumento in sé non è complicato, esso è costituito da un struttura portante rigida su cui sono posizionati 3 piedini di appoggio disposti in modo da trovarsi ai vertici di un triangolo equilatero, mentre nel centro è posizionata un dispositivo a vite o un comparatore per misurare la profondità dello scavo. Lo sferometro è uno strumento per la misura dello spessore di piccole sbarre o lastre e, indirettamente, del raggio della calotta sferica o della sfera cui la calotta appartiene. È un treppiede avente i piedi disposti al vertice di un triangolo equilatero; al centro del treppiede è fissata una madrevite nella quale scorre una vite micrometrica che termina in basso con un cono. Poggiato lo sferometro su una superficie piana, lo spostamento della vite micrometrica dà la misura dello spessore della sbarretta o della lamina. Per poter registrare la misura sono stati inoltre necessari un vetrino e una piastrina. Il vetrino, appoggiato sopra la superficie del filtro è stato utilizzato per calcolare lo zero dello strumento rispetto al filtro; la piastrina invece, inserita nel filtro sulla superficie del caffè pressato, aveva lo scopo di facilitare le misurazioni, calcolando le altezze in 3 punti fissati. Per eliminare il maggior numero di errori, per ciascun punto della piastrina è stato ricalcolato lo zero dello strumento. I dati raccolti, registrano poi la media di queste tre misurazioni per filtro. Si fa nota che lo zero dello strumento è sempre stato circa 14 mm dunque all'aumentare della pressatura l'altezza diminuisce. Più precisamente le altezze calcolate per differenza sono riportate nella Tabella [1.13](#).

Pressatura	600-500 (altezze in mm)	< 500 (Altezze in mm)	misto (Altezze in mm)
10 N	13,09	14,01	14,27
12 N	13,34	14,33	14,31
14 N	13,37	14,35	14,35
16 N	13,21	14,27	14,29
18 N	13,48	14,44	14,37
20 N	13,56	14,25	14,61
30 N	13,39	14,61	14,44

Tabella 1.13: Dati della pressatura.

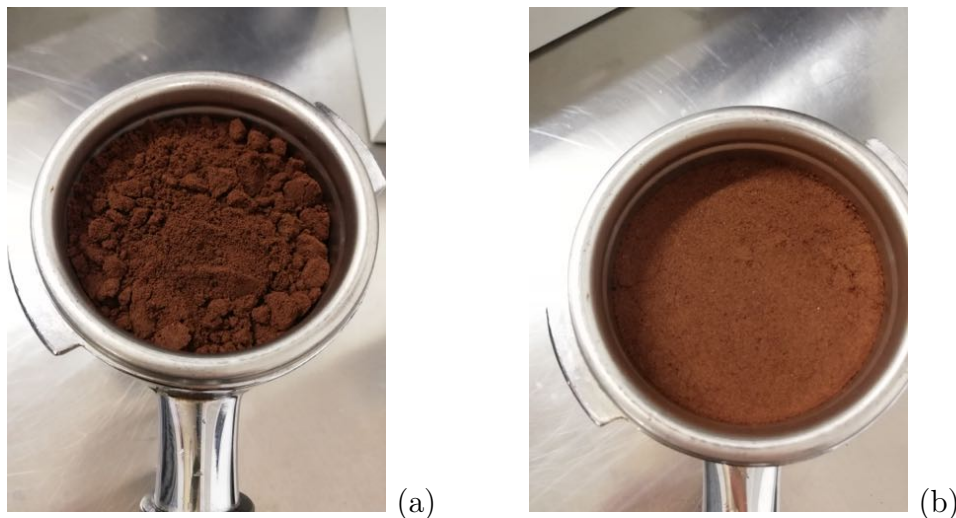


Figura 1.16: (a) 20 g di caffè nel filtro non pressato; (b) 20 g di caffè nel filtro dopo la pressatura.

1.3.1 Prove fallite

Una volta ottenute tutte le altezze si è potuto osservare che i dati risultavano anomali nelle pressature di 16, 20 e 30 N (Figura 1.17). Per una coerenza di dati, si è deciso di prendere in esame le misurazioni dei 3 campioni con pressatura pari a 10,12,14,18 N. Ottenute tutte le altezze, misurando poi il diametro del filtro con il calibro e l'altezza del filtro vuoto si sono potuti calcolare i volumi totali nel filtro. L'altezza del filtro utilizzato è pari a 27,36 mm; il diametro del filtro è 58,69 mm.

1.4 Fase IV

Una volta ottenuti tutti i dati, quali volume totale nel filtro e volume solido nel filtro (riscaldando il volume solido per una quantità pari a 20 g) si è potuti arrivare ad un calcolo di porosità bagnata e asciutta per ciascun tipo di campione. In letteratura, i valori trovati per la porosità del caffè è stato di 0,3-0,4 g/cm³.

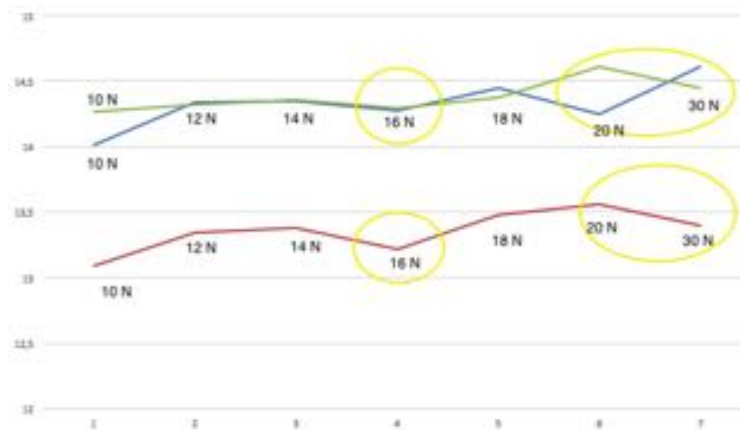


Figura 1.17: Tre pressature per i 3 campioni: verde-misto; blu-<500; rosso-(600-500).

Nella tabella [1.14](#) sono riportati tutti i valori dei volume dell'aria più caffè in cm cubi nel filtro per il campione G.

Campione G	Volume aria più caffè	Porosità bagnata
10 N	38,61	0,32
12 N	37,93	0,31
14 N	37,84	0,31
18 N	37,55	0,30

Tabella 1.14: Dati relativi al campione bagnato 600-500 micron.

La formula utilizzata per il volume di aria più caffè è stata:

$$\frac{(\text{Altezza filtro} - \text{Altezza caffè pressato}) \cdot (\text{Diametrofiltro})^2 \cdot (\text{Pi})}{(2 \cdot 1000)} \quad (1.11)$$

Il calcolo effettuato per la porosità bagnata è stato:

$$\frac{(\text{Volume totale nel filtro} - \text{Volume solido bagnato})}{(\text{Volume totale nel filtro})} \quad (1.12)$$

I dati relativi al campione M sono invece:

Campione M	Volume aria più caffè	Porosità bagnata
10 N	35,42	0,34
12 N	35,30	0,34
14 N	35,19	0,34
18 N	35,13	0,34

Tabella 1.15: Dati relativi al campione bagnato misto.

Per il campione F i dati sono riportati in [1.16](#):

Campione F	Volume aria più caffè	Porosità bagnata
10 N	36,12	0,34
12 N	35,24	0,32
14 N	35,21	0,32
18 N	34,95	0,32

Tabella 1.16: Dati relativi al campione bagnato < 500 micron.

Le formule utilizzate sono le stesse utilizzate per il caso 600-500 micron.

Si mostrano di seguito dei grafici sull'andamento della porosità in Figura [1.18](#).

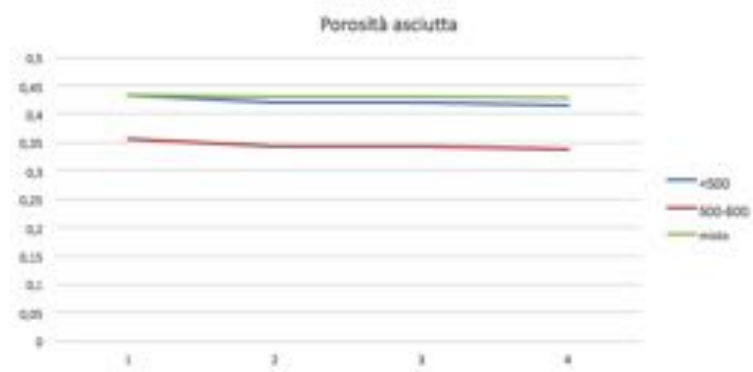


Figura 1.18: Grafico con le porosità asciutte per tutti i campioni.

