Espressioni numeriche

$1 \cdot 2 - 3\left(\left(4 - \frac{5}{6}\right)^{-7} - 8(9 + 10)^{11}\right)$ *# solo parentesi tonde per la priorità delle operazioni*

$$\frac{24990564071498715836918 54}{893871739} \quad \mathbf{(1.1)}$$

100! *# numeri interi di grandezza virtualmente arbitraria (quindi precisione "infinita" per i razionali)*

93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827\ **(1.2)**
23758251185210916864000000000000000000000000

$mul(2\,n, n = 1\,..50)$ *# prodotto dei numeri pari da 2 a 100*

34243224702511976248246432895208185975118675053719198827915654463488000000000000 **(1.3)**

$\frac{\%\%}{\%}$ *# il rapporto tra gli ultimi due output è un intero*

2725392139750729502980713245400918633290796330545803413734328823443106201171875 **(1.4)**

$ifactor(\%)$ *# questa è la sua fattorizzazione*

$(3)^{26}\,(5)^{12}\,(7)^{8}\,(11)^{5}\,(13)^{4}\,(17)^{3}\,(19)^{3}\,(23)^{2}\,(29)^{2}\,(31)^{2}\,(37)\,(41)\,(43)\,(47)\,(53)\,(59)\,(61)\,(67)\,(71)\,(73)\,(79)\,(83)\,(89)\,(97)$ **(1.5)**

$add\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{n}, n = 1\,..50\right)$ *# la 50esima somma parziale di una serie geometrica*

$$\frac{22204460492503130808472633361816406}{88817841970012523233890533447265625} \quad \mathbf{(1.6)}$$

$ifactor(\%)$ *# la fattorizzazione di interi si applica anche alle frazioni*

$$\frac{(2)\,(3)\,(11)\,(71)\,(101)\,(251)\,(401)\,(521)\,(50150933101)\,(9384251)\,(1901)}{(5)^{50}} \quad \mathbf{(1.7)}$$

$evalf(\mathbf{(1.6)}, 100)$ *# questo il valore della frazione sopra in forma decimale (float) con 100 cirfre significative*

0.2499999999999999999999999999999999971852502328934400000000000000000000000000000000000000000000000000 **(1.8)**

$evalf(\mathbf{(1.6)})$ *# questa la forma decimale con le 10 cifre significative di default*

$$0.2500000000 \tag{1.9}$$

$identify(\%)$ *# così si ottiene un'approssimazione razionale "ottimale" ...*

$$\frac{1}{4} \tag{1.10}$$

$sum\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n, n = 1 .. \infty\right)$ *# ... che coincide con la somma della serie calcolata in modo formale con l'operatore sum*

$$\frac{1}{4} \tag{1.11}$$

$\left(\sqrt{2}^5 - 2\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ *# anche i radicali sono trattati in modo formale*

$$\frac{8}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \tag{1.12}$$

$evalf(\%, 20)$

$$6.5319726474218082619 \tag{1.13}$$

$\frac{\%}{8}$

$$0.8164965809 \tag{1.14}$$

$\%^2$

$$0.6666666666 \tag{1.15}$$

$identify(\%)$

$$\frac{2}{3} \tag{1.16}$$

$\left(\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$ *# i prodotti e le potenze restano indicati*

$$\left(\sqrt{6} + \frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2 \tag{1.17}$$

expand(%)   # *così vengono svolti*

$$\frac{56}{9} + \frac{2}{3}\sqrt{6}\sqrt{2} \tag{1.18}$$

simplify(%)

$$\frac{56}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{3} \tag{1.19}$$

evalf(e, 100)   # *le prime 100 cifre decimali nel numero di Nepero* e

$$2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178525166427 \tag{1.20}$$

evalf(π, 100)   # *... e quelle di* π

$$3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117068 \tag{1.21}$$

sin(%)   # *seno di* π *calcolato in modo numerico*

$$-4.102067615\ 10^{-10} \tag{1.22}$$

identify(%)   # *non sempre l'operatore identify produce il risultato atteso*

$$-4.102067615\ 10^{-10} \tag{1.23}$$

fnormal(%)   # *fnormal identifica con zero i numeri con valore assoluto sufficientemente piccolo*

$$-0. \tag{1.24}$$

sin(π)   # *qui invece il seno di* π *è calcolato in modo simbolico*

$$0 \tag{1.25}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ # *anche questo è calcolato in modo simbolico*

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{1.26}$$

$\left(\frac{1}{2} - 3\,I\right)^4 - \frac{5}{6}\,I$ # *questo è un numero complesso (I è l'unità immaginaria)*

$$\frac{1081}{16} + \frac{155}{3}\,\mathrm{I} \tag{1.27}$$

evalf(%, 6)

$$67.5625 + 51.6667\,\mathrm{I} \tag{1.28}$$

$e^{\frac{2}{3}\pi I}$ *# questa è una radice cubica complessa dell'unità*

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3} \tag{1.29}$$

$\%^3$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^3 \tag{1.30}$$

$expand(\%)$

$$1 \tag{1.31}$$

$e^{\pi I}$ *# la relazione di Eulero*

$$-1 \tag{1.32}$$

Espressioni algebriche

$4x + 5x^2 + 6$ *# i termini di una somma algebrica non vengono autometicamente ordinati*

$$4x + 5x^2 + 6 \tag{2.1}$$

$sort(\%, x)$ *# così si possono ordinare*

$$5x^2 + 4x + 6 \tag{2.2}$$

$sort(\%, x, ascending)$ *# anche in ordine crescente*

$$6 + 4x + 5x^2 \tag{2.3}$$

$4x + 5x^2 + 6 = 5x^2 + 4x + 6$ *# questa uguaglianza resta indicata ...*

$$5x^2 + 4x + 6 = 5x^2 + 4x + 6 \tag{2.4}$$

$evalb(\%)$ *# ... ma valutandola come espressione booleana con evalb si ottiene che è un'identità*

$$true \tag{2.5}$$

$(1 + 2ax^2)^3 (x + y)^2$ *# anche nelle espressioni algebriche i prodotti e le potenze restano indicati*

$$\left(1+2\,a\,x^2\right)^3\,(x+y)^2 \tag{2.6}$$

expand(%) # così per vengono svolti ...

$$x^2+2\,x\,y+y^2+6\,a\,x^4+12\,a\,x^3\,y+6\,a\,x^2\,y^2+12\,a^2\,x^6+24\,a^2\,x^5\,y+12\,a^2\,x^4\,y^2+8\,a^3\,x^8+16\,a^3\,x^7\,y+8\,a^3\,x^6\,y^2 \tag{2.7}$$

factor(%) # ... è così si fattorizza (l'operatore di fattorizzazione non è lo stesso usato per gli interi)

$$\left(1+2\,a\,x^2\right)^3\,(x+y)^2 \tag{2.8}$$

factor$\left(x^4+x^2+1\right)$ # tutti i polinomi a coefficienti razionali vengono fattorizzati

$$\left(x^2+x+1\right)\,\left(x^2-x+1\right) \tag{2.9}$$

factor$\left(x^4-2\right)$ # questo è irriducibile sui razionali ...

$$x^4-2 \tag{2.10}$$

factor$\left(\%, \sqrt{2}\right)$ # ... ma si fattorizza in due polinomi irriducibili sull'estensione algebrica con $\sqrt{2}$

$$-\left(x^2+\sqrt{2}\right)\,\left(-x^2+\sqrt{2}\right) \tag{2.11}$$

factor$\left(\%\%, \sqrt[4]{2}\right)$ # ... in tre polinomi irriducibili sull'estensione algebrica con $\sqrt[4]{2}$

$$-\left(x^2+\sqrt{2}\right)\,\left(-x+2^{1/4}\right)\,\left(x+2^{1/4}\right) \tag{2.12}$$

factor$\left(\%\%\%, \left\{\sqrt[4]{2}, I\right\}\right)$ # e in quattro sull'estensione algebrica con $\sqrt[4]{2}$ e I (quindi sui complessi)

$$\left(-x+\mathrm{I}\,2^{1/4}\right)\,\left(x+\mathrm{I}\,2^{1/4}\right)\,\left(-x+2^{1/4}\right)\,\left(x+2^{1/4}\right) \tag{2.13}$$

expand(%)

$$x^4-2 \tag{2.14}$$

factor(%, *real*) # così si ottiene la fattorizzazione (numerica) sui reali

$$(x+1.18920711500272)\,(x-1.18920711500272)\,\left(x^2+1.414213562\right) \tag{2.15}$$

factor(%%, *complex*) # ... e così quella sui complessi

$$(x+1.18920711500272)\,(x+1.189207115\,\mathrm{I})\,(x-1.189207115\,\mathrm{I})\,(x-1.18920711500272) \tag{2.16}$$

identify(*evalf*(%, 9))

$$\left(x+2^{1/4}\right)\,\left(x+\mathrm{I}\,2^{1/4}\right)\,\left(x-\mathrm{I}\,2^{1/4}\right)\,\left(x-2^{1/4}\right) \tag{2.17}$$

$simplify\left(\frac{(x-1)^{16}-1}{x}\right)$ # *non a volte la semplificazione produce un effetto soddisfacente ...*

$$-16+120x-560x^2+1820x^3-4368x^4+8008x^5-11440x^6+12870x^7-11440x^8+8008x^9-4368x^{10}+1820x^{11}-560x^{12}+120x^{13}-16x^{14}+x^{15} \quad \textbf{(2.18)}$$

$\frac{factor(\% \cdot x+1)-1}{x}$ # *... e tornare indietro non è sempre semplice*

$$\frac{(x-1)^{16}-1}{x} \quad \textbf{(2.19)}$$

$\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$ # *radici e potenze vengono semplificate automaticamente ...*

$$a \quad \textbf{(2.20)}$$

$\sqrt[4]{a^4}$ # *... quando possibile*

$$\left(a^4\right)^{1/4} \quad \textbf{(2.21)}$$

$simplify(\%)$ # *questa semplificazione non è possibile senza assunzioni su a ...*

$$\left(a^4\right)^{1/4} \quad \textbf{(2.22)}$$

$simplify(\%\%)$ assuming $a>0$ # *... ma lo diventa assumendo a reale positivo ...*

$$a \quad \textbf{(2.23)}$$

$simplify(\%\%\%)$ assuming $a<0$ # *... o reale negativo*

$$-a \quad \textbf{(2.24)}$$

$\mathrm{Re}(a+b\,I)$ # *anche questa parte reale non si può determinare senza assunzioni su a e b*

$$\Re(a+\mathrm{I}\,b) \quad \textbf{(2.25)}$$

$expand(\%)$ # *anche espandendo si distribuisce soltanto*

$$\Re(a)-\Im(b) \quad \textbf{(2.26)}$$

$\%$ assuming $a :: real, b :: real$ # *ma se assumiamo a e b reali otteniamo ...*

$$a \quad \textbf{(2.27)}$$

$\%\%$ assuming $a :: imaginary, b :: imaginary$ # *mentre assumendoli immaginari si ha ...*

$$\mathrm{I}\,b \quad \textbf{(2.28)}$$

$\frac{1+(\sin(x)+\cos(x))^2}{1+\sin(x)\cos(x)}$ *# un'espressione algebrica contenente funzioni trascendenti*

$$\frac{1+(\sin(x)+\cos(x))^2}{1+\sin(x)\cos(x)} \tag{2.29}$$

expand(%) *# può essere comunque espansa ...*

$$\frac{1}{1+\sin(x)\cos(x)}+\frac{\sin(x)^2}{1+\sin(x)\cos(x)}+\frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\sin(x)\cos(x)}+\frac{\cos(x)^2}{1+\sin(x)\cos(x)} \tag{2.30}$$

factor(%) *# ... e fattorizzata come espressione razionale*

$$\frac{1+\sin(x)^2+2\sin(x)\cos(x)+\cos(x)^2}{1+\sin(x)\cos(x)} \tag{2.31}$$

simplify(%) *# mentre la semplificazione tiene conto anche delle proprietà delle funzioni trascendenti*

$$2 \tag{2.32}$$

Equazioni e sostituzioni

$2\,x=6\,a$ *# questa è un'equazione ...*

$$2\,x=6\,a \tag{3.1}$$

solve(%, *x*) *# ... possiamo risolverla rispetto a x*

$$3\,a \tag{3.2}$$

solve(%%, *a*) *# ... o rispetto ad a*

$$\frac{1}{3}\,x \tag{3.3}$$

solve($x=x$, *x*) *# questa vale per ogni x*

$$x \tag{3.4}$$

solve($e^{\log(x)}=x$, *x*) *# ... e anche questa*

$$x \tag{3.5}$$

solve($\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$, *x*) *# ... e questa*

$$x \tag{3.6}$$

$solve(x = x + 1, x)$ *# questa invece non ammette soluzioni*

$solve(x^2 = x + 1, x)$ *# mentre questa ne ha due (e vengono restituite come sequenza)*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad (3.7)$$

$a x^2 + b x + c = 0$ *# la generica equazione di secondo grado*

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad (3.8)$$

$solve(\%, x)$ *# ... e le sue soluzioni formali (senza condizioni sui coefficienti)*

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{a}, -\frac{1}{2}\,\frac{b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{a} \quad (3.9)$$

$\%[1]$ *# prendiamo la prima (tra quadre l'indice dell'elemento nella sequenza) ...*

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{a} \quad (3.10)$$

$subs(x = \%, \%\%\%)$ *# e sostituiamola nell'equazione*

$$\frac{1}{4}\,\frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\right)^2}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{b\left(-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\right)}{a} + c = 0 \quad (3.11)$$

$simplify(\%)$ *# semplificando si ottiene ...*

$$0 = 0 \quad (3.12)$$

$evalb(\%)$ *# ... e la verifica è fatta*

$$true \quad (3.13)$$

$(x + 1)^2 = (x - 2)^2 + 3$ *# nelle righe sotto questa equazione è risolta manipolandola con il menù popup*

$$(x + 1)^2 = (x - 2)^2 + 3 \quad (3.14)$$

$\xrightarrow{\text{manipulate equation}}$

$$x^2 + 2\,x + 1 = x^2 - 4\,x + 7 \quad (3.15)$$

$\xrightarrow{\text{subtract x^2-4*x from both sides}}$

$$6\,x + 1 = 7 \quad (3.16)$$

$\xrightarrow{\text{subtract 1 from both sides}}$

$$6\,x=6 \tag{3.17}$$

$\xrightarrow{\text{divide both sides by 6}}$

$$x=1 \tag{3.18}$$

$solve\left(x^2+4=0, x\right)$ *# questa equazione ammette due soluzioni complesse*

$$2\,\mathrm{I},\ -2\,\mathrm{I} \tag{3.19}$$

$solve\left(x^4+4=0, x\right)$ *# ... e questa quattro*

$$1-\mathrm{I},\ 1+\mathrm{I},\ -1-\mathrm{I},\ -1+\mathrm{I} \tag{3.20}$$

$solve\left(\mathrm{e}^x-2=0, x\right)$ *# un'equazione trascendente di cui si ottiene solo la soluzione principale (delle infinite soluzioni complesse)*

$$\ln(2) \tag{3.21}$$

$solve\left(\mathrm{e}^x+1=0, x\right)$ *# qui la soluzione principale è complessa*

$$\mathrm{I}\,\pi \tag{3.22}$$

$solve(\sin(x)=2\ , x)$ *# ... e anche in questo caso*

$$\arcsin(2) \tag{3.23}$$

$evalc(\%)$ *# se ne può ottenere un'espressione esplicita valutandola sui complessi con evalc*

$$\frac{1}{2}\,\pi-\mathrm{I}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \tag{3.24}$$

$\mathrm{e}^x=\dfrac{1}{x}$ *# un'equazione trascendente meno banale*

$$\mathrm{e}^x=\frac{1}{x} \tag{3.25}$$

$solve(\%, x)$ *# la soluzione è espressa con una funzione speciale*

$$\mathrm{LambertW}(1) \tag{3.26}$$

$subs\,(x=\%, \%\%)$ *# verifichiamola sostituendo ...*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{LambertW}(1)}=\frac{1}{\mathrm{LambertW}(1)} \tag{3.27}$$