1.4.1 Considerazione sulla porosità asciutta

Come visto nella precedente fase il tentativo di ricavare dei valori per il volume asciutto non possono essere presi in considerazione. La porosità asciutta infatti sembra avere un andamento del tipo:

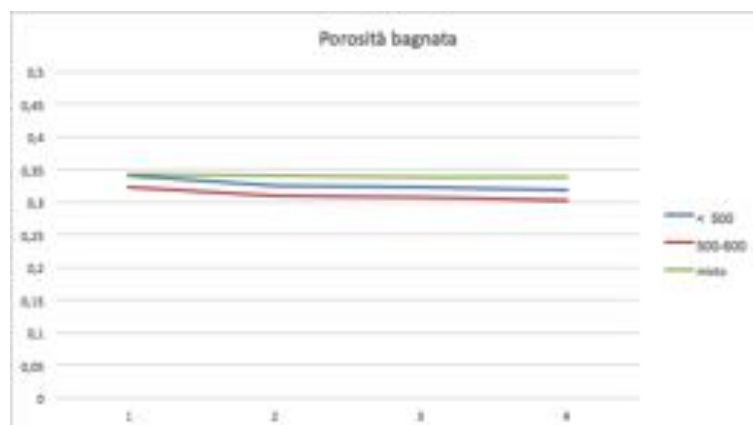


Figura 1.19: Grafico con le porosità bagnate per tutti i campioni.

1.5 Esperimento sui chicchi

Gli esperimenti condotti sui chicchi nascono dalla poca adattabilità della polvere al calcolo della porosità in tutte le sue fasi. Il chicco, così come la polvere, presenta al suo interno degli spazi vuoti. È stato interessante osservare il comportamento del chicco in acqua sia a livello di volume sia a livello di peso. A tal proposito l'esperimento in questione è stato effettuato su chicchi provenienti dal Brasile, monorigine arabica, con proprietà simili al caffè utilizzato per i tre campioni.

Sono stati selezionati 100 chicchi di caffè in modo che non presentassero profonde rotture esterne; sono stati poi messi in fila su un foglio con disegnato un riquadro 19x19cm. I chicchi sono stati appoggiati sul foglio nella stesso verso del chicco. Posizionata una macchina fotografica in una postazione fissa è stata scattata una foto ai chicchi cercando di evitare le ombre.



Figura 1.20: Macchina fotografica posizionata per scattare foto ai chicchi.

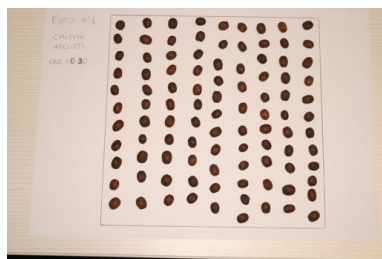
Successivamente i chicchi sono stati pesati: circa 11,88 g. In un cilindro da 1 litro sono stati inseriti i chicchi, sopra, è stato adagiato il dischetto metallico con i fori utilizzato in precedenza. Conseguenzialmente è stata versata un quantità d'acqua pari da raggiungere il livello di acqua più chicchi di 900 ml. Dopo un'ora dall'inizio dell'esperimento sono stati tirati fuori dall'ammollo i chicchi, pesati e di nuovo fotografati con la metodologia stabilita. Il peso dei chicchi bagnati dopo un'ora era di: 15,2 g. Questa procedura è stata ripetuta ogni ora per 7 ore, dopodiché i chicchi sono stati lasciati nell'acqua una notte e la mattina successiva è stata effettuata l'ultima misurazione. I dati dei pesi nel tempo sono rispettivamente registrati nella Tabella [1.17](#)

Le foto dei chicchi sono state utilizzate invece per lo studio del volume. Infatti i chicchi e la polvere a contatto con l'acqua sono soggetti sia ad assorbimento che ad espansione volumetrica. Mediante le foto è stato possibile verificare l'espansione volumetrica dei chicchi e ricavare dei fattori di espansione nel tempo da utilizzare

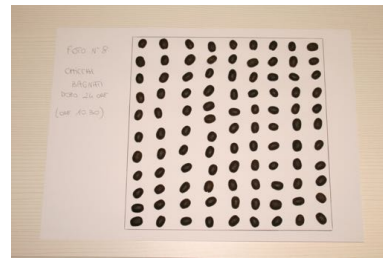
Ore di bagnazione	Peso in g	Fattore di espansione volumetrico
0	11,88	1
1	15,2	1,051
2	19,2	1,124
3	20,0	1,159
4	20,9	1,161
5	21,8	1,166
6	22,2	1,161
12	23,6	1,173

Tabella 1.17: Dati dell'esperimento sui chicchi.

poi per la polvere.



(a)



(b)

Figura 1.21: (a) Foto dei 100 chicchi asciutti; (b) Foto dei chicchi dopo 12 h dalla bagnazione.

1.6 Conclusioni

Il calcolo della porosità ha presentato nella sua realizzazione molti ostacoli. Innanzitutto la strumentazione; il caffè infatti a causa della sua componente oleosa, una volta macinato, si comporta come una polvere molto difficile da trattare. Gli effetti di raggruppamento delle particelle si sono mostrati non solo nel setaccio vibrazionale ma anche nelle semplici operazioni di prelievo di parte del campione. Lo stesso granulometro ha mostrato evidenti problematiche nell'analizzare la polvere. Il Krueve si è dimostrato adatto solo per setacciature di dimensioni grandi. L'esperimento ha evidenziato il fatto che uno strumento come il Krueve, con tempi lunghissimi riesce a setacciare la polvere di caffè fino ad una dimensione di 200 micron.

Anche nella fase del calcolo del volume solido ci sono stati dei problemi. Tutti gli esperimenti che a livello teorico sembravano voler essere risolutivi hanno invece mostrato degli effetti inaspettati.

La schiuma, ad esempio, sulla superficie della miscela acqua e caffè ha ostacolato la misurazione delle altezze, rendendole incerte. Importanti sono stati anche gli effetti di evaporazione negli esperimenti falliti che poi sono stati ridotti sigillando i cilindri.

La bagnazione del campione è stata anch'essa difficoltosa da osservare poiché dal cilindro si sono potuti osservare solo gli effetti lungo le pareti del cilindro. Non si è sicuri che le registrazioni, durante l'esperimento, riguardino il momento della bagnazione completa di tutto il campione. La polvere bagnata in generale si è dimostrata essere poco incline a questo tipo di esperimenti. Essa infatti, a seconda della granulometria, presenta una maggiore velocità di bagnazione. Inoltre la polvere bagnata tende ancor di più ad agglomerarsi e necessita di non essere in nessun modo toccata per non compromettere la quantità di campione.

La pressatura si è dimostrata essere incline ad errori di misurazioni a causa dello strumento molto sofisticato. La placca posta sopra il caffè pressato per la misurazione delle altezze nei tre punti ha permesso di eliminare gran parte degli errori e di ottenere delle misurazioni coerenti fra loro.

La porosità finale calcolata sembra essere matematicamente corretta, visti i dati di tutte le fasi. A livello intuitivo sembra poco probabile che la porosità del campione misto non si trovi tra le porosità degli altri due campioni anche se osservando il grafico in figura 22 le tre curve della porosità assumono lo stesso andamento a partire da un determinato momento in poi.

I risultati comunque ottenuti a livello numerico rispecchiano quanto trovato in letteratura, per tutti e tre i campioni, infatti, la porosità della polvere di caffè bagnata assume un valore compreso tra 0,3 e 0,4 g/cm³.

Capitolo 2

Le distribuzioni di probabilità e ricerca del threshold

2.1 La distribuzione gaussiana unimodale

Analizziamo ora in questo capitolo l'elemento fondamentale dell'esperimento per il calcolo della porosità della polvere di caffè: la curva bimodale gaussiana. Nella teoria della probabilità la distribuzione normale o di Gauss è una distribuzione di probabilità continua che è spesso usata come prima approssimazione per descrivere variabili casuali a valori reali che tendono a concentrarsi attorno ad un singolo valore medio. Il grafico della funzione di densità di probabilità associata è simmetrico e ha una forma a campana, nota come campana di Gauss (o anche come curva degli errori, curva a campana, ogiva). La distribuzione normale è caratterizzata dalla funzione di densità di probabilità, cui spesso si fa riferimento con il termine curva di Gauss o gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot (\sqrt{2\pi})} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.1)$$

Si ricordano gli elementi matematici principali della distribuzione normale:

- a) La media, indicata con la lettera μ ;
- b) La varianza, indicata con la lettera σ ; Un grafico esemplificativo della gaussiana è quello in Figura [2.1](#).

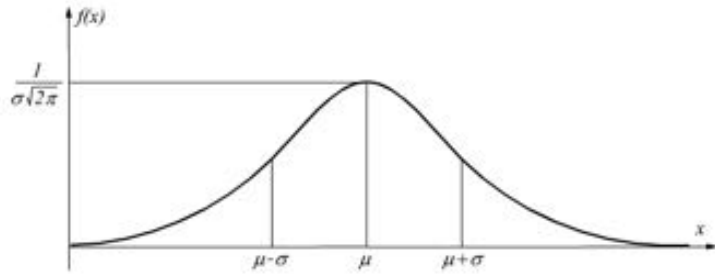


Figura 2.1: Grafico di una distribuzione normale.

2.1.1 La media

La media, in statistica, è definita come un unico valore numerico che descrive un insieme di dati o una classe. Esistono varie tipologie di media, quella che comunemente viene utilizzata è la media aritmetica.

Generalmente la media aritmetica, utilizzando n elementi, è calcolata come:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.2)$$

Nel caso in cui si conoscano anche le distribuzioni di frequenza del fenomeno si può calcolare la media aritmetica come:

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^K x_j n_j}{n} \quad (2.3)$$

dove K è il numero di modalità assunte dal carattere x , x_j rappresenta la j -esima modalità di x e n_j la corrispondente frequenza assoluta.

2.1.2 La varianza

In statistica la deviazione standard è un indicatore di dispersione di una distribuzione di valori. È anche detto scarto quadratico medio o scostamento quadratico medio ed è indicata con la lettera greca σ .

La formula della deviazione standard è:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}} \quad (2.4)$$

La deviazione standard al quadrato prende il nome di varianza. In una distribuzione di frequenze la deviazione standard si calcola moltiplicando il quadrato della differenza $(x_i - \mu)^2$ per la frequenza ϕ_i della modalità:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \phi_i (x_i - \mu)^2}{N}} \quad (2.5)$$

Approfondendo ancora la curva bimodale gaussiana è bene ricordare che, in statistica, la moda di una distribuzione di frequenza X è definibile come il valore che compare più frequentemente. Una distribuzione è unimodale se ammette un solo valore modale. La classe con la maggiore densità media, che corrisponde all'altezza dell'istogramma, è quella modale. Nel caso particolare della distribuzione normale la moda coincide con la media e la mediana.

2.2 La distribuzione bimodale e bimodale Gaussiana

La distribuzione bimodale è un caso particolare della distribuzione normale. Si parla di curva bimodale quando ammette due valori modali, trimodali se ne ha tre, ecc. La curva gaussiana che deriva dalle analisi granulometriche della polvere di caffè è quella bimodale: ossia due valori che compaiono entrambi con la frequenza massima nella data distribuzione.

L'equazione che descrive la distribuzione bimodale è:

$$p(z) = \frac{P_1}{(\sqrt{2\pi})\sigma_1} \cdot e^{-\frac{(z-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{P_2}{(\sqrt{2\pi})\sigma_2} \cdot e^{-\frac{(z-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (2.6)$$

dove μ_1 e σ_1^2 sono la media e la varianza della densità gaussiana di una classe di dati e μ_2 e σ_2^2 sono la media e la varianza di un'altra classe di dati.

2.3 Il threshold

Il threshold di cui si parlerà nei seguenti paragrafi nasce da un settore ben diverso rispetto a quello del caffè. Infatti le tecniche descritte vengono utilizzate per l'analisi delle immagini. Lo scopo in generale è quello di estrapolare da un'immagine l'oggetto dallo sfondo. Il threshold risulta essere proprio quella soglia tra le zone di luce e quelle di buio. Tutto ciò è però applicabile anche al caso della polvere del caffè. Come visto nelle figure descritte nel capitolo 1, ciascuna polvere setacciata e non, grazie alle analisi granulometriche mostrava un andamento bimodale. Il primo picco della curva, che è anche quello il più basso, è generalmente legato alle taglie più piccole della polvere di caffè analizzata. Il picco più alto invece descrive la percentuale volumetrica delle particelle con diametro maggiore. La ricerca del threshold dunque risulta essere in questo caso, la ricerca del punto di separazione tra i due picchi che chiameremo T . Tutti i punti (x,y) per cui si ha $f(x,y) > T$ sono gli andamenti delle particelle più piccoli presenti nella polvere; quelli tali per cui

$f(x,y) < T$ sono le percentuali volumetriche delle taglie più grandi della polvere. T è dunque detto il valore di threshold. Le tecniche che verranno descritte si occupano della ricerca del valore di T .

2.3.1 Il threshold adattivo con la tecnica iterativa

Un algoritmo di calcolo automatico del valore di T risulta essere composto da più passi. Di seguito si riportano le fasi del metodo.

1. Considerare una stima iniziale del valore di T ;
2. Suddividere la curva utilizzando T , si verranno quindi a formare due gruppi: G_1 e G_2 . Il primo prenderà in considerazione tutti i punti con delle taglie maggiori di T ; il secondo tutti i punti con delle taglie minori o uguali a T .
3. Calcolare i valori medi μ_1 e μ_2 della curva nelle rispettive regioni G_1 e G_2 .
4. Calcolare il nuovo valore di threshold come:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (\mu_1 + \mu_2) \quad (2.7)$$

5. Si ripete l'algoritmo dallo step 2 allo step 4 finchè il valore trovato di T è minore del parametro predefinito T_0 .

Come decifrare poi i risultati dell'algoritmo?

Quando il primo picco e il secondo occupano due aree della curva pressochè simili, allora un buon valor iniziale per T è la media delle taglie della curva. Lo stesso non si può dire nel caso in cui il primo picco sia più piccolo rispetto all'area occupata dal secondo picco o viceversa. In quest'ultimo caso, un valore appropriato iniziale per T può essere la media tra il massimo e il minimo della curva.

Il parametro T_0 è utilizzato per stoppare l'algoritmo.

2.3.2 Thresholding adattivo di base

Non tutte le curve si adattano ad ogni tipo di operazione; alcune possono presentare delle difficoltà. Una di queste è che potrebbero non essere rappresentate da un valore di threshold globale. Un metodo per operare in questi casi è quello di suddividere lo spazio occupato dalla curva in sottospazi e utilizzare diversi threshold per separarle.

Per attuare ciò è importante sapere come suddividere curva e come stimare il valore di threshold per ogni sottospazio. L'immagine in figura 2.2 fornisce un esempio di quanto descritto sopra applicato però all'analisi dell'immagine. L'immagine ini-

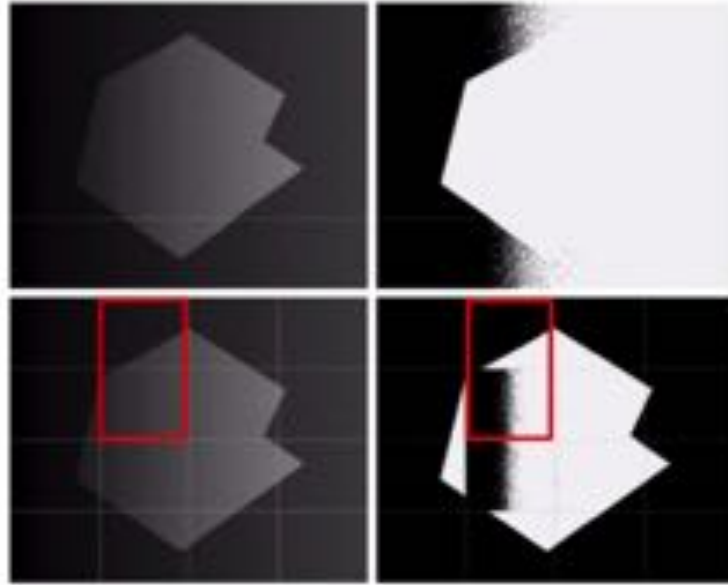


Figura 2.2: Fasi di ricerca del threshold.

ziale presenta numerose aree in cui non vi è una separazione netta tra lo sfondo e l'oggetto. Ecco dunque che la figura viene suddivisa in più parti e ciascuna di esse viene analizzata come un'immagine a sé. Lo stesso procedimento è applicabile anche alle curve, suddividendo l'area da essa occupata in sottoaree andando quindi alla ricerca del valore di threshold.

2.3.3 Threshold adattivo calcolato con la bimodale gaussiana

Supponiamo ora che una curva contenga solo due taglie. Chiamiamo z tutte le taglie disposte sull'asse delle x . L'istogramma considerato in relazione all'immagine può essere interpretato come una stima della densità di probabilità: $p(z)$. Essa risulta essere la somma di due densità, una per il primo picco e una per il secondo picco. Una volta che si ha la densità di probabilità è possibile ricavare il valore T come threshold.