$simplify(\%)$

$$\frac{1}{\mathrm{LambertW}(1)} = \frac{1}{\mathrm{LambertW}(1)} \quad \textbf{(3.28)}$$

$evalb(\%)$

$$true \quad \textbf{(3.29)}$$

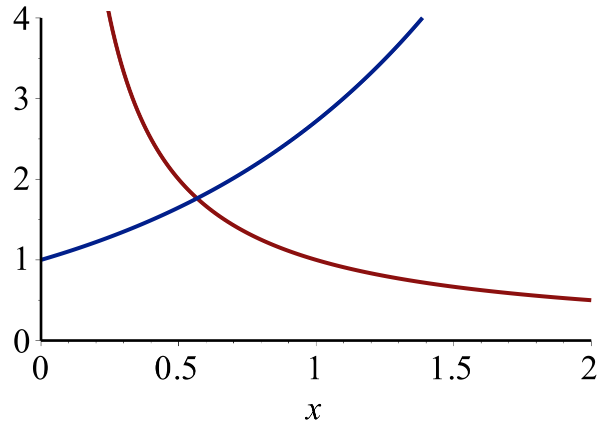
$evalf(\mathrm{LambertW}(1))$ *# questo è il valore numerico della soluzione*

$$0.5671432904 \quad \textbf{(3.30)}$$

$\mathrm{e}^{\%} = \frac{1}{\%}$ *# ... e questa la verifica numerica*

$$1.763222834 = 1.763222834 \quad \textbf{(3.31)}$$

$plot\left(\left\{\mathrm{e}^{x}, \frac{1}{x}\right\}, x = 0..2, view = [0..2, 0..4]\right)$ *# possiamo visualizzare la soluzione graficamente*



$\{x + y = 3, x^2 + y^2 = 5\}$ *# questo è un insieme (sistema) di equazioni*

$$\{x + y = 3, x^2 + y^2 = 5\} \quad \textbf{(3.32)}$$

$solve(\{x + y = 3, x^2 + y^2 = 5\}, \{x, y\})$ *# e queste le sue soluzioni*

$$\{x = 2, y = 1\}, \{x = 1, y = 2\} \quad \textbf{(3.33)}$$

$subs(\%[1], \%\%)$ *# verifichiamo la prima soluzione*

$$\{3 = 3, 5 = 5\} \quad \textbf{(3.34)}$$

$\{x + y = a, x^2 + y^2 = b\}$ *# questo un sistema con parametri a e b*

$$\{x + y = a, x^2 + y^2 = b\} \quad \textbf{(3.35)}$$

solve(%, {*x*, *y*})   *# le soluzioni sono in termini delle radici del polinomio 2 $x^2 - 2\,a\,x + a^2 - b$ (_Z sta per l'indeterminata)*

$$\{x = -\mathit{RootOf}(2\,\_Z^2 - 2\,\_Z\,a + a^2 - b) + a, y = \mathit{RootOf}(2\,\_Z^2 - 2\,\_Z\,a + a^2 - b)\} \quad \textbf{(3.36)}$$

solve$(2\,\_Z^2 - 2\,\_Z\,a + a^2 - b = 0, \_Z)$ *# risolvendo di nuovo si possono ottenere tali radici*

$$\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + 2\,b}, \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + 2\,b} \quad \textbf{(3.37)}$$

subs$(\mathit{RootOf}(2\,\_Z^2 - 2\,\_Z\,a + a^2 - b) = \%[1], \%\%)$ *# sostituendo la prima si trova la prima soluzione del sistema ...*

$$\left\{x = \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + 2\,b}, y = \frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + 2\,b}\right\} \quad \textbf{(3.38)}$$

subs$(\mathit{RootOf}(2\,\_Z^2 - 2\,\_Z\,a + a^2 - b) = \%\%[2], \%\%\%)$ *# e sostituendo la seconda si trova la seconda soluzione del sistema*

$$\left\{x = \frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + 2\,b}, y = \frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + 2\,b}\right\} \quad \textbf{(3.39)}$$

Assegnazioni e assunzioni

a   *# questo è un simbolo senza alcun valore assegnato ...*

$$a \quad \textbf{(4.1)}$$

$a := 1$ *# così si assegna il valore 1 al simbolo a*

$$1 \quad \textbf{(4.2)}$$

a   *# d'ora in poi a verrà valutato come con valore 1*

$$1 \quad \textbf{(4.3)}$$

$a := 2$ *# una seconda assegnazione ...*

$$2 \quad \textbf{(4.4)}$$

a   *# ... sostituisce la prima*

$$2 \quad \textbf{(4.5)}$$

$a := a$ *# i due simboli a vengono valutati diversamente: il primo come nome e il secondo come valore (e cioè 2)*

$$2 \quad \textbf{(4.6)}$$

a # ... quindi il valore di a non è cambiato

$$2 \tag{4.7}$$

$2 := 2$ # se anche il primo simbolo fosse valutato come valore si avrebbe ...

Error, illegal use of an object as a name

$$\boxed{2 := 2}$$

$a := 'a'$ # d'altra parte con le virgolette (singole) si può impedire la valutazione della seconda a come valore ...

$$a \tag{4.8}$$

a # ... così al simbolo a è assegnato come valore se stesso, e si ripristina la situazione iniziale

$$a \tag{4.9}$$

$a := b$ # assegnamo al simbolo a il valore del simbolo b (che è b stesso, non essendo stato assegnato alcun valore a b)

$$b \tag{4.10}$$

a # ... quindi ora il valore di a è b

$$b \tag{4.11}$$

$b := a$ # così al simbolo b si assegna il valore del simbolo a (che è b stesso) ...

$$b \tag{4.12}$$

b # quindi si ha:

$$b \tag{4.13}$$

$b := 'a'$ # mentre così si assegna al simbolo b il simbolo a stesso (non il suo valore) ...

$$a \tag{4.14}$$

a # ... quindi a vale b, che a sua volta vale a, che a sua volta vale b ... e così all'infinito

Error, too many levels of recursion

$a := \frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$ # a un simbolo si può assegnare come valore qualunque espressione

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\pi \tag{4.15}$$

$b := simplify\left(a^2 - a\,\pi\right)$ # ... e usarlo poi per indicare tale espressione

$$\frac{1}{4}\pi^2 \tag{4.16}$$

$a := 4\,x^2 + 5\,x - 6$

$$4\,x^2 + 5\,x - 6 \tag{4.17}$$

$b := x + 2$

$$x + 2 \tag{4.18}$$

$c := \frac{a}{b}$ *# con le due assegnazioni precedenti, questa è una frazione di polinomi*

$$\frac{4\,x^2 + 5\,x - 6}{x + 2} \tag{4.19}$$

$d := \mathit{simplify}(c)$ *# ... che semplificata dà:*

$$4\,x - 3 \tag{4.20}$$

$\mathit{quo}(a, b, x)$ *# cioè il quoziente tra i due polinomi (nel campo delle frazioni di polinomi)*

$$4\,x - 3 \tag{4.21}$$

$x := y + \frac{z}{4}$ *# assegnando un valore al simbolo x ...*

$$y + \frac{1}{4}\,z \tag{4.22}$$

d *# ... il valore di d (che era stato definito come 4x + 3) diventa:*

$$4\,y + z - 3 \tag{4.23}$$

$\mathit{assume}(y, \mathit{positive})$ *# assumiamo ora che y sia (reale) positivo*

y

$$y\sim \tag{4.24}$$

$\mathit{about}(y)$ *# ecco le assunzioni fatte sul simbolo y (che viene scritto come y~ per segnalare che è soggetto ad assunzioni)*

```
Originally y, renamed y~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),infinity)
```

$\mathit{assume}(z \geq 0)$ *# analogamente assumiamo che z sia (reale) non negativo*

z

$$z\sim \tag{4.25}$$

$\mathit{about}(z)$ *# notiamo la differenza tra (Open(0) e 0 in RealRange)*

```
Originally z, renamed z~:
```

```
  is assumed to be: RealRange(0,infinity)
```

$is(x, positive)$ *# dalle assunzioni fatte su y e z segue che x è (reale) positivo*

$$true \tag{4.26}$$

$is(d, positive)$ *# non segue invece che d è positivo*

$$false \tag{4.27}$$

$coulditbe(d, positive)$ *# ... ma potrebbe esserlo (per certi valori di y e z)*

$$true \tag{4.28}$$

$is(d, real)$ *# comunque è certamente reale*

$$true \tag{4.29}$$

$is\left(\sqrt{d}, real\right)$ *# mentre non è detto che lo sia la sua radice*

$$false \tag{4.30}$$

$coulditbe\left(\sqrt{d}, real\right)$ *# ... ma potrebbe esserlo*

$$true \tag{4.31}$$

$simplify\left(\sqrt{d^2}\right)$ *# poiché d deve essere reale, ma non necessariamente positivo, si ha:*

$$|4\,y\sim + z\sim - 3| \tag{4.32}$$

$additionally(y, integer)$ *# in aggiunta (senza eliminare le assunzioni precedenti su y) assumiamo che y è anche intero*
$about(y)$

```
Originally y, renamed y~:
  is assumed to be: AndProp(integer,RealRange(1,infinity))
```

$is(d, positive)$ *# allora d è certamente posivito*

$$true \tag{4.33}$$

$is(d \geq 1)$ *# ... infatti è certamente ≥ 1*

$$true \tag{4.34}$$

$is\left(\sqrt{d}, real\right)$ *# quindi la sua radice è reale*

$$true \tag{4.35}$$

$simplify\left(\sqrt{d^2}\right)$ *# e inoltre si ha:*

$$4\,y\sim + z\sim - 3 \tag{4.36}$$

$additionally(z, integer)$ *# se poi assumiamo che z è anche intero (oltre che ≥ 0)*
$about(z)$

```
Originally z, renamed z~:
  is assumed to be: AndProp(integer,RealRange(0,infinity))
```

$is(d, integer)$ *# allora d è intero*

$$true \tag{4.37}$$

$is(d, even)$ *# non sempre il sistema riesce a determinare la risposta corretta*

$$FAIL \tag{4.38}$$

$is(d, odd)$ *# ... come sopra*

$$FAIL \tag{4.39}$$

$assume(x, integer)$ *# se in aggiunta assumiamo che anche x è intero ...*
$about(x)$

```
y+1/4*z:
  is assumed to be: integer
```

$about(y)$

```
Originally y, renamed y~:
  Involved in the following expressions with properties
    y+1/4*z assumed integer
  also used in the following assumed objects
  [y+1/4*z] assumed integer
```

$about(z)$

```
Originally z, renamed z~:
  Involved in the following expressions with properties
    y+1/4*z assumed integer
  also used in the following assumed objects
  [y+1/4*z] assumed integer
```

$is(d, integer)$ *# ... allora d è intero (essendo stato definito come 4 x − 3)*

$$true \tag{4.40}$$

$is(d, odd)$ *# ed è certamente dispari*

$$true \tag{4.41}$$

$is(d > 0)$ # ma non necessariamente positivo

$$false \tag{4.42}$$

$unassign('a','b','c','d','x','y','z')$

Funzioni e procedure

$x \rightarrow x^2$ # questa è la funzione che associa a x il suo quadrato x^2

$$x \rightarrow x^2 \tag{5.1}$$

$\%(3)$ # possiamo applicarla al numero 3, usando l'usuale notazione funzionale del tipo f(x)

$$9 \tag{5.2}$$

$\%\%(2\,a + b)$ # ... oppure a una qualunque altra espressione algebrica

$$(2\,a + b)^2 \tag{5.3}$$

$apply(\%\%\%, 2\,a + b)$ # un modo diverso di applicare la nostra funzione

$$(2\,a + b)^2 \tag{5.4}$$

$apply(x \rightarrow x^2, x)$ # apply trasforma la funzione $x \rightarrow x^2$ nell'espressione x^2 che la definisce (rispetto alla variabile x)

$$x^2 \tag{5.5}$$

$unapply(x^2, x)$ # unapply trasforma l'espressione x^2 nella fuzione $x \rightarrow x^2$ da essa definita (rispetto alla variabile x)

$$x \rightarrow x^2 \tag{5.6}$$

$f := unapply(4\,x^2 + 5\,x - 6, x)$ # così assegnamo al simbolo f un valore funzionale, cioè definiamo "esplicitamente" f come funzione

$$x \rightarrow 4\,x^2 + 5\,x - 6 \tag{5.7}$$

f # il simbolo f da solo non viene valutato

$$f \tag{5.8}$$

$f(x)$ # ma se "applicato" a qualcosa restituisce il valore della funzione che rappresenta

$$4\,x^2 + 5\,x - 6 \tag{5.9}$$

$f(1)$

$$3 \tag{5.10}$$

$f(a + b)$

$$4\,(a+b)^2+5\,a+5\,b-6 \qquad \textbf{(5.11)}$$

$g(x) := 4\,x^2+5\,x-6$ *# così definiamo "implicitamente" g come funzione (il risultato è analogo al precedente)*

$$x \rightarrow 4\,x^2+5\,x-6$$

g

$$g \qquad \textbf{(5.13)}$$

$g(x)$

$$4\,x^2+5\,x-6 \qquad \textbf{(5.14)}$$

$g(a+b)$

$$4\,(a+b)^2+5\,a+5\,b-6 \qquad \textbf{(5.15)}$$

$f\left(4\,x^2+12\,x-g(x+1)\right)$ *# possiamo usare le funzioni definite in qualunque espressione*

$$4\,\left(4\,x^2+7\,x-4\,(x+1)^2+1\right)^2+20\,x^2+35\,x-20\,(x+1)^2-1 \qquad \textbf{(5.16)}$$

$simplify(\%)$

$$4\,x^2+19\,x+15 \qquad \textbf{(5.17)}$$

$h(x) := \dfrac{4\,x^2+19\,x+15}{x+1}$ *# questa è una funzione razionale*

$$x \rightarrow \frac{4\,x^2+19\,x+15}{x+1} \qquad \textbf{(5.18)}$$

$simplify(\%)$ *# la semplificazione non cambia la funzione*

$$x \rightarrow \frac{4\,x^2+19\,x+15}{x+1} \qquad \textbf{(5.19)}$$

$h(x)$ *# anche se la frazione di polinomi che la definisce ...*

$$\frac{4\,x^2+19\,x+15}{x+1} \qquad \textbf{(5.20)}$$

$simplify(\%)$ *# ... in effetti si semplifica*

$$4\,x+15 \qquad \textbf{(5.21)}$$

$f(x) := x^2;$ *# ridefiniamo (in modo implicito) le funzioni f e g*

$g(x) := 2\,x + 1$

$$x \rightarrow x^2$$

$$x \rightarrow 2\,x + 1 \qquad \textbf{(5.22)}$$

$(g@f)\,(x)$ *# l'operatore @ rappresenta la composizione di funzioni ...*
$(f@g)(x)$

$$2\,x^2 + 1$$

$$(2\,x + 1)^2 \qquad \textbf{(5.23)}$$

$g(f(x))$;   *# ... infatti le espressioni sopra equivalgono a queste*
$f(g(x))$

$$2\,x^2 + 1$$

$$(2\,x + 1)^2 \qquad \textbf{(5.24)}$$

$unapply\left(e^x \cos(\pi\,y) + e^y \sin(\pi\,x), x, y\right)$ *# una funzione con due variabili (definita in modo esplicito) ...*

$$(x, y) \rightarrow e^x \cos(\pi\,y) + e^y \sin(\pi\,x) \qquad \textbf{(5.25)}$$