Considerando un grafico in cui vi sono due densità di probabilità è possibile descrivere $p(z)$ come nella formula [2.8](#)

$$p(z) = P_1 p_1(z) + P_2 p_2(z) \quad (2.8)$$

Con P_1 e P_2 si indica la probabilità di occorrenza di due classi di dati. Nello specifico P_1 è la probabilità che una taglia con valore z appartenga al primo picco; P_2 è invece la probabilità che una taglia appartenga al secondo picco. L'immagine in Figura 2.3 mostra il caso generale di due curve non gaussiane. Si ricorda però

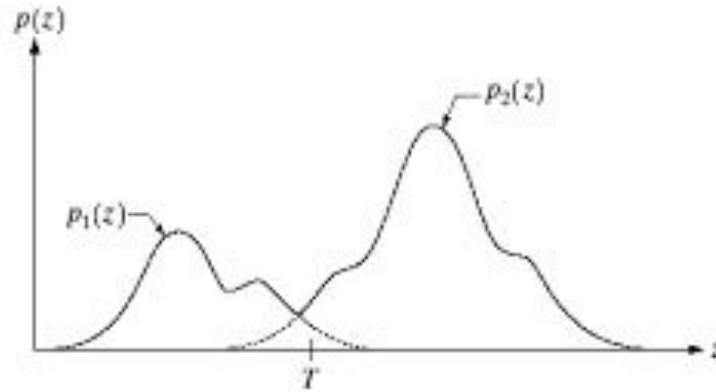


Figura 2.3: Funzione di densità di probabilità.

che la teoria sopra descritta è applicata a delle curve con andamenti gaussiani. Assumendo che ciascun dato appartenga ad uno dei due picchi si ha la seguente relazione:

$$P_1 + P_2 = 1 \quad (2.9)$$

Analizzando la Figura 2.3 è possibile considerare tutte le taglie con una percentuale volumetrica superiore a T come appartenenti al secondo picco mentre tutti quelli restanti, appartenenti al primo picco. L'obiettivo principale di questa analisi è quello di calcolare il valore di T che minimizza l'errore medio di suddivisione dei dati in primo picco (fini) e secondo picco (grandi).

Ricordiamo che la probabilità che una variabile casuale abbia un valore nell'intervallo $[a, b]$ è l'integrale della sua funzione di densità di probabilità da a a b , che è l'area della funzione di densità di probabilità tra questi due limiti. Pertanto, la probabilità di classificare erroneamente un punto a destra di T come punto a sinistra di T è:

$$E_1(T) = \int_{-\infty}^T p_2(z) dz \quad (2.10)$$

Mentre la probabilità di classificare erroneamente un punto a sinistra di T come punto a destra di T è:

$$E_2(T) = \int_T^{+\infty} p_1(z) dz \quad (2.11)$$

È possibile quindi descrivere l'errore totale $E(T)$ come:

$$E(T) = P_2 E_1(T) + P_1 E_2(T) \quad (2.12)$$

Da notare come le quantità E_1 ed E_2 sono ponderate dalla probabilità di occlusione di taglie fini o grandi. Si noti inoltre che i pedici sono opposti; questo è semplice da spiegare. Si consideri, ad esempio, il caso estremo in cui è noto che non si verificano mai taglie grandi, in questo caso $P_2 = 0$. Il contributo all'errore generale

E della classificazione di un punto dei grandi come punto dei fini E_1 dovrebbe essere azzerato perché si sa che non si verificano mai punti di destra. Se è probabile che si verifichino ugualmente punti sia nel picco di destra che in quello di sinistra, i pesi sono $P_1 = P_2 = 0,5$. Per trovare il valore di soglia per il quale questo errore è minimo è necessario differenziare $E(T)$ rispetto a T , usando la regola di Leibniz ed equiparare il risultato a 0.

Il risultato è:

$$P_1 p_1(T) = P_2 p_2(T) \quad (2.13)$$

Questa equazione è risolta affinché T trovi la soglia ottimale. Si noti che se $P_1 = P_2$, la soglia ottimale è dove le curve per $p_1(z)$ e $p_2(z)$ intersecano la figura. Per ottenere un'espressione analitica per T è necessario conoscere l'equazione per le due funzioni di densità di probabilità. Stimare queste densità in pratica, non è sempre fattibile e un approccio spesso utilizzato è quello di utilizzare densità i cui parametri sono ragionevolmente semplici da ottenere. Dall'equazione [2.6](#) i parametri risultano essere $P_1, P_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$.

2.3.4 Ricerca del valore di Thresholding

Ottenuti i parametri richiesti per ricavare il valore di threshold (T) è sufficiente risolvere l'equazione:

$$AT^2 + BT + C = 0 \quad (2.14)$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \\ B &= 2(\mu_1 \sigma_2^2 - \mu_2 \sigma_1^2) \\ C &= \sigma_1^2 \mu_2^2 - \sigma_2^2 \mu_1^2 + 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 \ln\left(\frac{\sigma_2^2 P_1}{\sigma_1 P_2}\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.4 Applicazione della tecnica di thresholding adattivo calcolato con la bimodale gaussiana

Quanto descritto nei paragrafi 2.3.1 e 2.3.2 si tratta di un breve accenno a quello che è la teoria dell'analisi dell'immagine applicata al caffè. La bimodale gaussiana infatti è espressione di più realtà tra cui quella della polvere di caffè. Ric conducendo quanto detto sopra al caso dell'esperimento effettuato per il calcolo della porosità, è bene notare che non si è a conoscenza dei parametri della funzione densità di probabilità. I dati a disposizione per la polvere di caffè sono:

1. Le taglie delle particelle della polvere di caffè;

2. la percentuale volumetrica nel campione di ciascuna taglia.

Elementi come le medie, le varianze, P_1 e P_2 non sono disponibili direttamente dalle analisi granulometriche.

Ecco dunque che partendo dalla formula [2.6](#) è possibile estrapolare la media, la varianza, P_1 e P_2 della bimodale gaussiana ottenuta dalle analisi granulometriche della polvere di caffè. Il risultati delle polveri del campione G, del campione M, del campione F e della polvere non setacciata mostrano delle curve che permettono di calcolare vari fattori.

Gli elenchi dei dati delle taglie per ciascun campione con le relative percentuali volumetriche sono riportati nella Tabella [A.1](#) in Appendice A. Per il calcolo dei parametri sopra elencati nel caso della bimodale ottenuta dall'esperimento si utilizzerà un metodo chiamato metodo dei minimi quadrati. Esso consiste nel minimizzare lo scarto quadratico al variare dei parametri:

$$\sum (p(x_i) - y_i)^2 \quad (2.16)$$

Analizzando le parti che compongono la formula [2.16](#), con $p(x_i)$ si intende il valore ottenuto sostituendo alla formula [2.6](#) tutte le taglie; con y_i viene indicata invece la percentuale volumetrica relativa a ciascuna taglia. Per la minimizzazione della funzione si fa ricorso all'implementazione in Matlab. Il codice utilizzato per il calcolo dei parametri richiesti risulta essere:

```
clear
close all
file = 'input.xlsx';

data = xlsread(file,'Foglio1');
data(1,:) = [];

x = log(data(1:101,1)); % size
p1 = data(1:101,3);    % fini
p2 = data(1:101,2);    % grandi
p3 = data(1:101,9);    % non setacciato
mv = data(1:101,5);    % misto vero

gp1 = fit(x,p1,'gauss2');
gp1Value = gp1(x);

fo = fitoptions('gauss2','Lower',[-inf -inf 0 -inf -inf 0],'Upper',...
```

```
[inf 4 inf inf inf inf]);
gp2 = fit(x,p2,'gauss2',fo);
gp2Value = gp2(x);

gp3 = fit(x,p3,'gauss2');
gp3Value = gp3(x);

gmv = fit(x,mv,'gauss2');
gmvValue = gmv(x); % misto fittato

figure() %Figura della curva dei fini standard e dei grandi standard
hold on
plot(x,p1,'k');
plot(x,p2,'b');
hold off

figure() %Figura della curva dei fini standard e fittata
hold on
plot(x,p1);
plot(x,gp1Value,'b--');
hold off

figure() %Figura della curva dei grandi standard e fittata
hold on
plot(x,p2,'r');
plot(x,gp2Value,'k--');
hold off

figure() %Figura della curva delle polvere non setacciata standard e fittata
hold on
plot(x,p3,'b')
plot(x,gp3Value,'b--');
hold off

figure() %Figura della curva del misto standard e fittata
plot(x,mv,'Linewidth',3);
hold on
plot(x,gmvValue,'r--','Linewidth',3);
hold off
```

`return`

Inizialmente viene richiamato il file `input.xlsx`, al cui interno sono riportati i dati granulometrici delle tre polveri utilizzate e della polvere prima della setacciatura. Viene chiesto al compilatore di leggere il file. Le variabili sono così definite:

Variabile	Descrizione
x	Taglie delle particelle di tutte le polveri
p1	% volumetriche campione F
p2	% volumetriche campione G
mv	% volumetriche campione M
p3	% volumetriche campione non setacciato

Tabella 2.1: Variabili utilizzate nell'implementazione.

Il codice riportato sopra mostra il metodo dei minimi quadrati sviluppato mediante il compilatore Matlab; esso infatti fa uso della funzione matematica `fit`. Questa funzione permette di fittare, appunto, una curva ponendo in input le `x`, le `y` e la tipologia di curva che ci si aspetta. Ad esempio, nel caso specifico della polvere con particelle di dimensioni < 500 micron viene fittata la curva dei fini prendendo in input le `size`, le percentuali volumetriche relative e utilizzando un modello gaussiano bimodale ('`gauss2`'). Utilizzando come riferimento `gauss2` Matlab lavora con la seguente funzione:

$$p(x) = a_1 \cdot e^{-\frac{(x-b_1)^2}{c_1^2}} + a_2 \cdot e^{-\frac{(x-b_2)^2}{c_2^2}} \quad (2.17)$$

E' necessario eseguire le seguenti sostituzioni qui sotto proposte per riottenere la funzione [2.6](#):

$$\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{\pi} \cdot \sigma_1 \cdot a_1 \\ P_2 &= \sqrt{\pi} \cdot \sigma_2 \cdot a_2 \\ \sigma_1 &= \frac{c_1}{\sqrt{2}} \\ \sigma_2 &= \frac{c_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Per quanto riguarda la stampa delle figure, in [Figura 2.4](#) vengono presentati i grafici delle curve delle particelle fini, delle particelle grandi e del misto, rispettivamente in nero, in blu e in verde.

In [Figura 2.5](#) sono stampati i grafici della curva delle particelle fini e del suo fit. Il fit è caratterizzato dalla linea tratteggiata. I grafici della curva delle particelle grandi e del suo fit con linea tratteggiata sono invece presenti in [2.6](#). Nella figura

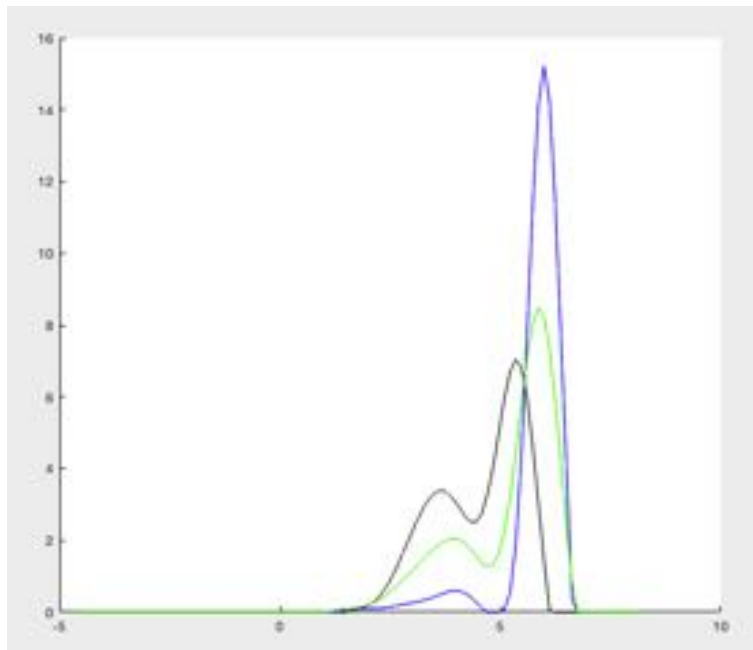


Figura 2.4: Grafico della curva dei fini, dei grandi e del misto.

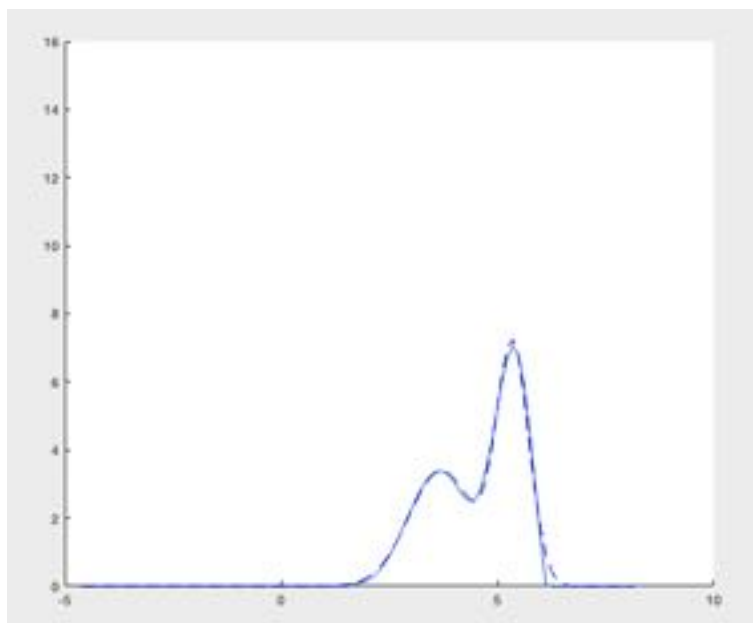


Figura 2.5: Grafico della curva dei fini e della curva fittata.

[2.7](#) troviamo i grafici della curva della polvere iniziale non setacciata e del suo fit. Nell'immagine [2.8](#) sono stampati i grafici della curva della polvere mista con la relativa curva fittata.

Il compilatore restituisce in uscita i valori di P_1 , μ_1 , σ_1 , P_2 , μ_2 e σ_2 . Per ciascuna polvere sono riportati i risultati.

Il metodo implementato in Matlab per risolvere l'equazione di secondo grado risulta essere costituito dalla funzione findT603 descritta nel codice e dalla stampa dei risultati.

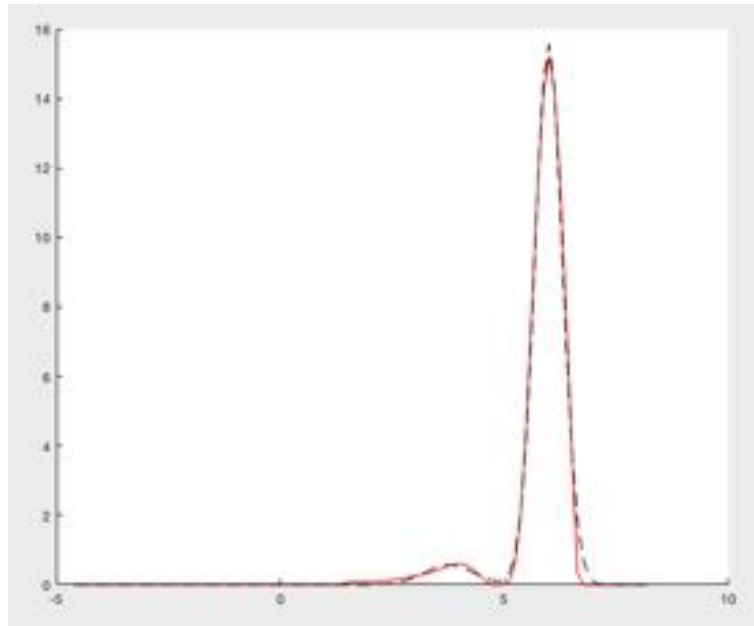


Figura 2.6: Grafico della curva dei grandi e della curva fittatai.

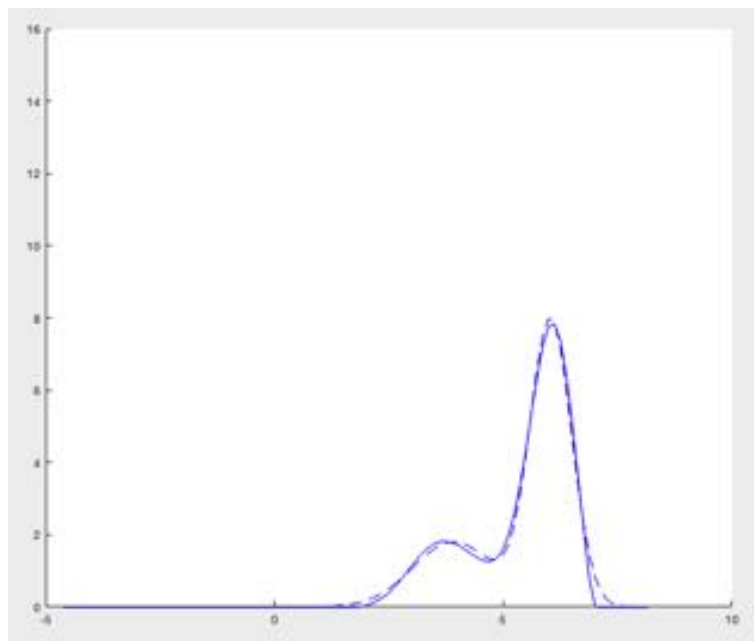


Figura 2.7: Grafico della curva della polvere non setacciata e della curva fittata.

```
function info = findT603(gp)
%FINDT603
P1 = sqrt(pi)*gp.c1 *gp.a1;
P2 = sqrt(pi)*gp.c2 *gp.a2;
s1 = gp.c1/sqrt(2);
s2 = gp.c2/sqrt(2);
mu2 = gp.b2;
mu1 = gp.b1;
```