$apply(\%, x, y)$ *# ... e l'espressione che la definisce rispetto alle variabili x e y*

$$e^x \cos(\pi\,y) + e^y \sin(\pi\,x) \qquad \textbf{(5.26)}$$

$\%\%(1, 1)$ *# la stessa funzione applicata a una coppia di valori*

$$-e \qquad \textbf{(5.27)}$$

$f(x, y) := x^2 + y^2$ *# un'altra funzione in due variabili (definita in modo implicito)*

$$(x, y) \rightarrow x^2 + y^2 \qquad \textbf{(5.28)}$$

f *# come sopra il simbolo f da solo non viene valutato*

$$f \qquad \textbf{(5.29)}$$

$f(x, y)$ *# ma può essere applicato restituendo il valore della funzione*

$$x^2 + y^2 \qquad \textbf{(5.30)}$$

$f(1, 1)$

$$2 \qquad \textbf{(5.31)}$$

$r(x, y) := (-y, x)$ *# questa è una funzione da* R^2 *a* R^2 *(rotazione di 90 gradi intorno all'origine)*

$$(x, y) \rightarrow (-y, x) \tag{5.32}$$

$f(r(x, y))$ *# possiamo quindi comporla con f*

$$y^2 + x^2 \tag{5.33}$$

$rot(a) := (x, y) \rightarrow (x\cos(a) - y\sin(a), x\sin(a) + y\cos(a))$ *# rotazione di un qualunque angolo a intorno all'origine*

$$a \rightarrow (x, y) \rightarrow (x * \cos(a) - y * \sin(a), x * \sin(a) + y * \cos(a)) \tag{5.34}$$

$rot(a)$ *# rot è una funzione a valori funzionali, cioè ad ogni a associa la funzione rotazione di angolo a intorno all'origine*

$$(x, y) \rightarrow (x\cos(a) - y\sin(a), x\sin(a) + y\cos(a)) \tag{5.35}$$

$rot\left(\frac{\pi}{2}\right)(x, y)$ *# in particolare per* $a = \frac{\pi}{2}$ *si ha la rotazione r definita sopra*

$$-y, x \tag{5.36}$$

$rot(\pi)(x, y)$ *# mentre per* $a = \pi$ *si ha la simmetria rispetto all'origine*

$$-x, -y \tag{5.37}$$

$rot\left(\frac{\pi}{3}\right)(x, y)$ *# ... e questa è la rotazione di 60 gradi*

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\sqrt{3}, \frac{1}{2}x\sqrt{3} + \frac{1}{2}y \tag{5.38}$$

$f(rot(a)(x, y))$ *# f composta con la generica rotazione ...*

$$(x\cos(a) - y\sin(a))^2 + (x\sin(a) + y\cos(a))^2$$

$h := f@rot(a)$ *# definiamo h come tale composizione*

$$f@((x, y) \rightarrow (x\cos(a) - y\sin(a), x\sin(a) + y\cos(a))) \tag{5.40}$$

$h(x, y)$ *# ... quindi si ottiene*

$$(x\cos(a) - y\sin(a))^2 + (x\sin(a) + y\cos(a))^2 \tag{5.41}$$

$simplify(\%)$ *# ... e semplificando (infatti f è invariante per rotazioni intorno all'origine)*

$$x^2 + y^2 \tag{5.42}$$

$FattProd(n) := product(i, i = 1..n)$ *# una prima definizione (implicita) della funzione fattoriale, che fa uso della produttoria*

$$n \rightarrow \prod_{i=1}^{n} i \tag{5.43}$$

$FattProd(10)$

$$3628800 \tag{5.44}$$

$FattProd(-10)$

Error, (in product) numeric exception: division by zero

$FattFun(n) := \mathbf{if}(n = 0, 1, n \cdot FattFun(n-1))$ # *una seconda definizione (implicita), in stile funzionale ricorsivo*

$$n \rightarrow if(n = 0, 1, n\, FattFun(n-1)) \tag{5.45}$$

$FattFun(10)$

$$3628800 \tag{5.46}$$

$FattFun(-10)$

Error, (in FattFun) too many levels of recursion

$FattFunEsp :=$ # *l'analoga definizione esplicita permette in aggiunta di controllare a priori che n sia intero non negativo*
$(n :: nonnegint) \rightarrow \mathbf{if}(n = 0, 1, n \cdot FattFunEsp(n-1))$

$$n{::}nonnegint \rightarrow if(n = 0, 1, n\, FattFunEsp(n-1)) \tag{5.47}$$

$FattFunEsp(10)$

$$3628800 \tag{5.48}$$

$FattFunEsp(-10)$

Error, invalid input: FattFunEsp expects its 1st argument, n, to be of type nonnegint, but received -10

$define(FattDef,$ # *un'altra definizione, in stile dichiarativo*
$FattDef(0) = 1,$ # *base della ricorsione per 0*
$FattDef(n :: posint) = n\, FattDef(n-1))$ # *passo ricorsivo per n intero positivo*

$FattDef(10)$

$$3628800 \tag{5.49}$$

$FattDef(-10)$

$$FattDef(-10) \tag{5.50}$$

FattProcFor := # *una in stile procedurale iterativo* (*basato su un ciclo* **for**)
  proc(*n* :: *nonnegint*)
   local *i*, *p* := 1;
   for *i* **from** 1 **to** *n*
    do $p := p \cdot i$ **end do**;
   return *p*
  end proc

proc(*n*::*nonnegint*) **local** *i*, *p*; *p* := 1; **for** *i* **to** *n* **do** *p* := *p* * *i* **end do**; **return** *p* **end proc** **(5.51)**

FattProcFor(10)

3628800 **(5.52)**

FattProcFor(−10)

Error, invalid input: FattProcFor expects its 1st argument, n, to be of type nonnegint, but received -10

FattProcRic := # *e un'ultima in stile, procedurale ricorsivo*
  proc(*n* :: *nonnegint*)
   if $n = 0$ **then**
    return 1
   else
    return *n FattProcRic*($n - 1$)
   end if
  end proc

proc(*n*::*nonnegint*) **if** $n = 0$ **then** **return** 1 **else** **return** *n* * *FattProcRic*($n - 1$) **end if** **end proc** **(5.53)**

FattProcRic(10)

3628800 **(5.54)**

FattProcRic(−10)

Error, invalid input: FattProcRic expects its 1st argument, n, to be of type nonnegint, but received -10

restart

Analisi di funzioni reali

$limit\left(\frac{\sin(x)}{x}, x=0\right)$ *# il limite di un'espressione per x che tende a 0*

$$1 \tag{6.1}$$

$limit\left(\frac{\sin(x)}{x}, x=\infty\right)$ *# ... e il limite per x che tende a ∞*

$$0 \tag{6.2}$$

$diff\left(\frac{\sin(x)}{x}, x\right)$ *# la derivata della stessa espressione rispetto ad x*

$$\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} \tag{6.3}$$

$limit(\%, x=0)$ *# ... e il limite dell'espressione derivata*

$$0 \tag{6.4}$$

$diff\left(\frac{\sin(x)}{x}, x, x\right)$ *# la derivata seconda*

$$-\frac{\sin(x)}{x} - \frac{2\cos(x)}{x^2} + \frac{2\sin(x)}{x^3} \tag{6.5}$$

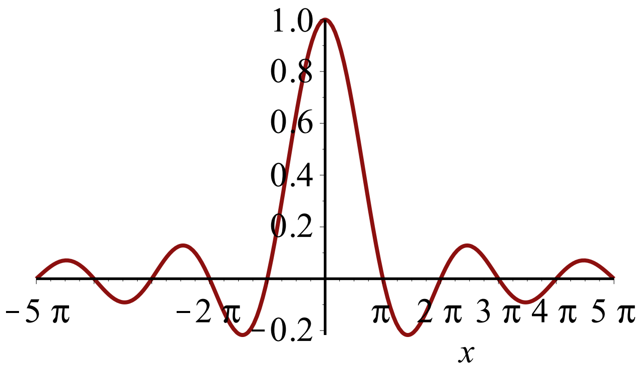
$limit(\%, x=0)$ *# ... e il limite di questa*

$$-\frac{1}{3} \tag{6.6}$$

$g(x) := piecewise\left(x=0, 1, x \neq 0, \frac{\sin(x)}{x}\right)$ *# la funzione g definita dall'espressione iniziale con l'aggiunta di g(0)=0*

$$x \rightarrow piecewise\left(x=0, 1, x \neq 0, \frac{\sin(x)}{x}\right) \tag{6.7}$$

$plot(g(x), x=-5\pi..5\pi)$ *# il la rappresentazione grafica dell'espressione g(x) con x variabile tra -5π e 5π*



g(x)   # la funzione g (valutata in x)

$$\begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

iscont(%, x = −∞..+∞)   # g è continua su tutto R

$$true \tag{6.9}$$

g'(x)   # g' è la funzione la derivata prima di g

$$\begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} & otherwise \end{cases} \tag{6.10}$$

iscont(%, x = −∞..+∞)   # ... anche g' è continua su tutto R

$$true \tag{6.11}$$

g''(x)   # g'' è la derivata seconda di g

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} & x = 0 \\ -\frac{\sin(x)}{x} - \frac{2\cos(x)}{x^2} + \frac{2\sin(x)}{x^3} & otherwise \end{cases} \tag{6.12}$$

iscont(%, x = −∞..+∞)   # ... anche g'' è continua su tutto R

$$true \quad (6.13)$$

$g''(0)$ # *la derivata seconda di g in 0*

$$-\frac{1}{3} \quad (6.14)$$

$int(g(x), x)$ # *una primitiva dell'espressione g(x) rispetto ad x (in termini di una funzione speciale)*

$$\mathrm{Si}(x) \quad (6.15)$$

$int(g(x), x = 0..2\pi)$ # *integrale definito dell'espressione g(x) con x variabile tra 0 e 2π*

$$\mathrm{Si}(2\pi) \quad (6.16)$$

$evalf(\%)$ # *... e il suo valore numerico*

$$1.418151576 \quad (6.17)$$

$int(g(x), x = 0..2\pi, numeric)$ # *lo stesso valore ottenuto mediante integrazione numerica*

$$1.418151576 \quad (6.18)$$

$int(g(x), x = 0..\infty)$ # *un integrale improprio (calcolato in modo simbolico)*

$$\frac{1}{2}\pi \quad (6.19)$$

$f(x) := \frac{2x^3 - 3x + 1}{x - 1}$ # *f è una funzione razionale*

$$x \rightarrow \frac{2x^3 - 3x + 1}{x - 1} \quad (6.20)$$

$f(1)$ # *... non definita in 0*

Error, (in f) numeric exception: division by zero

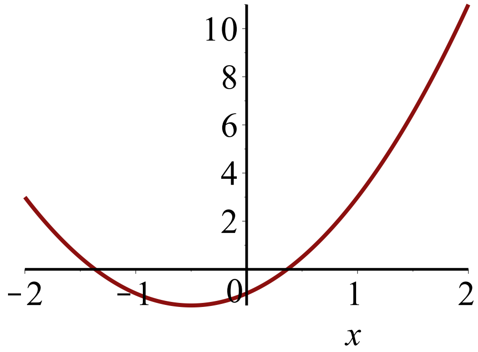
$limit(f(x), x = 1)$ # *ma si tratta di una singolarità eliminabile*

$$3 \quad (6.21)$$

$g(x) := piecewise\left(x = 1, 3, x \neq 1, \frac{2x^3 - 3x + 1}{x - 1}\right)$ # *questa è l'estensione continua su tutto R*

$$x \rightarrow piecewise\left(x = 1, 3, x \neq 1, \frac{2x^3 - 3x + 1}{x - 1}\right) \quad (6.22)$$

plot$(g(x), x = -2..2)$ *# ... e questo il suo grafico*



iscont$(g(x), x = -\infty..\infty)$ *# g è effettivamente continua*

$$\mathit{true} \tag{6.23}$$

$g(x)$ *# l'espressione di g(x)*

$$\begin{cases} 3 & x = 1 \\ \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{-1 + x} & x \neq 1 \end{cases} \tag{6.24}$$

simplify$(\%)$ *# ... coincide con un polinomio in x (per ogni x, anche per x = 0)*

$$2x^2 + 2x - 1 \tag{6.25}$$

$\mathrm{D}(g)(x)$ *# l'espressione della derivata prima (D(g) è una notazione diversa per g')*

$$\begin{cases} 6 & x = 1 \\ \dfrac{6x^2 - 3}{-1 + x} - \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{(-1 + x)^2} & \mathit{otherwise} \end{cases} \tag{6.26}$$

simplify$(\%)$ *# coincide ovviamente con la derivata rispetto ad x del polinomio sopra*

$$4x + 2 \tag{6.27}$$

$\mathrm{D}(\mathrm{D}(g))(x)$ *# e questa è l'espresione della derivata seconda*

$$\begin{cases} 4 & x = 1 \\ \dfrac{12\,x}{-1+x} - \dfrac{2\,(6\,x^2-3)}{(-1+x)^2} + \dfrac{2\,(2\,x^3-3\,x+1)}{(-1+x)^3} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.28}$$

simplify(%)   # *che è costante*

$$4 \tag{6.29}$$

minimize($g(x)$, *location*)   # *il valore minimo di g(x), e il valore di x per cui è ottenuto*

$$-\frac{3}{2}, \left\{\left[\left\{x = -\frac{1}{2}\right\}, -\frac{3}{2}\right]\right\} \tag{6.30}$$

maximize($g(x)$, $x = -2..1$, *location*)   # *il valore massimo di g(x) con x variabile tra -2 e 1, e i valori di x per cui è ottenuto*

$$3, \{[\{x = -2\}, 3], [\{x = 1\}, 3]\} \tag{6.31}$$

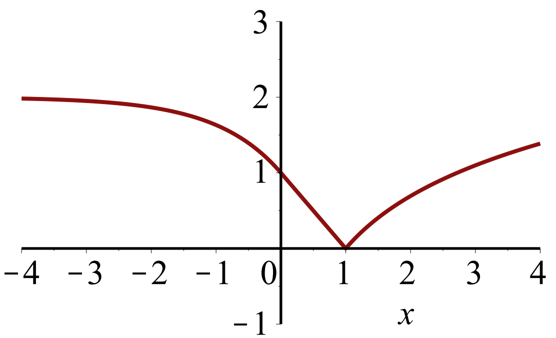
$h(x) := piecewise(x \leq 0, 2 - e^x, x \leq 1, 1 - x, \log(x))$ # *una funzione definita a tratti*

$$x \rightarrow piecewise(x \leq 0, 2 - e^x, x \leq 1, 1 - x, \log(x)) \tag{6.32}$$

$h(x)$ # *la sua espressione*

$$\begin{cases} 2 - e^x & x \leq 0 \\ -x + 1 & x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.33}$$

plot($h(x)$, $x = -4..4$, *view* = [−4..4, −1..3])   # *... e il suo grafico*



$iscont(h(x), x=-\infty..+\infty)$ *# h è una funzione continua su tutto R*

$$\mathit{true} \tag{6.34}$$

$h'(x)$ *# ma non è derivabile in 1*

$$\begin{cases} -e^x & x \le 0 \\ -1 & x < 1 \\ \mathit{undefined} & x = 1 \\ \dfrac{1}{x} & 1 < x \end{cases} \tag{6.35}$$

$h''(x)$ *# ... e non ammette derivata seconda on 0 e 1*

$$\begin{cases} -e^x & x < 0 \\ \mathit{undefined} & x = 0 \\ 0 & x < 1 \\ \mathit{undefined} & x = 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & 1 < x \end{cases} \tag{6.36}$$

$int(h(x), x)$ *# l'espressione di una primitiva di h*

$$\begin{cases} 2x - e^x & x \le 0 \\ -\dfrac{1}{2}x^2 + x - 1 & x \le 1 \\ x\ln(x) - x + \dfrac{1}{2} & 1 < x \end{cases} \tag{6.37}$$