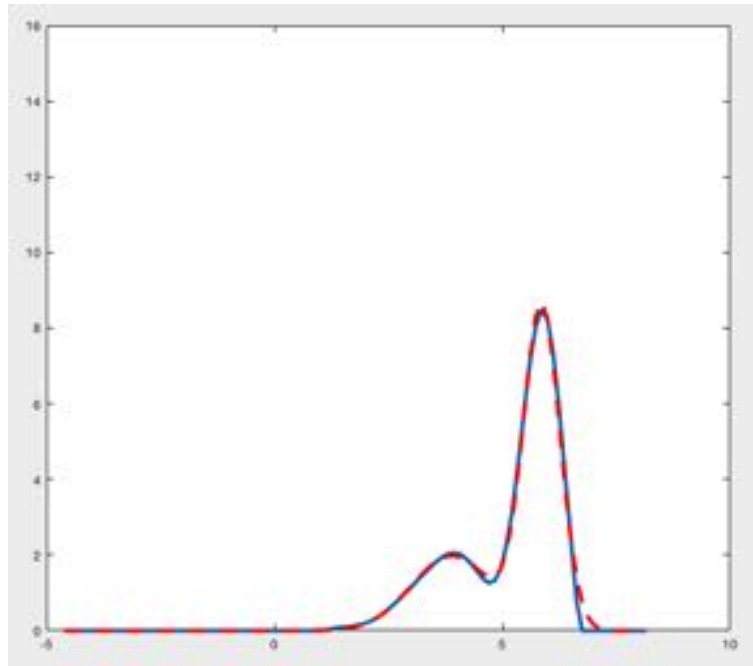


Figura 2.8: Grafico della curva della polvere mista e della curva fittata.

Parametri	Campione G	Campione M	Campione F	Campione no set.
P_1	0,79	4,34	6,41	4,04
μ_1	3,76	3,90	3,71	3,92
σ_1	0,55	0,88	0,75	0,90
P_2	12,12	8,58	6,56	9,01
μ_2	5,99	5,87	5,35	6,04
σ_2	0,31	0,40	0,38	0,45

Tabella 2.2: Tabella dei parametri.

```

if mu1 > mu2 % allora scambio
tmp = mu1;
mu1 = mu2;
mu2 = tmp;

tmp = s1;
s1 = s2;
s2 = tmp;

tmp = P1;
P1 = P2;
P2 = tmp;
end

```

```
A = s1^2 - s2^2;
B = 2*((mu1)*(s2)^2 - (mu2)*(s1)^2);
C = (((s1)^2)*((mu2)^2))-(((s2)^2)*((mu1)^2))+(2*((s1)^2)*((s2)^2)*log(((s2)^2)*(P
coeff = [A B C];
T = roots(coeff);
T = T(T>mu1 & T < mu2);

info.P1 = P1;
info.m1 = mu1;
info.s1 = s1;
info.P2 = P2;
info.m2 = mu2;
info.s2 = s2;
info.T = T;
end

info1 = findT603(gp1);
info2 = findT603(gp2);
info3 = findT603(gp3);
infomv = findT603(gmv);
```

I risultati ottenuti per il valore di threshold per ciascun tipo di polvere sono:

```
T1: 4.5431; %Valore di threshold per i fini
T2: 4.8678; %Valore di threshold per i grandi
T3: 4.9440; %Valore di threshold per la polvere non setacciata
Tmv: 4.8825. %Valore di threshold per la polvere mista
```

2.5 Applicazione della tecnica di threshold adattivo iterativo

In questa sezione verrà approfondito quanto analizzato nel paragrafo 2.2. Utilizzando i dati forniti dalle analisi sulla polvere del caffè si otterranno quindi dei valori di threshold. Il metodo, implementato in Matlab è costituito dalle funzioni findT e my_wmean.

```
function output = findT(x,y)
T = 5;
tsigma = 0.01;
```

```

err = 1;

while err > tsigma
xmu1 = x(x<=T);
mu1 = my_wmean(xmu1,y(x<=T));
xmu2 = x(x>T);
mu2 = my_wmean(xmu2,y(x>T));
Tn = 0.5*mu1 + 0.5* mu2;
err = abs(T-Tn);
T = Tn;
end

output = T;
end

function output = my_wmean(x,w)
tmp = x.*w;          % si moltiplicano tutte le taglie per i propri pesi;
output = sum(tmp)./sum(w);      % si calcola la media pesata;
end

```

Successivamente si avrà come istruzione per il calcolo del threshold

```

Tfini = findT(x,p1);          %valore di T per i fini;
Tgrandi = findT(x,p2);       %valore di T per i grandi;
Tnos = findT(x,p3);          %valore di T per la polvere non setacciata;
Tm = findT(x,mv);            %valore di T per il misto;

```

Rispettivamente i risultati stampati sono:

```

Tf = 4.3663;                  %valore di T per i fini;
Tg = 4.7290;                  %valore di T per i grandi;
Tnos = 4.8654;                %valore di T per la polvere non setacciata;
Tm = 4.7171;                  %valore di T per il misto;

```

Il metodo permette quindi di calcolare in maniera analitica il threshold di ciascuna funzione. Un controllo che è possibile fare è quello di confrontare i minimi delle curve con i thresholds ottenuti. Osservando i grafici in Figura [1.1](#), [1.6](#), [1.7](#) e [1.8](#) è possibile notare infatti che i minimi di ciascuna curva assumono dei valori vicini ai threshold estrapolati mediante il metodo.

Capitolo 3

Il packing di sfere mono e multidimensionali

3.1 Porosità e packing di sfere

Forniamo ora qualche informazione in più sulla porosità. Come già detto essa è definibile come il rapporto tra il volume degli spazi vuoti e il volume totale, il cui valore è compreso tra 0 e 1 oppure, esprimendolo in percentuale, tra 0% e 100%. La porosità, così definita, non ha legami con le dimensioni dei pori e la loro distribuzione. Il valore massimo di porosità per un materiale i cui grani hanno dimensioni simili ad una sfera e sono distribuiti in maniera uniforme è pari a 0,4764. Questo valore non è dipendente dai grani. Nello studio della porosità è possibile classificare i vari agglomerati in base alla loro forma e trovare di essi il valore di porosità. Queste misure sono facilmente calcolabili, ad esempio nel

Forma degli agglomerati	Porosità
Random	$\geq 0,399$
Cubo	0,476
Esagono	0,395
Ortorombo	0,395
Romboedro	0,260
Tetragono	0,302
Triclino	0,260

Tabella 3.1: Porosità delle varie forme

caso di pacchetti di forma cubica dove si possono trovare delle sfere di raggio r che occupano una unità di lunghezza pari a L che approssimano l'agglomerato. Il volume quindi del cubo sarà pari a L^3 .

Il numero delle sfere risulta essere $n = (L/2r)^3$.

Il volume di tutte le sfere sarà uguale a:

$$V_{sfere} = (4n\pi r^3/3) = (L/2r)^3 (4n\pi r^3/3) = (\pi L^3)/6.$$

Ottenuti questi dati è possibile dunque calcolare la porosità:

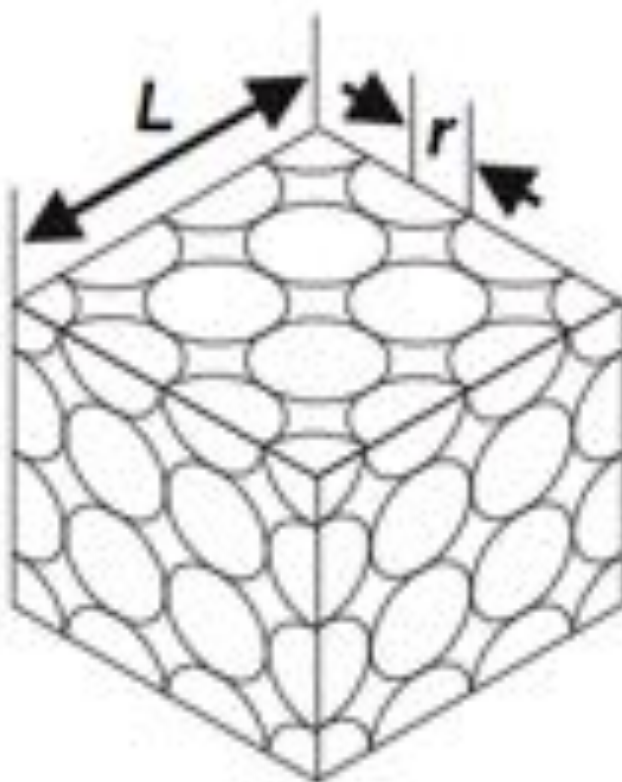


Figura 3.1: Cubo approssimato da sfere

$$\phi = \frac{L^3 - (\pi L^3/6)}{L^3} = (1 - \pi/6) = 0,4764 \quad (3.1)$$

La porosità di equilibrio di un materiale poroso composto da un pacchetto casuale di grani sferici è dipendente dalla stabilità data al materiale da forze di attrito e di coesione che operano tra i grani individuali. Queste forze sono proporzionali alla superficie esposta dei grani. Nello specifico, la superficie del grano esposta per unità di volume solido è inversamente proporzionale al diametro del grano. Ciò indica che, quando tutti gli altri fattori sono uguali, un determinato peso di grani grossolani sarà stabilizzato con una porosità inferiore rispetto allo stesso peso dei grani più fini. Si può vedere che l'aumento della porosità diventa significativo solo con granulometrie molto basse. Man mano che la granulometria aumenta, le forze di attrito diminuiscono e la porosità diminuisce fino a raggiungere un limite che rappresenta un impacchettamento casuale senza attrito, che si verifica con una porosità di 0,399 ed è indipendente dal diametro del grano. Non è possibile alcuna

ulteriore perdita di porosità per le sfere impacchettate casualmente, a meno che i grani non subiscano deformazioni irreversibili a causa della ricristallizzazione di dissoluzione o di fratture.