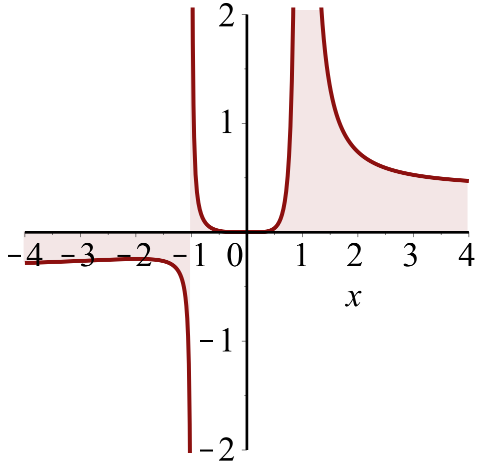
$k(x) := \dfrac{x^3 \arctan(x)}{4(x+1)(x-1)}$ *# un'altra funzione*

$$x \rightarrow \frac{x^3 \arctan(x)}{(4x+4)(x-1)^2} \tag{6.38}$$

$iscont(k(x), x=-\infty..\infty)$ *# che non è continua su tutto R*

$$false \tag{6.39}$$

$plot(k(x), x=-4..4, view=[-4..4, -2..2], \text{discont}=\text{true}, \text{filled}=[\text{true}, \text{transparency}=0.9])$



$limit(k(x), x=-1)$ *# questo limite non esiste*

$$undefined \tag{6.40}$$

$limit(k(x), x=-1, left)$ *# ... ma esiste il limite sinistro*

$$-\infty \tag{6.41}$$

$limit(k(x), x=-1, right)$ *# ... e anche quello destro*

$$\infty \tag{6.42}$$

$limit(k(x), x=1)$ *# questo limite invece esiste*

$$\infty \tag{6.43}$$

$limit(k(x), x=-\infty)$ *# ... così come questo*

$$-\frac{1}{8}\pi \tag{6.44}$$

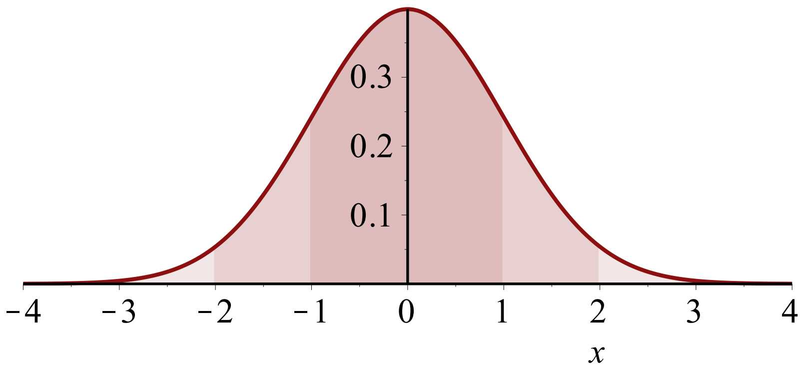
$limit(k(x), x=\infty)$ *# e questo*

$$\frac{1}{8}\pi \tag{6.45}$$

$gauss(x) := \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ *# la distribuzione normale standard (con media 0 e varianza 1)*

$$x \rightarrow \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,x^2}}{\sqrt{2\,\pi}} \tag{6.46}$$

plots[*display*](
plot(*gauss*(*x*), x = -1 ..1, filled = [true, transparency = 0.9], *thickness* = 0),
plot(*gauss*(*x*), x = -2 ..2, filled = [true, transparency = 0.9], *thickness* = 0),
plot(*gauss*(*x*), *x* = -3 ..3, filled = [true, transparency = 0.9], *thickness* = 0),
plot(*gauss*(*x*), x = -4 ..4))



gauss(*x*) *# l'espressione della gaussiana*

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,x^2}}{\sqrt{\pi}} \tag{6.47}$$

diff(*gauss*(*x*), *x*) *# la sua derivata prima*

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,x^2}}{\sqrt{\pi}} \tag{6.48}$$

diff(*gauss*(*x*), *x*, *x*) *# e la sua derivata seconda*

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,x^2\,e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{\pi}} \quad \textbf{(6.49)}$$

simplify(%)

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(-1+x^2\right)}{\sqrt{\pi}} \quad \textbf{(6.50)}$$

int(*gauss*(*x*), *x* = − ∞ .. ∞)   *# l'integrale su tutto R è 1 (si tratta di una distribuzione di probabilità)*

$$1 \quad \textbf{(6.51)}$$

int(*gauss*(*x*), *x* = −1 ..1)

$$\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \quad \textbf{(6.52)}$$

evalf(%, 3)   *# il 68,3% dei casi è compreso tra −1 e +1*

$$0.683 \quad \textbf{(6.53)}$$

int(*gauss*(*x*), *x* = −2 ..2)

$$\operatorname{erf}\left(\sqrt{2}\right) \quad \textbf{(6.54)}$$

evalf(%, 3)   *# ... il 95,4% tra −2 e +2*

$$0.954 \quad \textbf{(6.55)}$$

int(*gauss*(*x*), *x* = −3 ..3)   *# ... il 99,7% tra −3 e +3*

$$\operatorname{erf}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \quad \textbf{(6.56)}$$

evalf(%, 3)

$$0.997 \quad \textbf{(6.57)}$$

gauss2(*x*, *y*) := *gauss*(*x*) *gauss*(*y*)   *# la distribuzione normale standard in due variabili*

$$(x, y) \rightarrow gauss(x)\, gauss(y) \quad \textbf{(6.58)}$$

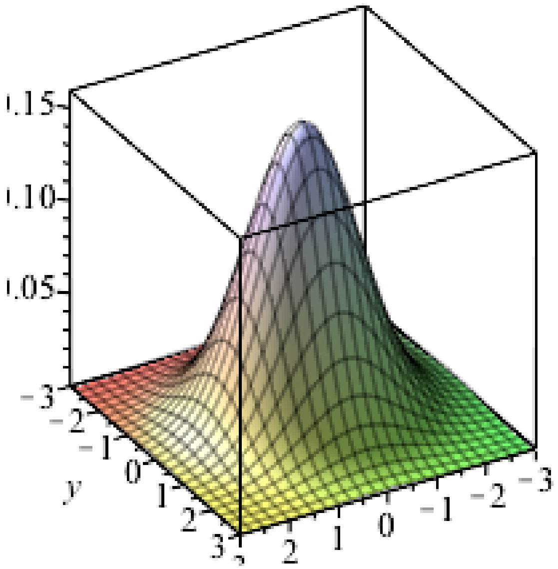
gauss2(*x*, *y*)   *# ... la sua espressione esplicita*

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}\,e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\pi} \tag{6.59}$$

$simplify(\%)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2}}{\pi} \tag{6.60}$$

$plot3d(gauss2(x, y), x = -3..3, y = -3..3, axes = boxed)$ # ... e il suo grafico



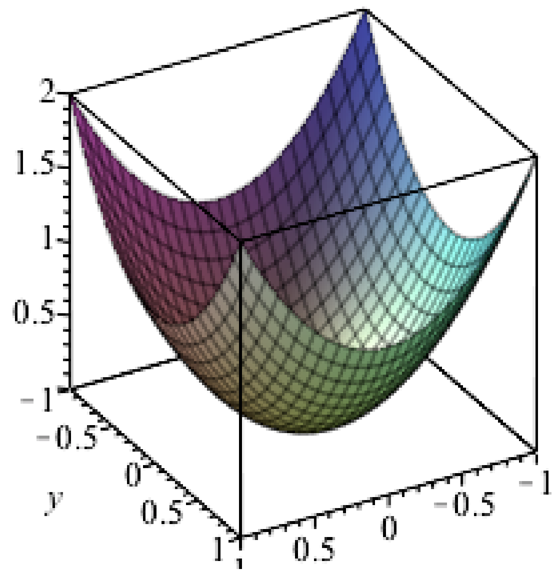
$int(gauss2(x, y), x = -\infty..\infty, y = -\infty..\infty)$ # l'integrale su tutto R^2 è di nuovo 1

$$1 \tag{6.61}$$

$f(x, y) := x^2 + y^2$ # un'altra funzione in due variabili

$$(x, y) \rightarrow x^2 + y^2 \tag{6.62}$$

$plot3d(f(x, y), x = -1..1, y = -1..1, axes = boxed)$



diff $(f(x, y), x)$ *# la derivata dell'espressione f(x,y) rispetto a x*

$$2\,x \tag{6.63}$$

diff $(f(x, y), y)$ *# la derivata dell'espressione f(x,y) rispetto a y*

$$2\,y \tag{6.64}$$

$\mathrm{D}[1](f)\,(x, y)$ *# la derivata della funzione f rispetto alla prima variabile, valutata in (x,y)*

$$2\,x \tag{6.65}$$

$\mathrm{D}[2](f)\,(x, y)$ *# la derivata della funzione f rispetto alla seconda variabile, valutata in (x,y)*

$$2\,y \tag{6.66}$$

diff $(f(x, y), x, y)$ *# la derivata seconda dell'espressione f(x,y) rispetto a x e y*

$$0 \tag{6.67}$$

$\mathrm{D}[1, 2](f)\,(x, y)$ *# l'analoga derivata della funzione f, valutata in (x,y)*

$$0 \tag{6.68}$$

extrema $(f(x, y), \{x + y = 1\}, \{x, y\}, pts)$ *# valori estremali di f(x,y) con x e y variabili vincolate dall'equazione x + y = 1*

$$\left\{\frac{1}{2}\right\} \tag{6.69}$$

pts # *qui sono stati registrati i punti nei quali si ottengono i valori estremali*

$$\left\{\left\{x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}\right\}\right\} \quad \textbf{(6.70)}$$

restart

Sequenze, liste e insiemi

1, 2, 3, 4, 5, 6 # *questa è una sequenza*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad \textbf{(7.1)}$$

$S := seq(1..6)$ # *la stessa sequenza generata con l'operatore seq*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad \textbf{(7.2)}$$

$seq\big(\log(n), n=1..6\big)$ # *la sequenza generata da un'espressione con parametro n variabile tra 1 e 6*

$$0, \ln(2), \ln(3), 2\ln(2), \ln(5), \ln(6) \quad \textbf{(7.3)}$$

$\log(n)\ \$\ n=1..6$ # *un diverso modo di generare la stessa sequenza*

$$0, \ln(2), \ln(3), 2\ln(2), \ln(5), \ln(6) \quad \textbf{(7.4)}$$

$seq(evalf(\min(n,4)), n=1..6)$ # *con seq l'espressione generante è valutata solo dopo aver sostituito n con i valori indicati*

$$1., 2., 3., 4., 4., 4. \quad \textbf{(7.5)}$$

$evalf(\min(n,4))\ \$\ n=1..6$ # *con l'operatore $ l'espressione generante è valutata una sola volta prima delle sostituzioni*

$$1, 2, 3, 4., 4., 4. \quad \textbf{(7.6)}$$

$R := seq(rand(1..6)(\,), n=1..10)$ # *così si ottengono dieci valori casuali (l'espressione è valutata 10 volte)*

$$5, 3, 1, 5, 2, 3, 2, 2, 4, 3 \quad \textbf{(7.7)}$$

$rand(1..6)(\,)\ \$\ n=1..10$ # *così si ottiene un unico valore casuale ripetuto dieci volte*

$$5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5 \quad \textbf{(7.8)}$$

S, R # *così si concatenano due sequenze*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 1, 5, 2, 3, 2, 2, 4, 3 \quad \textbf{(7.9)}$$

a, b, R, c, d # *... e si possono anche aggiungere termini prima e dopo una sequenza*

$$a, b, 5, 3, 1, 5, 2, 3, 2, 2, 4, 3, c, d \quad \textbf{(7.10)}$$

$\%[1]$ # *il primo termine della sequenza*

$$a \tag{7.11}$$

%%[2] # ... il secondo

$$b \tag{7.12}$$

%%%[-1] # l'ultimo (il primo dal fondo)

$$d \tag{7.13}$$

$f(S)$ # f applicata alla sequenza S (resta indicata perché f non è stata definita come funzione)

$$f(1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{7.14}$$

$f(x) := x^2$ # se si definisce f come funzione di una variabile

$$x \rightarrow x^2 \tag{7.15}$$

$f(S)$ # e poi si applica alla sequenza si ottiene l'applicazione di f solo primo termine della sequenza (gli altri sono trascurati)

$$1 \tag{7.16}$$

$f(x, y, z) := (x^2, y^2, z^2)$ # analogamente se f si definisce come funzione di tre variabili

$$(x, y, z) \rightarrow (x^2, y^2, z^2) \tag{7.17}$$

$f(S)$ # allora si ottiene l'applicazione di f ai primi tre termini della sequenza (gli altri sono trascurati)

$$1, 4, 9 \tag{7.18}$$

$f(\,) := args$ # qui f è definita come funzione con 0 variabili usando la variabile speciale args ...

$$(\,) \rightarrow args \tag{7.19}$$

$f(S)$ # che contiene la sequenza dei valori a cui è applicata f (indipendentemente dal numero di variabili nella sua definizione)

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \tag{7.20}$$

$g(x, y) := nargs$ # g è definita come funzione con 2 variabili usando la variabile speciale nargs ...

$$(x, y) \rightarrow nargs \tag{7.21}$$

$g(S)$ # che contiene il numero dei valori a cui è applicata g (indipendentemente dal numero di variabili nella sua definizione)

$$6 \tag{7.22}$$

$h(x, y, z) := (-x, -y, -z, \_rest)$ # h è definita come funzione con 3 variabili usando la variabile speciale _rest ...

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z, \_rest) \tag{7.23}$$

$h(S)$ # che contiene la sequenza dei valori in eccesso rispetto al numero di variabili nella definizione

$$-1, -2, -3, 4, 5, 6 \tag{7.24}$$

$Media(\,) := \dfrac{apply(`+`, args)}{nargs}$ # *la funzione media applicabile a qualunque numero di variabili ...*

$$() \rightarrow \frac{apply(`+`, args)}{nargs} \tag{7.25}$$

$Media(8, 9, 6, 7, 8)$ # *... sia numeriche*

$$\frac{38}{5} \tag{7.26}$$

$Media(a, b, c)$ # *... che simboliche*

$$\frac{1}{3}\,a + \frac{1}{3}\,b + \frac{1}{3}\,c \tag{7.27}$$

$Differenze(x, y) := (y - x, \mathbf{if}(nargs > 2, Differenze(y, \_rest), NULL))$ # *questa funzione calcola le differenze successive ...*

$$(x, y) \rightarrow (y - x, if(2 < nargs, Differenze(y, \_rest), NULL)) \tag{7.28}$$

$seq\left(n^3 - 5\,n^2 + 2, n = 0\,..10\right)$ # *... in una qualunque sequenza di lunghezza arbitraria*

$$2, -2, -10, -16, -14, 2, 38, 100, 194, 326, 502 \tag{7.29}$$

$Differenze(\%)$

$$-4, -8, -6, 2, 16, 36, 62, 94, 132, 176 \tag{7.30}$$

$Differenze(\%)$

$$-4, 2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44 \tag{7.31}$$

$Differenze(\%)$

$$6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6 \tag{7.32}$$

$Differenze(\%)$

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \tag{7.33}$$

$L := [a, b, c, d, e, f]$ # *questa è una lista*

$$[a, b, c, d, e, f] \tag{7.34}$$

$op(L)$ # *... e questa la sequenza dei suoi termini (op sta per operandi)*

$$a, b, c, d, e, f \tag{7.35}$$

$op(0, L)$ # *il termine "zeresimo" (nascosto) è il simbolo list (etichetta che caratterizza le liste)*

$$list \tag{7.36}$$

$op(1, L)$ # *il primo termine di L*

$$a \tag{7.37}$$

$op(2, L)$ # *... il secondo*

$$b \tag{7.38}$$

$op(-2, L)$ # *... il penultimo*

$$e \tag{7.39}$$

$op(-1, L)$ # *... l'ultimo*

$$f \tag{7.40}$$

$op(2..4, L)$ # *... la sequenza di termini dal secondo al quarto*

$$b, c, d \tag{7.41}$$

$L[1]$ # *una notazione diversa per il primo termine*

$$a \tag{7.42}$$

$L[-1]$ # *... per l'ultimo*

$$f \tag{7.43}$$

$L[2..4]$ # *la sottolista dei termini dal secondo al quarto*

$$[b, c, d] \tag{7.44}$$

$L[[1, 2, 3, 4, 3, 2, 1]]$ # *la lista dei termini estratti da L secondo la lista di indici indicata*

$$[a, b, c, d, c, b, a] \tag{7.45}$$

$LL := [a, [b, c, [\ ], d, [e, f]], [g, h]]$ # *una lista di liste*

$$[a, [b, c, [\ ], d, [e, f]], [g, h]] \tag{7.46}$$

$LL[2]$ # *il suo secondo termine, che è a sua volta una lista*

$$[b, c, [\ ], d, [e, f]] \tag{7.47}$$

$LL[2][5]$ # *il quinto termine di quest'ultima lista*

$$[e, f] \tag{7.48}$$

$LL[2, 5]$ # *... che si può ottenere anche così*

$$[e, f] \tag{7.49}$$

$LL[2, 5, 1]$ # *il termine di indici 2,5,1*

$$e \tag{7.50}$$

$LLL[2, 5, 1]$ # se un simbolo non è stato definito come lista gli indici restano indicati

$$LLL_{2,\,5,\,1} \tag{7.51}$$

$M := [S]$ # per trasformare la sequenza S (definita sopra) in una lista basta racchiuderla tra parentesi quadre

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6] \tag{7.52}$$

$M[3] := [x, y]$ # così si riassegna il terzo termine della lista M

$$[x, y] \tag{7.53}$$

M # ... quindi ora M è la lista:

$$[1, 2, [x, y], 4, 5, 6] \tag{7.54}$$

$M[3, 2] := z$ # a questo punto, ridefinendo il termine di indici 3,2

$$z \tag{7.55}$$

M # ... si ottiene:

$$[1, 2, [x, z], 4, 5, 6] \tag{7.56}$$

$M[3] := 3$ # rimettiamo 3 al terzo posto ...

$$3 \tag{7.57}$$

M # ... per tornare alla lista iniziale

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6] \tag{7.58}$$

$map\left(x \rightarrow x^2, M\right)$ # map per applicare una funzione a ciascun termine di una lista

$$[1, 4, 9, 16, 25, 36] \tag{7.59}$$

$map(\min, M, 4)$ # ... con eventuali altri argomenti ripetuti per ogni termine

$$[1, 2, 3, 4, 4, 4] \tag{7.60}$$

$zip\left((x, y) \rightarrow x^y, L, M\right)$ # zip per combinare termine a termine due liste della stessa lunghezza con una funzione di due argomenti

$$\left[a, b^2, c^3, d^4, e^5, f^6\right] \tag{7.61}$$

$CatList := (l :: list) \rightarrow map(op, [args])$ # funzione di concatenazione di un qualunque sequenza di liste

$$l::list \rightarrow map(op, [args]) \tag{7.62}$$

$CatList(\,)$ # applicata a nessuna lista

$$[\,] \tag{7.63}$$

$CatList([a, b, c])$ # ... a una sola lista

$$[a, b, c] \tag{7.64}$$

$CatList([a, b, c], M, [x, y])$ # ... a due o più liste

$$[a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y] \tag{7.65}$$

$Append := (l :: list, x :: anything) \rightarrow [op(l), x]$ # funzione che aggiunge un termine in fondo a una lista

$$(l::list, x::anything) \rightarrow [op(l), x] \tag{7.66}$$

$Append([\ ], x)$ # se la lista originale è vuota si ottiene una lista con un solo elemento

$$[x] \tag{7.67}$$

$Append(M, x)$ # ... in generale una lista con un elemento in più

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, x] \tag{7.68}$$

$RevList := (l :: list) \rightarrow [seq(l[-n], n = 1 .. nops(l))]$ # funzione che inverte l'ordine degli elementi di una lista

$$l::list \rightarrow \left[seq\left(l_{-n}, n = 1 .. nops(l)\right)\right] \tag{7.69}$$

$RevList(M)$

$$[6, 5, 4, 3, 2, 1] \tag{7.70}$$

$RevListRic :=$ # una definizione ricorsiva della stessa funzione
$(l :: list) \rightarrow \mathbf{if}(nops(l) = 0, [\ ], Append(RevListRic(l[2 .. nops(l)]), l[1]))$

$$l::list \rightarrow if\left(nops(l) = 0, [\ ], Append\left(RevListRic\left(l_{2 .. nops(l)}\right), l_1\right)\right) \tag{7.71}$$

$RevListRic(M)$

$$[6, 5, 4, 3, 2, 1] \tag{7.72}$$

$Sottoliste(l) :=$ # funzione che dà la lista delle sottoliste (di termini contingui) di una lista l
$[[\ ],$ # innanzi tutto la sottolista vuota
$seq($ # e poi la sequenza delle
$seq(l[n .. (n + k - 1)], n = 1 .. (nops(l) - k + 1)),$ # ... sequenze delle sottoliste di lunghezza k
$k = 1 .. nops(l))]$ # ... al variare di k da 1 alla lunghezza di l

$$l \rightarrow \left[[\ ], seq\left(seq\left(l_{n .. n + k - 1}, n = 1 .. nops(l) - k + 1\right), k = 1 .. nops(l)\right)\right] \tag{7.73}$$

$Sottoliste([\ ])$

$$[[\ ]] \tag{7.74}$$

$Sottoliste([a])$

$$[[\ ], [a]] \tag{7.75}$$

$Sottoliste([a, b, c, d])$

$$[[\ ], [a], [b], [c], [d], [a, b], [b, c], [c, d], [a, b, c], [b, c, d], [a, b, c, d]] \tag{7.76}$$

$N := [S, R]$ *# questa è la lista che ha come sequenza di termini la concatenazione delle sequenze S e R*

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 1, 5, 2, 3, 2, 2, 4, 3] \tag{7.77}$$

$[L, N]$ *# così invece di ottiene una lista che ha come termini due liste L e N*

$$[[a, b, c, d, e, f], [1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 1, 5, 2, 3, 2, 2, 4, 3]] \tag{7.78}$$

$CatList(L, N)$ *# mentre questa è la concatenazione delle liste L e N in un'unica lista*

$$[a, b, c, d, e, f, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 1, 5, 2, 3, 2, 2, 4, 3] \tag{7.79}$$

$sort(\%)$ *# così possiamo ordinare la lista ottenuta*

$$[1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, a, b, c, d, e, f] \tag{7.80}$$

$S := convert(\%\%, set)$ *# e così convertirla in un insieme (i duplicati sono eliminati e i termini rimanenti sono ordinati)*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b, c, d, e, f\} \tag{7.81}$$

$convert(S, list)$ *# così si può tornare di nuovo a una lista (non quella orginale)*

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b, c, d, e, f] \tag{7.82}$$

$op(S)$ *# questa è la sequenza degli elementi di S*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b, c, d, e, f \tag{7.83}$$

$op(0, S)$ *# il termine "zeresimo" (nascosto) è il simbolo set (etichetta che caratterizza gli insiemi)*

$$set \tag{7.84}$$

$S[8]$ *# l'ottavo elemento*

$$b \tag{7.85}$$

$S[4..-4]$ *# gli elementi dal quarto al quartultimo*

$$\{4, 5, 6, a, b, c\} \tag{7.86}$$

$T := \{seq(2\,x, x \textbf{ in } S)\}$ *# si può generare una sequenza anche facendo variare il parametro in un insieme*

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 2\,a, 2\,b, 2\,c, 2\,d, 2\,e, 2\,f\} \tag{7.87}$$

$S \cup T$ *# l'unione degli insiemi S e T*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, a, b, c, d, e, f, 2\,a, 2\,b, 2\,c, 2\,d, 2\,e, 2\,f\} \tag{7.88}$$

$S \cap T$ *# ... e la loro intersezione*

$$\{2, 4, 6\} \tag{7.89}$$

```
ProdCart :=                    # funzione (ricorsiva) che dà il prodotto cartesiano di una qualunque sequenza di insiemi
proc( )
 local n := nargs, x, y;
 if n = 0 then
   return { }                  # se non ci sono insiemi fattori si ha il vuoto
 elif n = 1 then
   return args                 # se ce n'è uno solo il prodotto è esso stesso
 elif n = 2 then
   return {seq(seq([x, y], x in op(1, [args])), y in op(2, [args]))}  # il prodotto di due insiemi
 else
   return {seq(seq([x, op(y)], x in op(1, [args])), y in ProdCart(op(2 ..n, [args])))}  # il passo induttivo per più di due insiemi
 end if
end proc :
```

```
ProdCart({a, b, c}, {1, 2})
```

$$\{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2], [c, 1], [c, 2]\} \tag{7.90}$$

```
ProdCart({a, b, c}, {1, 2}, {x, y})
```

$$\{[a, 1, x], [a, 1, y], [a, 2, x], [a, 2, y], [b, 1, x], [b, 1, y], [b, 2, x], [b, 2, y], [c, 1, x], [c, 1, y], [c, 2, x], [c, 2, y]\} \tag{7.91}$$

```
ProdCart({a, b, c}, {1, 2}, { })
```

$$\{\ \} \tag{7.92}$$

```
Sottoinsiemi :=                    # funzione (ricorsiva) che dà l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme s
 proc(s :: set)
  local n := nops(s), t, st, r, x;      # sia n il numero degli elementi di s
  if n = 0 then                         # se n = 0
   return {{ }}                         # ... allora l'unico sottoinsieme e quello vuoto
  else                                  # altrimenti
   t := s[1 ..(n − 1)];                 # ... sia t l'insieme dei primi n-1elementi di s
   x := s[-1];                          # ... e sia x l'n-esimo elemento di s
   st := Sottoinsiemi(t);               # questo è l'insieme dei sottoinsiemi di t
   r := map(`union`, st, {x});          # questo l'insieme che si ottiene aggiungendo x a ciascuno di loro
   return union(st, r)                  # il risultato finale è l'unione dei precedenti insiemi
  end if
 end proc :
```

$Sottoinsiemi(\{a\})$

$$\{\{\,\}, \{a\}\} \tag{7.93}$$

$Sottoinsiemi(\{a, b, c\})$

$$\{\{\,\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \tag{7.94}$$

restart

Vettori e matrici

$\langle a, b, c\rangle$ *# questo è un vettore colonna*

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

$op(0, \%)$ *# ... e questa la sua etichetta*

$$Vector_{column} \tag{8.2}$$

$op(\%\%)$ *# in questo caso gli operandi contengono altre informazioni oltre alle componenti del vettore*

$$3, \{1 = a, 2 = b, 3 = c\}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran\_order, shape = [\,] \tag{8.3}$$

$\langle a|b|c\rangle$ *# questo è invece un vettore riga*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

$op(0, \%)$ *# ... e questa la sua etichetta*

$$Vector_{row} \tag{8.5}$$

$op(\%\%)$ *# ... e i suoi operandi*

$$3, \{1 = a, 2 = b, 3 = c\}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran\_order, shape = [\,] \tag{8.6}$$

$V := Vector([a, b, c])$ *# lo stesso vettore colonna di sopra definito in modo esplicito e assegnato come valore al simbolo V*

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

$convert(V, list)$ # così si può convertirlo in una lista

$$[a, b, c] \tag{8.8}$$

$V[1]$ # la prima componente del vettore V

$$a \tag{8.9}$$

$V[1..2]$ # il vettore formato dalle prime due componenti di V

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{8.10}$$

$V[[1, 3]]$ # ... e quello formato dalla prima e dalla terza componente di V

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \tag{8.11}$$

V^{+} # il vettore riga trasposto di V (a differenza della lista sopra qui non ci sono le virgole)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

$V^{+}[2..3]$ # ... e il vettore formato dalla seconda e dalla terza componente di questo

$$\begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

$W := Vector([1, 0, 5])$ # un altro vettore colonna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{8.14}$$

$W[2] := 3$ # ridefiniamo la sua seconda componente

$$3 \tag{8.15}$$

W # ... quindi ora si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{8.16}$$

$2\,V + W$ *# una combinazione lineare dei vettori V e W*

$$\begin{bmatrix} 2\,a+1 \\ 2\,b+3 \\ 2\,c+5 \end{bmatrix} \tag{8.17}$$

$V\,.\,V$ *# il prodotto scalare di V con se stesso*

$$\overline{a}\,a + \overline{b}\,b + \overline{c}\,c \tag{8.18}$$

% assuming *real* *# assumendo le componenti reali si ha:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \tag{8.19}$$

$W\,.\,W$ *# le componenti di W sono già numeriche, quindi ...*

$$35 \tag{8.20}$$

$V\,.\,W$ *# il prodotto scalare tra V e W*

$$\overline{a} + 3\,\overline{b} + 5\,\overline{c} \tag{8.21}$$

$V\,.\,W$ assuming *real*

$$a + 3\,b + 5\,c \tag{8.22}$$

$\langle V, W\rangle$ *# così si concatenano (verticalmente) i vettori colonna V e W (anche se la notazione ricorda il prodotto scalare)*

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{8.23}$$

$\langle V, 0\rangle$ *# ... e nello stesso modo di può aggiungere una componente extra a V*

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.24}$$

$\langle V^+ | W^+ \rangle$ *# così invece si concatenano (orizzontalmente) due vettori riga*

$$\begin{bmatrix} a & b & c & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \tag{8.25}$$

$\langle V^+ | 0 \rangle$ *# ... e si aggiunge una componente extra ad un vettore riga*

$$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \end{bmatrix} \tag{8.26}$$

$\langle V | W \rangle$ *# concatenando orizzontalmente i vettori colonna V e W si ottiene una matrice (con due colonne)*

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 3 \\ c & 5 \end{bmatrix} \tag{8.27}$$

$\langle V^+, W^+ \rangle$ *# analogamente concatenando verticalmente due vettori riga si ottiene una matrice (con due righe)*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \tag{8.28}$$

$op(0, \%)$ *# infatti l'etichetta è cambiata*

$$Matrix \tag{8.29}$$

$op(1, \%\%)$ *# il primo operando contiene le dimensioni della matrice*

$$2, 3 \tag{8.30}$$

$op(\%\%\%)$ *# ... ecco anche gli altri operandi*

$$2, 3, \{(1, 1) = a, (1, 2) = b, (1, 3) = c, (2, 1) = 1, (2, 2) = 3, (2, 3) = 5\}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran\_order, shape = [\ ] \tag{8.31}$$

$\langle a, b, c; 1, 2, 3 \rangle$ *# un modo diverso per scrivere direttamente una matrice per righe*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{8.32}$$

$\langle\langle a|b|c\rangle, \langle 1|2|3\rangle\rangle$ *# e un altro ancora*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

$\langle\langle a, 1\rangle|\langle b, 2\rangle|\langle c, 3\rangle\rangle$ *# così invece la stessa matrice è scritta per colonne*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

$\%[1]$ *# questa è la prima riga della matrice*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

$\%\%[2, 3]$ *# questo il termine di indici 2,3 (seconda riga terza colonna)*

$$3 \quad (8.36)$$

$\%\%\%[1..2, 2..3]$ *# questa è una sottomatrice*

$$\begin{bmatrix} b & c \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

$M := Matrix(3, 3, 0)$ *# una matrice 3 per 3 inizializzata a 0*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

for i **from** 1 **to** 3 **do** *# un ciclo per assegnare valori diversi agli elementi lungo la diagonale*
$M[i, i] := i$
end do

$$1$$

$$2$$

$$3 \quad (8.39)$$

M *# ... quindi ora si ha:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{8.40}$$

$N := M$ *# quando si assegna come valore un vettore o una matrice, l'assegnazione è fatta per nome (o meglio indirizzo) e non per valore*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{8.41}$$