La polvere di caffè contiene una distribuzione delle dimensioni dei grani che risulta essere spesso multimodale. Infatti come detto in precedenza ci sono delle particelle grandi ed altre fini. Il modo migliore per comprendere l'effetto è considerare la miscela variabile di grani di due dimensioni. La porosità della miscela di granulometrie è inferiore a quella del 100% per ogni dimensione. Ci sono due meccanismi al lavoro in questa fase. Inizialmente si immagina una polvere con due granulometrie, una delle quali ha 1/100 del diametro dell'altro. Il primo meccanismo si applica quando ci sono sufficienti grani più grandi per formare l'ampio scheletro della matrice polverosa. Qui, l'aggiunta delle particelle più piccole riduce la porosità della polvere perché possono adattarsi agli interstizi tra le particelle più grandi. Il secondo meccanismo è valido quando l'ampio scheletro della matrice polverosa è composto principalmente da grani di piccole dimensioni. I grani piccoli avranno uno spazio dei pori tra loro. Chiaramente, se un certo volume di questi grani viene rimosso e sostituito con un singolo granello solido più grande, la porosità verrà ridotta perché sia i grani piccoli che la porosità associata sono stati sostituiti con materiale solido.

La porosità è anche controllata da una vasta gamma di processi secondari che si traducono in compattazione e dilatazione. Questi possono essere classificati in processi meccanici, come la compattazione delle sollecitazioni, la deformazione, l'evoluzione della frattura ecc. e in processi chimici, come la riduzioni di volume dovuti a cambiamenti strutturali.

3.2 Packing di sfere monodimensionali

Una tecnica utilizzata per ottenere la massima densità di un materiale o in questo caso della polvere di caffè può essere quello di "impacchettare" in maniera regolare delle sfere monodimensionali.

Per semplicità, si modellano le nanoparticelle come sfere. La congettura di Keplero (1611) afferma che, la più alta densità di impacchettamento delle sfere monodimensionali nello spazio 3-dim è:

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0,74048 \quad (3.2)$$

Se aggiungiamo sfere più piccole per occupare i posti liberi lasciati dal precedente

impacchettamento, possiamo aumentare ulteriormente la densità. Se aumentiamo dunque il rapporto tra le due dimensioni delle sfere, possiamo ottenere la seguente densità:

$$1 - \left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{18}}\right)^2 \approx 0,93265 \quad (3.3)$$

Nell'applicazione, le nanoparticelle sono impacchettate casualmente e la densità sarà inferiore rispetto al normale impacchettamento. In letteratura, ci sono due distinti agglomerati casuali quando si impacchettano degli oggetti in un contenitore:

- Imballaggio a chiusura casuale: sottoporre a movimento il contenitore dopo un impacchettamento casuale;
- Imballaggio sfuso casuale: non viene dato alcun movimento al contenitore.

Per quanto riguarda la prima tecnica, nel 1969 la densità approssimativa di 0,64 di pacchetti chiusi in maniera casuale di sfere mono-dimensionali è stata ottenuta dall'esperimento di impacchettamento di sfere di acciaio in un contenitore e scuotendo il contenitore.

Passando invece alla seconda tecnica, esistono diverse definizioni, in base a come impacchettate le sfere in modo casuale. Viene posizionato il centro di una nuova sfera nel punto la cui coordinata z è la più bassa tra i punti in cui nuove sfere toccano le vecchie tre sfere. Un esperimento riguardo questa tecnica può essere il seguente: si impacchettano sfere di raggio 0,02 in un contenitore $2 \times 2 \times 2$ chiamato C avente una base di forma casuale. Il numero di sfere nei pacchetti sono: 126856. La media della densità di impacchettamento intorno al centro di C è 0.604. La distribuzione della densità attorno a ∂C è un fattore da prendere in considerazione in questa operazione. Si può stimare, una perdita nei bordi di C , in media dovrebbe essere sottratto il 30% del raggio delle sfere. Indichiamo con V il volume di un contenitore C e con B la superficie di C . Chiamiamo densità limite di C la seguente formula:

$$\beta(C) = \frac{B}{V} \quad (3.4)$$

Se C è un cubo con la lunghezza dei lati pari a d , allora

$$\beta(Cubo) = \frac{6}{d} \quad (3.5)$$

Pertanto, β può essere un qualsiasi numero reale positivo.

Se C è una sfera con raggio r , allora

$$\beta(\text{Sfera}) = \frac{3}{r} \quad (3.6)$$

Questo è il parametro importante quando si approssima la densità di impacchettamento in un contenitore C .

Supponiamo ora di occupare un contenitore C con sfere di raggio identico r . Dall'esperimento, come detto sopra, possiamo approssimare l'influenza di ∂C come una perdita pari a $0,3r$ o una riduzione del volume di $0,3Br$. Pertanto, la densità totale dopo un imballaggio sfuso casuale di sfere con raggio r può essere definita come:

$$0,604 \frac{(V - 0,3Br)}{V} = 0,604 - 0,1812\beta r \quad (3.7)$$

3.3 Packing di sfere multidimensionali

Impacchettiamo ora un contenitore C con sfere di due dimensioni con raggi $r_1 > r_2$. Innanzitutto, si inizia operando con le sfere di grandi dimensioni con raggio r_1 . Il volume totale di sfere di grandi dimensioni è:

$$(0,604 - 0,1812r_1) V \quad (3.8)$$

La superficie totale delle sfere grandi è invece:

$$(0,604 - 0,1812\beta r_1) V \frac{3}{r_1} \quad (3.9)$$

Consideriamo lo spazio rimanente C_1 del contenitore.

Il volume risulta essere:

$$V_1 = V - (0,604 - 0,1812\beta r_1) V \quad (3.10)$$

La superficie è espressa come:

$$B_1 = B + (0,604 - 0,1812\beta r_1) V \frac{3}{r_1} \quad (3.11)$$

Ora se si impacchettano piccole sfere di raggio r_2 nello spazio rimanente C_1 , allora il volume totale sarà:

$$0,604(V_1 - 0,3B_1 r_2) \quad (3.12)$$

La densità totale dopo aver impacchettato casualmente sfere di raggio $r_1 > r_2$ è:

$$0,843184 - 0,0717552\beta r_1 - 0,0826997\beta r_2 - 0,328334 \frac{r_2}{r_1} \quad (3.13)$$

Più grande è il rapporto tra due dimensioni, maggiore sarà la densità ottenuta. Possiamo supporre che le dimensioni ridotte del raggio r_2 siano fisse. Il problema è quindi capire quanto ampio possa essere r_1 per soddisfare la massima densità nei pori. L'equazione che segue esprime r_1 in funzione di β e r_2 :

$$r_1 = 2,14 \frac{r_2}{\beta} \quad (3.14)$$

Chiamando C un cilindro molto lungo con la base quadrata 2×2 e $\beta = 2$ ed utilizzando sfere con $0,05 < r_1 < 0,5$ e $r_2 = 0,02$, la densità totale risulta massimizzata quando, applicando l'equazione 3.14 si ha $r_1 = 2,14 \sqrt{\frac{0,02}{2}} = 0,214$. Si utilizzano così 205 sfere grandi. La densità totale è invece massimizzata quando $r_1 = 2,14 \sqrt{\frac{0,02}{2}} = 0,214$ con l'utilizzo di 124393 sfere piccole.