$N[2, 3] := 4$ *# quindi riassegnando il termine di indici 2,3 alla matrice N*

$$4 \tag{8.42}$$

N *# ... si ottiene la matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{8.43}$$

M *# ma solo perché in realtà si è modificata la matrice M*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{8.44}$$

$N := copy(M)$ *# con il comando copy si genera invece una nuova matrice da assegnare ad N*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{8.45}$$

$N[3, 2] := 1$ *# quindi se ora riassegnamo il termine di indici 3,2 in M*

$$1 \tag{8.46}$$

N *# ... modifichiamo la matrice N*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{8.47}$$

M # ... ma non la matrice *M*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{8.48}$$

M^{+} # *questa è la matrice trasposta di M*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \tag{8.49}$$

$M . V$ # *questo il prodotto matrice vettore*

$$\begin{bmatrix} a \\ 2\,b + 4\,c \\ 3\,c \end{bmatrix} \tag{8.50}$$

$M . N$ # *e questo il prodotto tra matrici*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 20 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \tag{8.51}$$

LinearAlgebra[*Determinant*](*M*) # *per la funzione determinante dobbiamo ricorrere al package LinearAlgebra*

$$6 \tag{8.52}$$

restart

Geometria

$P1 := [2,-2]$ *# un punto è rappresentato dalla coppia ordinata delle sue coordinate*

$$[2, -2] \tag{9.1}$$

$P2 := [1, 3]$

$$[1, 3] \tag{9.2}$$

$P3 := [-3, 1]$

$$[-3, 1] \tag{9.3}$$

$dist(p, q) := \sqrt{(p[1]-q[1])^2 + (p[2]-q[2])^2}$ *# la funzione distanza tra due punti*

$$(p, q) \rightarrow \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} \tag{9.4}$$

$dist(p, q)$ *# applicabile a punti astratti (non definiti)*

$$\sqrt{p_1^2 - 2\,p_1\,q_1 + q_1^2 + p_2^2 - 2\,p_2\,q_2 + q_2^2} \tag{9.5}$$

$dist(P1, P2)$ *# ... oppure a punti definiti con coordinate numeriche (o eventualmente simboliche)*

$$\sqrt{26} \tag{9.6}$$

$medio(p, q) := \left[\frac{p[1]+q[1]}{2}, \frac{p[2]+q[2]}{2}\right]$ *# punto medio di un segmento*

$$(p, q) \rightarrow \left[\frac{1}{2}\,p_1 + \frac{1}{2}\,q_1, \frac{1}{2}\,p_2 + \frac{1}{2}\,q_2\right] \tag{9.7}$$

$medio(p, q)$

$$\left[\frac{1}{2}\,p_1 + \frac{1}{2}\,q_1, \frac{1}{2}\,p_2 + \frac{1}{2}\,q_2\right] \tag{9.8}$$

$dist(p, medio(p, q)) = dist(q, medio(p, q))$ *# verifichiamo che il punto medio è equidistante dagli estremi*

$$\frac{1}{2}\sqrt{p_1^2 - 2\,p_1\,q_1 + q_1^2 + p_2^2 - 2\,p_2\,q_2 + q_2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{p_1^2 - 2\,p_1\,q_1 + q_1^2 + p_2^2 - 2\,p_2\,q_2 + q_2^2} \tag{9.9}$$

$evalb(\%)$

$$true \tag{9.10}$$

$M12 := medio(P1, P2)$

$$\left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \tag{9.11}$$

$Retta(p, q)$ # rappresentiamo così la retta passante per i punti p e p (assunti diversi)

$$Retta(p, q) \tag{9.12}$$

$R12 := Retta(P1, P2)$

$$Retta([2, -2], [1, 3]) \tag{9.13}$$

$R23 := Retta(P2, P3)$

$$Retta([1, 3], [-3, 1]) \tag{9.14}$$

$R13 := Retta(P3, P1)$

$$Retta([-3, 1], [2, -2]) \tag{9.15}$$

$equazione(r) := (x - op(1, r)[1])\ (op(2, r)[2] - op(1, r)[2])$ # l'equazione di una retta rappresentata come sopra, nelle indeterminate x e y
$- (y - op(1, r)[2])\ (op(2, r)[1] - op(1, r)[1]) = 0$

$$r \rightarrow \left(x - op(1, r)_1\right)\left(op(2, r)_2 - op(1, r)_2\right) - \left(y - op(1, r)_2\right)\left(op(2, r)_1 - op(1, r)_1\right) = 0 \tag{9.16}$$

$equazione(Retta(p, q))$ # ecco l'equazione della retta per due punti astratti

$$\left(x - p_1\right)\left(q_2 - p_2\right) - \left(y - p_2\right)\left(q_1 - p_1\right) = 0 \tag{9.17}$$

$equazione(R12)$

$$5\,x - 8 + y = 0 \tag{9.18}$$

$equazione(R23)$

$$-2\,x - 10 + 4\,y = 0 \tag{9.19}$$

$inretta(p, r) := evalb(simplify(subs(\{x = p[1], y = p[2]\}, equazione(r))))$ # il punto p sta sulla retta r?

$$(p, r) \rightarrow evalb\left(simplify\left(subs\left(\left\{x = p_1, y = p_2\right\}, equazione(r)\right)\right)\right) \tag{9.20}$$

$inretta(P1, R12)$

$$true \tag{9.21}$$

$inretta(P1, R23)$

$$false \tag{9.22}$$

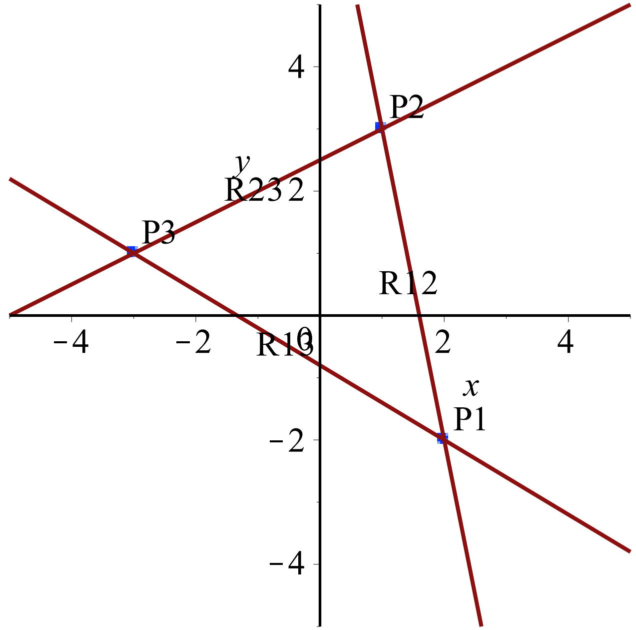
$allineati(p, q, r) := inretta(r, Retta(p, q))$ # i tre punti p,q e r sono allineati?

$$(p, q, r) \rightarrow inretta(r, Retta(p, q)) \tag{9.23}$$

```
allineati(P1, P2, P3)
                                   false                                   (9.24)
allineati(P1, P2, M12)
                                   true                                    (9.25)
disegna := proc(oggetti :: uneval, limx, limy)   # questa procedura disegna una lista di oggetti (punti o rette)
 plots[display](
   map(disogg, oggetti, limx, limy),              # applicando a ciascun oggetto la procedura disogg definita sotto
   view = [op(2, limx), op(2, limy)])             # ... e visualizzando tutto nei limiti assegnati per x e y
end proc :

disogg := proc(ogg :: uneval, limx, limy)         # qui uneval serve per usare i nomi (non valutati) degli oggetti come etichette nel disegno
 local evogg := eval(ogg);
 if type(evogg, list(realcons)) then
   plots[display](plottools[point](evogg, color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 15),
                  TEXT(evogg, convert(ogg, string), ALIGNRIGHT, ALIGNABOVE))
 elif type(evogg, Retta(list(realcons), list(realcons))) then
   (plots[implicitplot](equazione(evogg), limx, limy),
    TEXT(0.5 · (op(1, evogg) + op(2, evogg)), convert(ogg, string)))
 end if
end proc :
```

$disegna([P1, P2, P3, R12, R23, R13], x = -5..5, y = -5..5)$ # *ecco il disegno dei punti e delle rette definiti sopra*

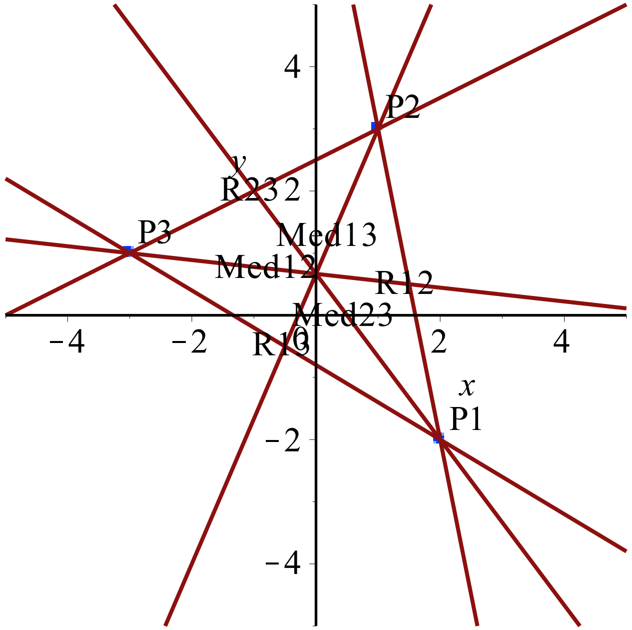


$mediana(p, q, r) := Retta(medio(p, q), r)$ # *la mediana del triangolo pqr rispetto al lato pq*

$$(p, q, r) \rightarrow Retta(medio(p, q), r) \qquad \textbf{(9.26)}$$

$Med12 := mediana(P1, P2, P3):$
$Med23 := mediana(P2, P3, P1):$
$Med13 := mediana(P1, P3, P2):$

$disegna([P1, P2, P3, R12, R23, R13, Med12, Med13, Med23], x=-5..5, y=-5..5)$ *# il disegno delle tre mediane del triangolo sopra*



$intersezione(r, s) := subs(solve(\{equazione(r), equazione(s)\}, \{x, y\}), [x, y])$ *# l'intersezione tra le due rette r e s (assunte incidenti)*

$$(r, s) \rightarrow subs(solve(\{equazione(r), equazione(s)\}, \{x, y\}), [x, y]) \tag{9.27}$$

$intersezione(R12, R23) = P2$ *# una verifica con due rette definite sopra*

$$[1, 3] = [1, 3] \tag{9.28}$$

$mediana(A, B, C)$ *# una mediana del triangolo astratto ABC*

$$Retta\left(\left[\frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} B_1, \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} B_2\right], C\right) \tag{9.29}$$

$mediana(B, C, A)$ *# ... una seconda mediana*

$$Retta\left(\left[\frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{2} C_1, \frac{1}{2} B_2 + \frac{1}{2} C_2\right], A\right) \tag{9.30}$$

$intersezione(\%, \%\%)$ *# ... la loro intersezione*

$$\left[\frac{1}{3} B_1 + \frac{1}{3} A_1 + \frac{1}{3} C_1, \frac{1}{3} B_2 + \frac{1}{3} A_2 + \frac{1}{3} C_2\right] \tag{9.31}$$

$inretta(\%, mediana(A, C, B))$ # il teorema delle madiane

$$true \tag{9.32}$$

$dir(r) := [op(2, r)[1] - op(1, r)[1], op(2, r)[2] - op(1, r)[2]]$ # la direzione della retta r

$$r \rightarrow \left[op(2, r)_1 - op(1, r)_1, op(2, r)_2 - op(1, r)_2\right] \tag{9.33}$$

$dir(Retta(p, q))$

$$\left[q_1 - p_1, q_2 - p_2\right] \tag{9.34}$$

$dir(R12)$

$$[-1, 5] \tag{9.35}$$

$rettapar(r, p) := Retta([p[1], p[2]], [p[1], p[2]] + dir(r))$ # la retta parallela alla retta r e passante per il punto p

$$(r, p) \rightarrow Retta\left(\left[p_1, p_2\right], \left[p_1, p_2\right] + dir(r)\right) \tag{9.36}$$

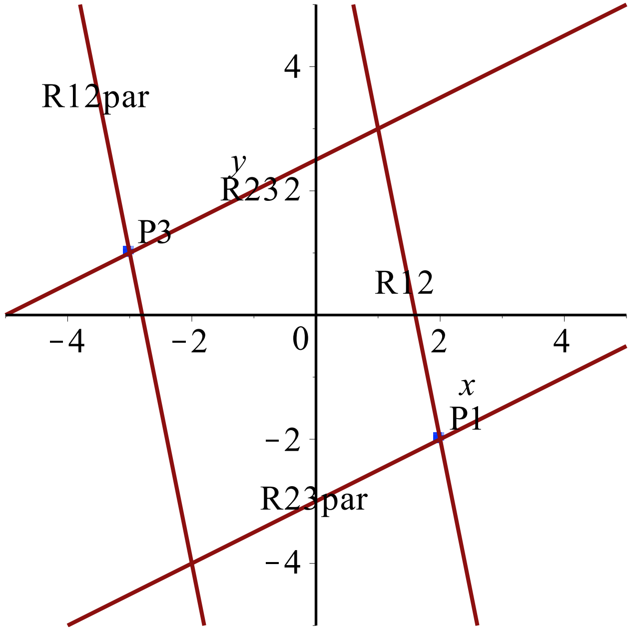
$R12par := rettapar(R12, P3)$

$$Retta([-3, 1], [-4, 6]) \tag{9.37}$$

$R23par := rettapar(R23, P1)$

$$Retta([2, -2], [-2, -4]) \tag{9.38}$$

$disegna([P1, P3, R12, R12par, R23, R23par], x=-5..5, y=-5..5)$



$dirort(r) := [-dir(r)[2], dir(r)[1]]$ # la direzione ortogonale alla retta r

$$r \rightarrow [-dir(r)_2, dir(r)_1] \tag{9.39}$$

$dirort(Retta(p, q))$

$$[-q_2 + p_2, q_1 - p_1] \tag{9.40}$$

$dirort(R12)$

$$[-5, -1] \tag{9.41}$$

$rettaort(r, p) := Retta([p[1], p[2]], [p[1], p[2]] + dirort(r))$ # la retta ortogonale alla retta r e passante per i punto p

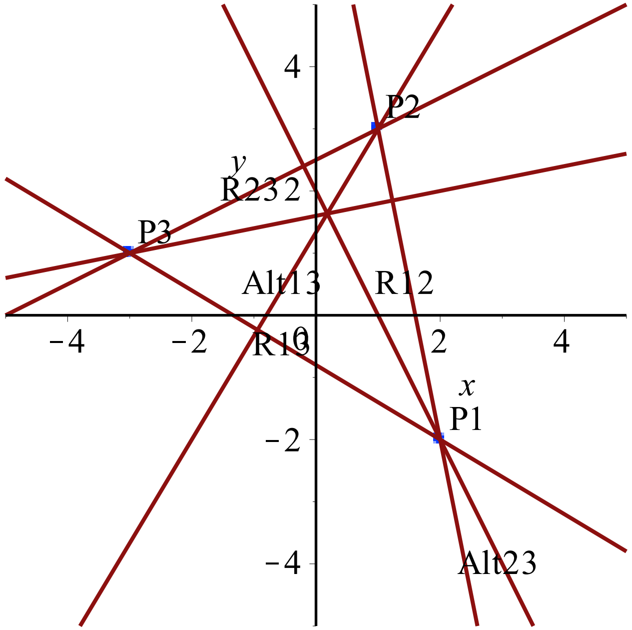
$$(r, p) \rightarrow Retta\left([p_1, p_2], [p_1, p_2] + dirort(r)\right) \tag{9.42}$$

$altezza(p, q, r) := rettaort(Retta(p, q), r)$ # l'altezza del triangolo pqr rispetto al lato pq

$$(p, q, r) \rightarrow rettaort(Retta(p, q), r) \tag{9.43}$$

$Alt12 := altezza(P1, P2, P3) :$
$Alt23 := altezza(P2, P3, P1) :$
$Alt13 := altezza(P1, P3, P2) :$

disegna([*P1*, *P2*, *P3*, *R12*, *R23*, *R13*, *Alt12*, *Alt13*, *Alt23*], $x = -5..5$, $y = -5..5$)   # *il disegno delle tre altezze del triangolo sopra*



altezza(*A*, *B*, *C*)   # *un'altezza del triangolo astratto ABC*

$$Retta([C_1, C_2], [-B_2 + A_2 + C_1, B_1 - A_1 + C_2]) \tag{9.44}$$

altezza(*B*, *C*, *A*)   # *... una seconda altezza*

$$Retta([A_1, A_2], [-C_2 + B_2 + A_1, C_1 - B_1 + A_2]) \tag{9.45}$$

intersezione(%, %%)   # *... la loro intersezione*

$$\left[-\frac{-A_1 C_1 A_2 - B_1 A_1 B_2 + A_1 B_1 A_2 + A_1 C_1 C_2 - C_2^2 B_2 - C_1 B_1 C_2 + C_1 B_1 B_2 + C_2 B_2^2 - A_2^2 C_2 + A_2^2 B_2 - A_2 B_2^2 + A_2 C_2^2}{B_1 C_2 - A_1 C_2 + A_1 B_2 - C_1 B_2 + C_1 A_2 - A_2 B_1}, \right.$$
$$\left. \frac{-A_1 B_1^2 + C_1 A_2 C_2 - B_1 A_2 B_2 - A_1^2 C_1 + A_1^2 B_1 - C_2 C_1 B_2 - A_1 A_2 C_2 + A_1 A_2 B_2 + B_1 C_2 B_2 - C_1^2 B_1 + A_1 C_1^2 + C_1 B_1^2}{B_1 C_2 - A_1 C_2 + A_1 B_2 - C_1 B_2 + C_1 A_2 - A_2 B_1} \right] \tag{9.46}$$

inretta(%, *altezza*(*A*, *C*, *B*))   # *il teorema delle altezze*

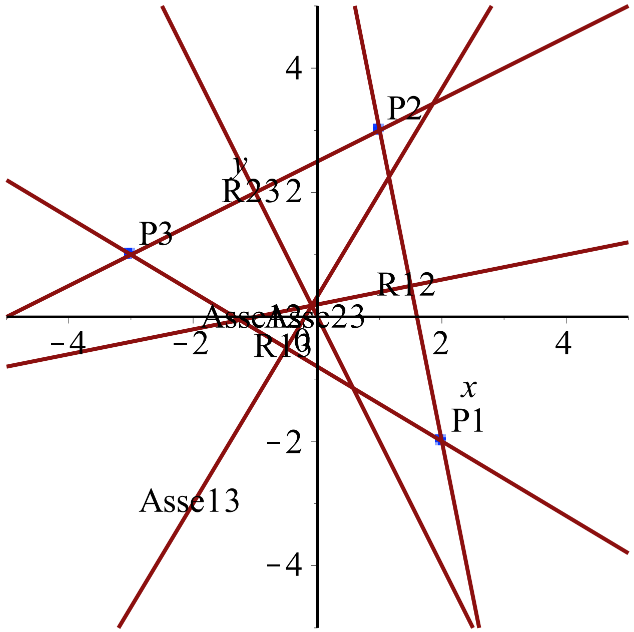
$$true \tag{9.47}$$

$asse(p, q) := rettaort(Retta(p, q), medio(p, q))$ # l'asse di un segmento

$$(p, q) \rightarrow rettaort(Retta(p, q), medio(p, q)) \tag{9.48}$$

$Asse12 := asse(P1, P2):$
$Asse23 := asse(P2, P3):$
$Asse13 := asse(P1, P3):$

$disegna([P1, P2, P3, R12, R23, R13, Asse12, Asse13, Asse23], x = -5..5, y = -5..5)$ # il disegno dei tre assi del triangolo sopra



$asse(A, B)$

$$Retta\left(\left[\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}B_1, \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}B_2\right], \left[-B_2 + A_2 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}B_1, B_1 - A_1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}B_2\right]\right) \tag{9.49}$$

$asse(B, C)$

$$Retta\left(\left[\frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}C_1, \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{2}C_2\right], \left[-C_2 + B_2 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}C_1, C_1 - B_1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{2}C_2\right]\right) \tag{9.50}$$

$intersezione(\%, \%\%)$ # l'intersezione di due assi di un triangolo astratto

$$\left[\frac{1}{2}\,\frac{-A_1^2\,C_2+A_1^2\,B_2-A_2\,B_1^2-A_2\,B_2^2-C_2^2\,B_2+A_2\,C_1^2+B_1^2\,C_2+A_2^2\,B_2+A_2\,C_2^2+C_2\,B_2^2-A_2^2\,C_2-B_2\,C_1^2}{B_1\,C_2-A_1\,C_2+A_1\,B_2-C_1\,B_2+C_1\,A_2-A_2\,B_1},\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\,\frac{-C_1^2\,B_1+C_1\,B_2^2-B_1\,C_2^2-A_1\,B_1^2+A_1\,C_1^2-C_1\,A_2^2-A_1\,B_2^2+A_1\,C_2^2+B_1\,A_2^2-A_1^2\,C_1+C_1\,B_1^2+A_1^2\,B_1}{B_1\,C_2-A_1\,C_2+A_1\,B_2-C_1\,B_2+C_1\,A_2-A_2\,B_1}\right] \quad \textbf{(9.51)}$$

inretta(%, *asse*(*A*, *C*))   *# il teorema degli assi*

$$\mathit{true} \quad \textbf{(9.52)}$$

incidenti(*r*, *s*) ≔ *evalb*(*dir*(*r*)[1] *dir*(*s*)[2] − *dir*(*s*)[1] *dir*(*r*)[2] ≠ 0)   *# le rette r e s sono incidenti?*

$$(r, s) \rightarrow \mathit{evalb}\left(\mathit{dir}(r)_1\,\mathit{dir}(s)_2 - \mathit{dir}(s)_1\,\mathit{dir}(r)_2 \neq 0\right) \quad \textbf{(9.53)}$$

coincidenti(*r*, *s*) ≔ *evalb*(**not** *incidenti*(*r*, *s*) **and** *inretta*(*op*(1, *r*), *s*))   *# le rette r e s sono coincidenti?*

$$(r, s) \rightarrow \mathit{evalb}(\textbf{not}\ \mathit{incidenti}(r, s)\ \textbf{and}\ \mathit{inretta}(\mathit{op}(1, r), s)) \quad \textbf{(9.54)}$$

parallele(*r*, *s*) ≔ *evalb*(**not** *incidenti*(*r*, *s*) **and not** *inretta*(*op*(1, *r*), *s*))   *# le rette r e s sono parallele?*

$$(r, s) \rightarrow \mathit{evalb}(\textbf{not}\ (\mathit{incidenti}(r, s)\ \textbf{or}\ \mathit{inretta}(\mathit{op}(1, r), s))) \quad \textbf{(9.55)}$$

incidenti(*R12*, *R23*), *coincidenti*(*R12*, *R23*), *parallele*(*R12*, *R23*)

$$\mathit{true}, \mathit{false}, \mathit{false} \quad \textbf{(9.56)}$$

incidenti(*R12*, *R12*), *coincidenti*(*R12*, *R12*), *parallele*(*R12*, *R12*)

$$\mathit{false}, \mathit{true}, \mathit{false} \quad \textbf{(9.57)}$$

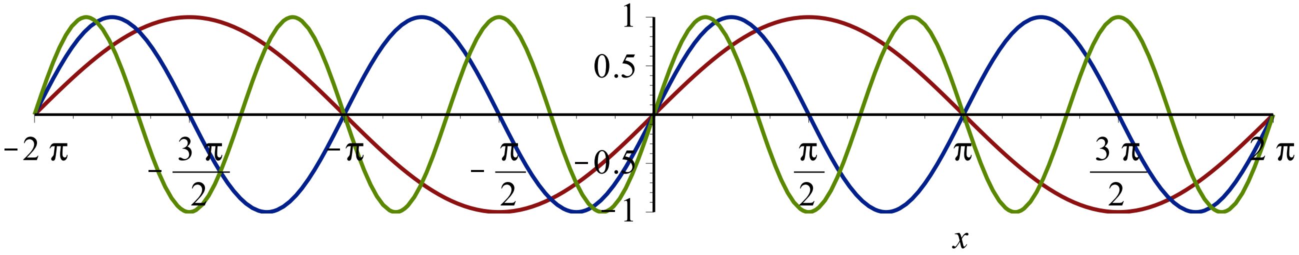
incidenti(*R12*, *R12par*), *coincidenti*(*R12*, *R12par*), *parallele*(*R12*, *R12par*)

$$\mathit{false}, \mathit{false}, \mathit{true} \quad \textbf{(9.58)}$$

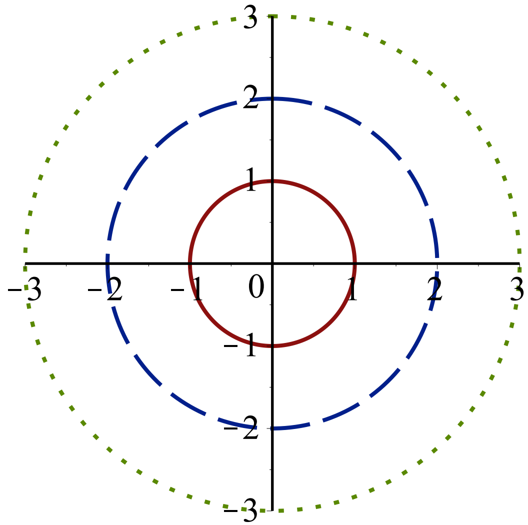
restart

Visualizzazione grafica

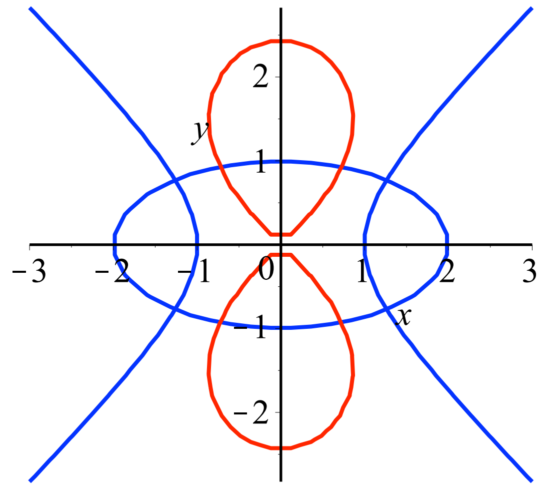
plot([sin(*x*), sin(2 *x*), sin(3 *x*)], *scaling* = *constrained*)   # *plot di funzioni*



plot([[sin(*t*), cos(*t*), *t* = 0 ..2 π], [2 sin(*t*), 2 cos(*t*), *t* = 0 ..2 π], [3 sin(*t*), 3 cos(*t*), *t* = 0 ..2 π]],   # *plot di curve parametrizzate*
scaling = *constrained*, *linestyle* = [*solid*, *dash*, *dot*])

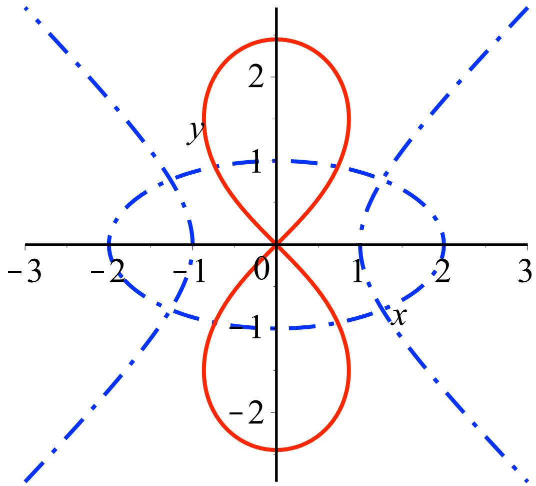


$plots[implicitplot]\left(\left[x^2+4\,y^2=4,\, x^2-y^2=1,\, \left(x^2+y^2\right)^2+6\left(x^2-y^2\right)=0\right], x=-3..3, y=-3..3,\right.$ # plot implicito di curve (del package plots)
$\left. scaling=constrained, color=[blue, blue, red]\right)$



$plots[implicitplot]\left(\left[x^2+4\,y^2=4,\,x^2-y^2=1,\,\left(x^2+y^2\right)^2+6\left(x^2-y^2\right)=0\right],\,x=-3\,..3,\,y=-3\,..3,\right.$ *# raffiniamo la griglia per migliorare il plot*

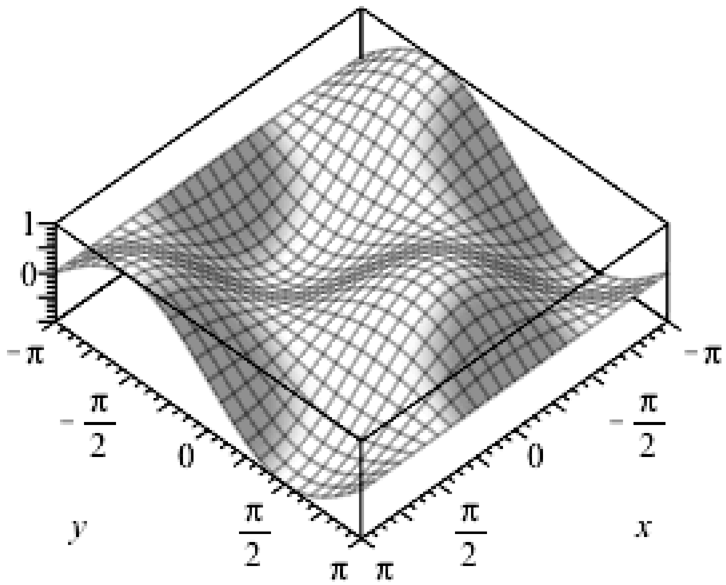
$\left.scaling=constrained,\,color=[blue,\,blue,\,red],\,gridrefine=2,\,linestyle=[dashdot,\,dashdot,\,solid]\right)$



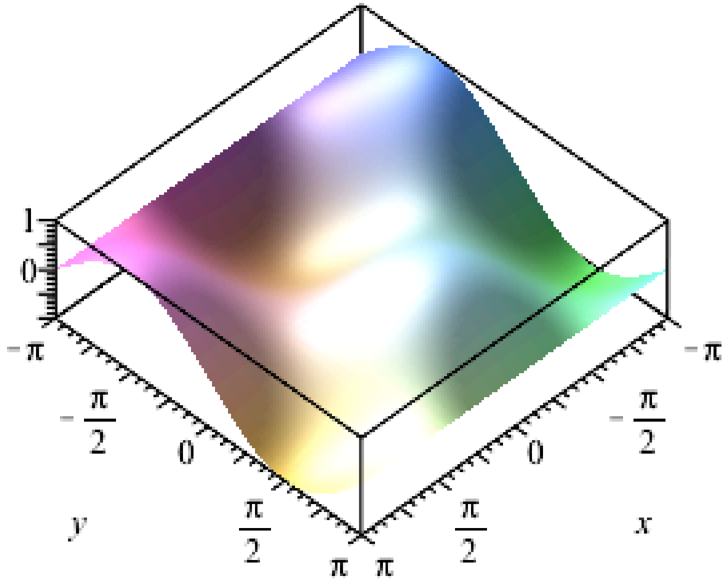
$f(x, y) := \cos(x)\ \sin(y)$

$$(x, y) \rightarrow \cos(x)\ \sin(y) \tag{10.1}$$

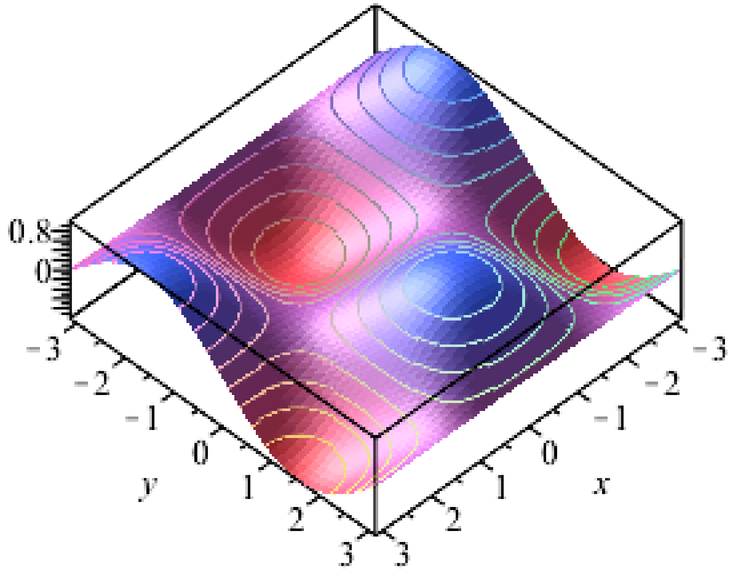
plot3d$\left(f(x, y), x = -\pi\,..\pi, y = -\pi\,..\pi, axes = boxed, scaling = constrained, color = white \right)$ *# plot di una funzione in due variabili*