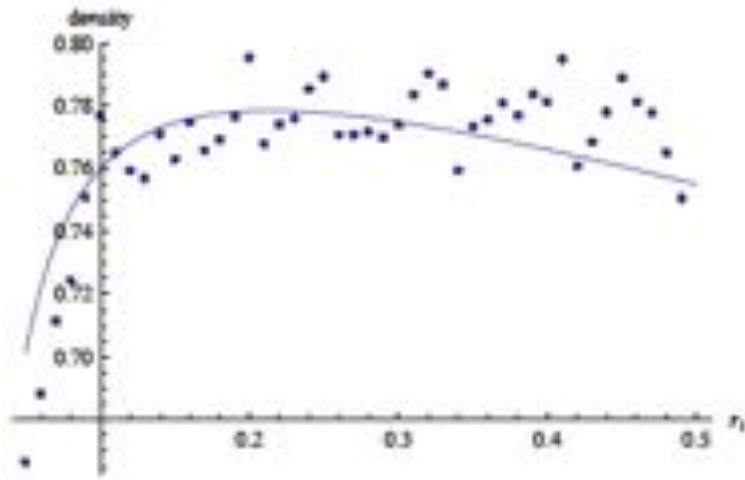


Figura 3.2: Grafico descrittivo dei dati ottenuti

Possiamo ora considerare la curvatura media e la curvatura gaussiana dei contenitori:

$$\gamma(C) = \frac{1}{V} \int_{\partial(C)} \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (3.15)$$

$$\delta(C) = \frac{3}{V} \int_{\partial(C)} (k_1 k_2) \quad (3.16)$$

Nel caso delle sfere monodimensionali si ha come approssimazione la seguente espressione:

$$0,604 - 0,181\beta r + 0,0544\delta r^2 - 0,0163\gamma r^3 \quad (3.17)$$

Nel caso di sfere bidimensionali invece:

$$\begin{aligned}
& 0,843 - 0,328 \frac{r_2}{r_1} - 0,0985 \frac{r_2^2}{r_1^2} - 0,00985 \frac{r_2^3}{r_1^3} + \\
& \beta(-0,07176r_1 - 0,0827r_2 + 0,0296 \frac{r_2^2}{r_1^2} + 0,00296 \frac{r_2^3}{r_1^2}) + \\
& \delta(-0,00646r_1^3 + 0,00887r_1^2r_2 + 0,00266r_1r_2^2 - 0,016r_3^3) + \\
& \gamma(0,0215r_1^2 - 0,0296r_1r_2 + 0,0455r_2^2 - 0,000887 \frac{r_2^3}{r_1})
\end{aligned} \tag{3.18}$$

E' stato dunque trovata una semplice relazione approssimativa per le due dimensioni di sfere, che forniscono la massima densità nella sfere multi-dimensione, per il problema di impacchettamento in un contenitore C usando solo il parametro $\beta = \frac{B}{V}$.

3.4 Le ultime ricerche

Dei ricercatori hanno dimostrato che due disposizioni altamente simmetriche racchiudono insieme sfere nel modo più denso possibile. I matematici studiano le confezioni di sfere almeno dal 1611, quando Johannes Keplero ipotizzò che il modo più denso di mettere insieme sfere di diametro uguali nello spazio fosse l'accumulo piramidale. Nonostante l'apparente semplicità, il problema non è stato risolto fino al 1998, quando Thomas Hales, dell'Università di Pittsburgh, ha finalmente dimostrato la congettura di Keplero in 250 pagine di argomenti matematici combinati a calcoli al computer. Le confezioni di sfere di dimensioni superiori sono difficili da visualizzare, ma sono oggetti pratici. Gli impacchettamenti di sfere dense sono correlati ai codici di correzione degli errori utilizzati dai telefoni cellulari, dalle sonde spaziali e dai segnali internet inviati mediante canali rumorosi. Una sfera ad alta dimensione è facile da definire: è semplicemente l'insieme di punti nello spazio ad alta dimensione a una distanza fissata da un determinato punto centrale. Trovare la migliore tecnica per agglomerare sfere di uguale diametro in uno spazio ad alta dimensione è ancora più complicato del caso tridimensionale risolto da Hales, poiché ogni dimensione aggiunta significa più possibili pacchetti da considerare. Due dimensioni sono però speciali: nelle dimensioni 8 e 24, esistono impacchettamenti di sfere simmetriche chiamati Eg e il reticolo di Leech, rispettivamente, che imballano le sfere meglio dei metodi noti ai matematici utilizzati per altre dimensioni.

Appendice A

Tabelle dei dati granulometrici delle polveri

Taglie delle particelle (in μm)	% volum. campioneG	% volume. campioneM	% volum. campioneF	% volum. campione no set.
3,12	0	0,02	0	0
3,55	0	0,05	0	0
4,03	0,03	0,08	0	0
4,58	0,08	0,09	0	0
5,21	0,09	0,1	0,06	0
5,92	0,09	0,13	0,09	0
6,72	0,09	0,16	0,13	0,01
7,64	0,1	0,21	0,2	0,04
8,68	0,1	0,28	0,32	0,12
9,86	0,11	0,37	0,49	0,19
11,2	0,13	0,48	0,71	0,30
12,7	0,15	0,61	0,98	0,44
14,5	0,18	0,75	1,3	0,61
16,4	0,21	0,91	1,66	0,81
18,7	0,24	1,06	2,03	1,02
21,2	0,27	1,22	2,39	1,22
24,1	0,3	1,38	2,73	1,42
27,4	0,35	1,54	3,02	1,58
31,1	0,39	1,69	3,23	1,70
35,3	0,45	1,83	3,36	1,79
40,1	0,51	1,95	3,39	1,82
45,6	0,57	2,03	3,31	1,80

Taglie delle particelle (in μm)	% volum. campioneG	% volum. campioneM	% volum. campioneF	% volum. campione no set.
51,8	0,6	2,06	3,14	1,75
58,9	0,59	2,02	2,91	1,67
66,9	0,53	1,91	2,67	1,56
76	0,42	1,75	2,51	1,45
86,4	0,27	1,55	2,51	1,35
98,1	0,11	1,36	2,76	1,28
111	0	1,26	3,29	1,26
127	0	1,33	4,08	1,33
144	0	1,64	5,02	1,53
163	0,07	2,27	5,97	1,90
186	0,55	3,22	6,71	2,46
211	1,9	4,44	7,04	3,23
240	4,37	5,8	6,81	4,20
272	7,75	7,08	5,97	5,27
310	11,33	8,05	4,63	6,32
352	14,12	8,47	3,05	7,21
400	15,21	8,23	1,46	7,76
454	14,21	7,32	0,05	7,84
516	11,42	5,87	0	7,40
586	7,73	4,16	0	6,47
666	4,03	2,48	0	5,16
756	0,35	0,8	0	3,69
859	0	0	0	2,23
976	0	0	0	0,78
1110	0	0	0	0,01

Tabella A.1: Tabella delle taglie con le percentuali volumetriche.

Bibliografia

- [1] Jens Feder (1988) *Fractals*, Plenum Pub Corp
- [2] Britta Folmer (2017) *The craft and science of coffee*, Academic Press
- [3] Yamada, Kanno, Miyauchi (2009) *Multi-sized sphere packing*
- [4] Paul Glover *Petrophysics MSc Course Notes*
- [5] Erica Klarreich (2019) *Sphere Packing Solved in Higher Dimensions*
- [6] Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods *Digital Image Processing*, International Edition

Ringraziamenti

Per la stesura di questa tesi vorrei ringraziare il prof. Riccardo Piergallini per la cura e la pazienza con cui ha seguito l'evolversi del progetto.

Per il mio percorso vorrei ringraziare primi fra tutti i miei genitori, partecipanti attivi di questi tre anni pieni di studio, soddisfazioni e cadute. Grazie per avermi sostenuto con l'amore che solo voi sapete darmi.

Grazie a Sofia, perchè oltre ad essere la sorella più affettuosa che potessi mai avere e anche la persona senza la quale mi sentirei persa.

Un ringraziamento a Tommaso, che mi ha spronata a vivere lo studio con il giusto equilibrio tra leggerezza e responsabilità e mi ha accompagnato in questo percorso con pazienza.

Un pensiero speciale alle mie amiche di sempre: Benedetta, Giada, Mara e Tanya, punti fermi della mia vita, con le quali ho condiviso tutti i momenti più significativi della mia vita. Un ringraziamento anche a tutti gli amici del bar, un gruppo numeroso ma ciascuno importante per me.

Un grazie grande grande alla mie amiche camerti: Alessandra, Jessica, Moira, Monica e Sara. Senza di loro questo percorso non sarebbe stato lo stesso! E ai miei tutor: Elena e Dario. Devo loro un ringraziamento gigante, poichè sono stati guide per il mio percorso universitario ed anche per la mia crescita personale.

Grazie a tutta la "famiglia" per essermi stata vicino e in particolare a nonna Dina e a nonna Gianna che tifano per me da sempre.

Grazie, alla Fraternità Shekinah, una seconda famiglia che mi ha vista crescere e maturare. Un grazie speciale alle mie guide Padre Giuseppe, Letizia e Luca grazie di esistere!

Grazie a Dio, la sua presenza costante in questo percorso e non solo, ha permesso che scoprissi me stessa e quanto si può essere forti con Lui.