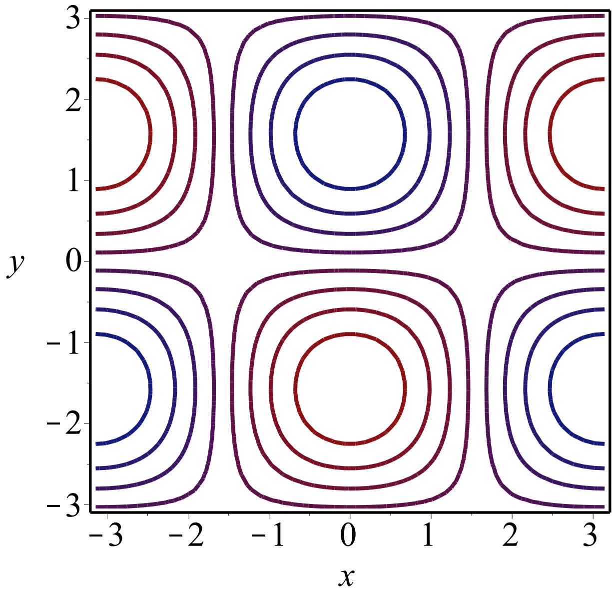
$plot3d\left(f(x, y), x=-\pi..\pi, y=-\pi..\pi, axes=boxed, scaling=constrained, style=surface\right)$ # *un diverso modo di visualizzare la superficie*



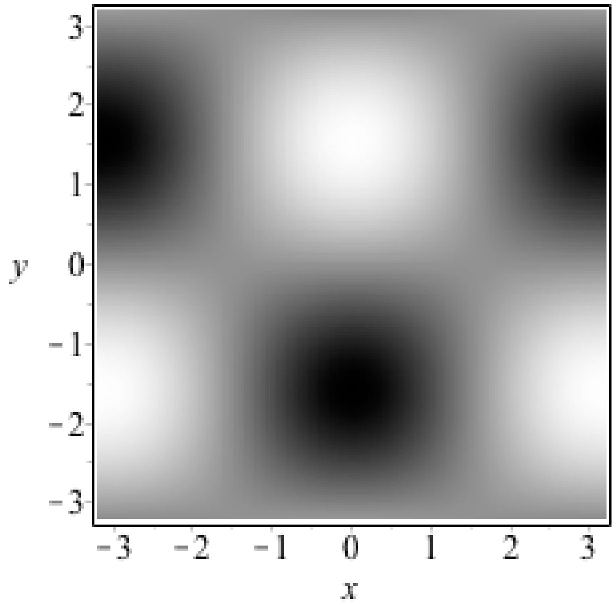
$plots[contourplot3d]\left(f(x,y), x=-\pi..\pi, y=-\pi..\pi,\right.$ # qui con le curve di livello (usando il comando contourplot3d del package plots)
$\left. axes = boxed, scaling = constrained, filledregions = true\right)$



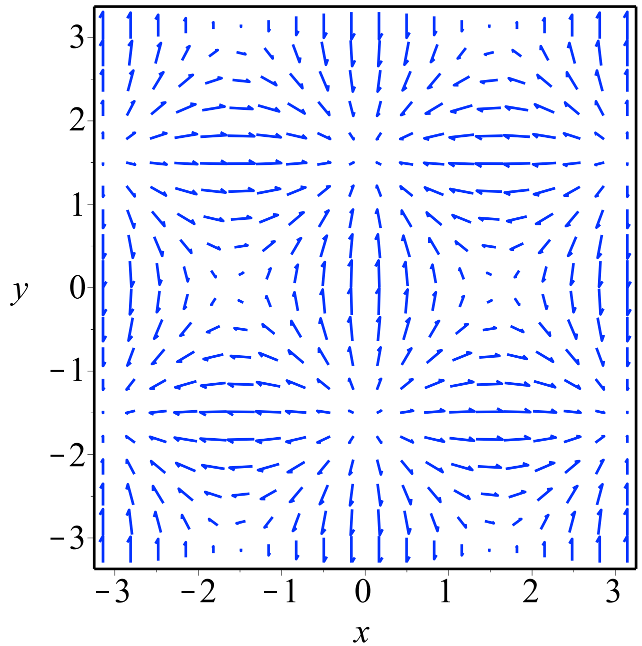
$plots[contourplot]\left(f(x, y), x = -\pi..\pi, y = -\pi..\pi,\right.$ # *contourplot per le curve di livello nel dominio*
$\left. axes = boxed, scaling = constrained\right)$



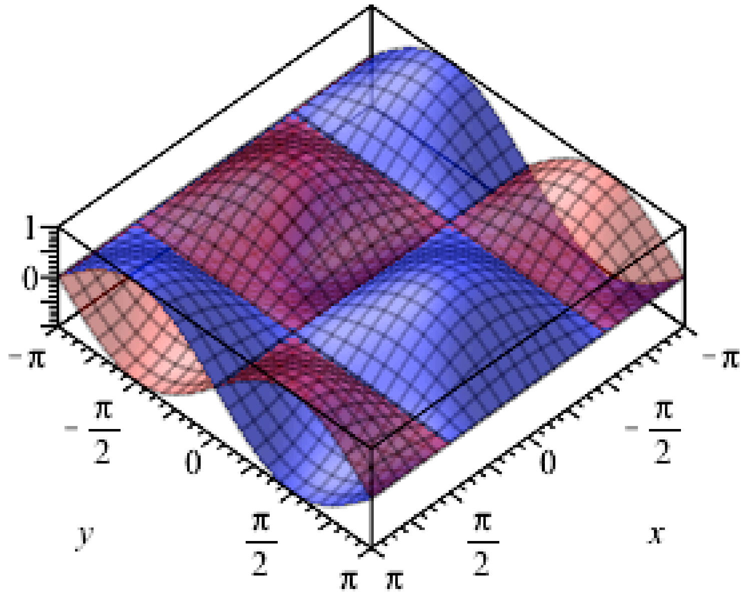
$plots[densityplot]\left(f(x, y), x = -\pi..\pi, y = -\pi..\pi,\right.$ # *densityplot per rappresentare i valori come tonalità nel dominio*
$\left. axes = boxed, scaling = constrained, style = patchnogrid\right)$



$plots[fieldplot]\left([diff(f(x,y),x), diff(f(x,y),y)], x=-\pi..\pi, y=-\pi..\pi,\right.$ # con fieldplot possiamo rappresentare il gradiente
$\left. axes = boxed, scaling = constrained, color = blue\right)$



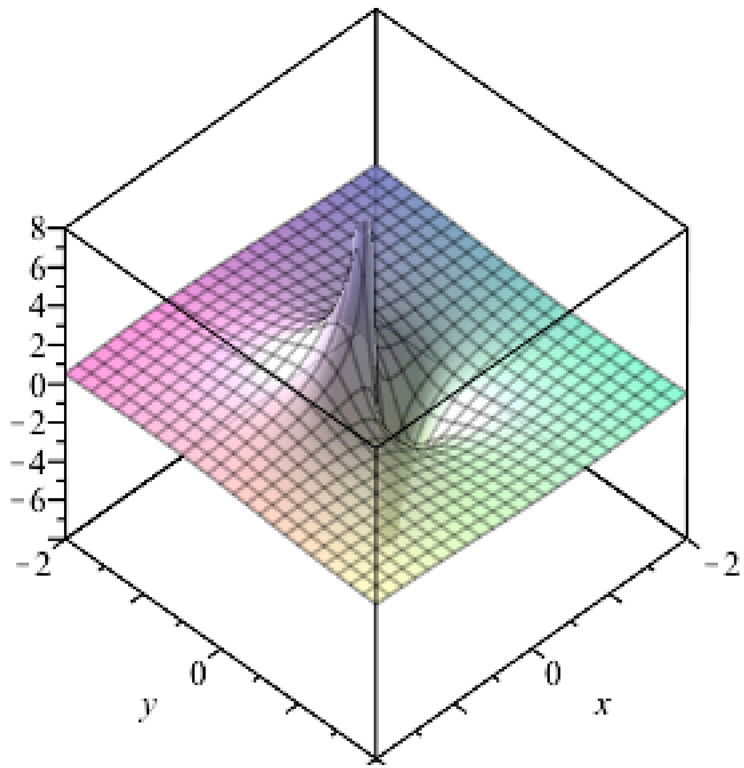
$plot3d\left(\left[f(x,y), -f(x,y)\right], x=-\pi..\pi, y=-\pi..\pi,\right.$ *# la trasparenza può essere utile per rappresentare di grafici di più funzioni*
$\left.axes = boxed, scaling = constrained, transparency = 0.5, color = \left[blue, red\right]\right)$



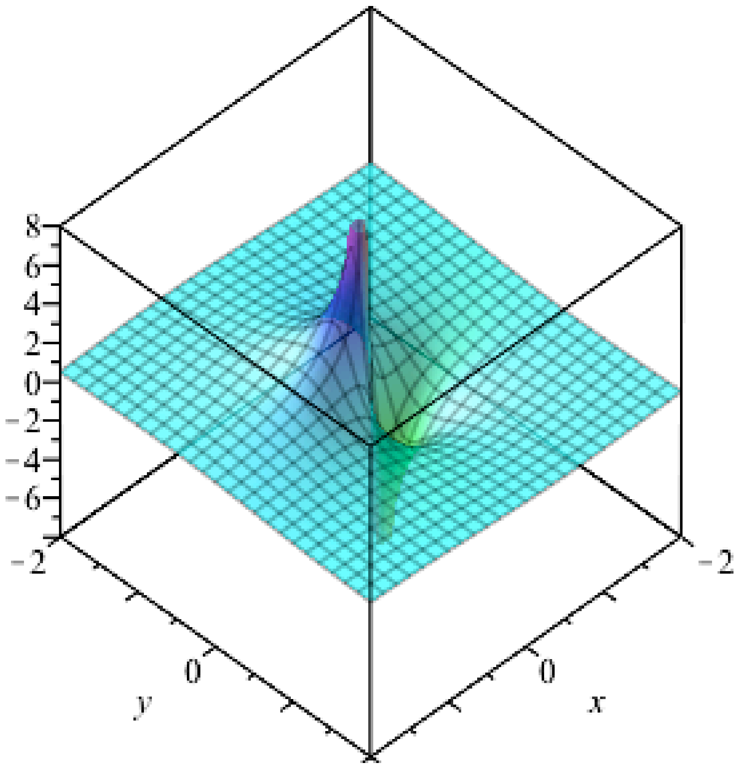
$g(x, y) := \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$

$$(x, y) \rightarrow \frac{x - y}{x^2 + y^2} \qquad \textbf{(10.2)}$$

plot3d$(g(x, y), x = -2..2, y = -2..2, view = [-2..2, -2..2, -8..8], axes = boxed, transparency = 0.35)$ # *... oppure il grafici più complessi*



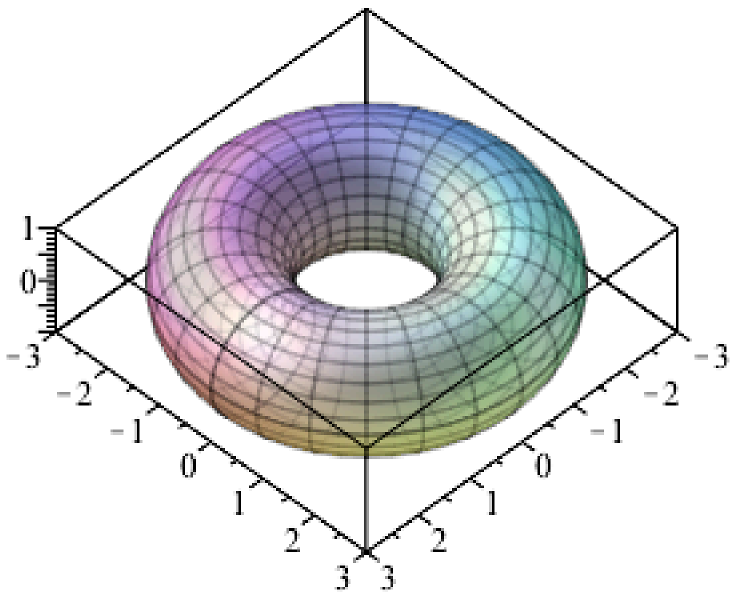
$plot3d(g(x, y), x = -2..2, y = -2..2, view = [-2..2, -2..2, -8..8], axes = boxed, transparency = 0.5, color = g(x, y))$



$toro(s,t) := (\cos(t)\,(2+\cos(s)), \sin(t)\,(2+\cos(s)), \sin(s))$ *# parametrizzazione del toro*

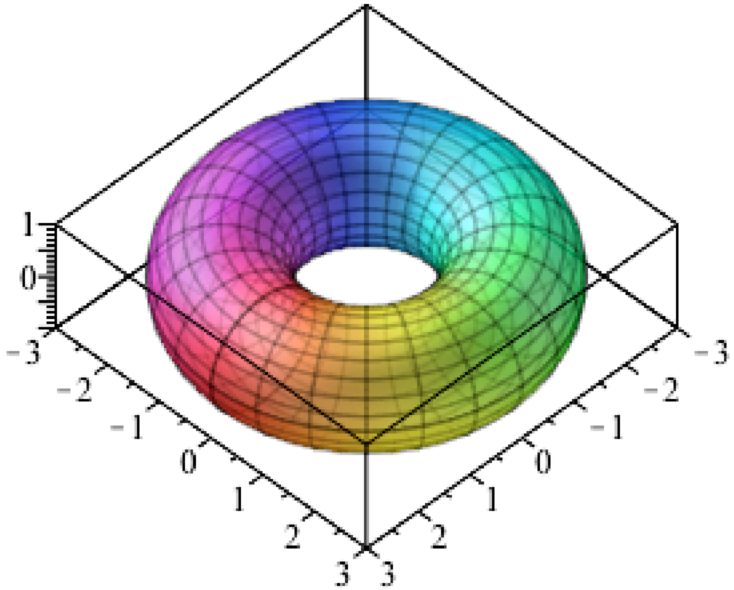
$$(s,t) \rightarrow (\cos(t)\,(2+\cos(s)), \sin(t)\,(2+\cos(s)), \sin(s)) \tag{10.3}$$

$plot3d([toro(s,t)], s = 0..2\pi, t = 0..2\pi,$ *# plot di una superficie parametrizzata*
$scaling = constrained, axes = boxed, transparency = 0.5)$

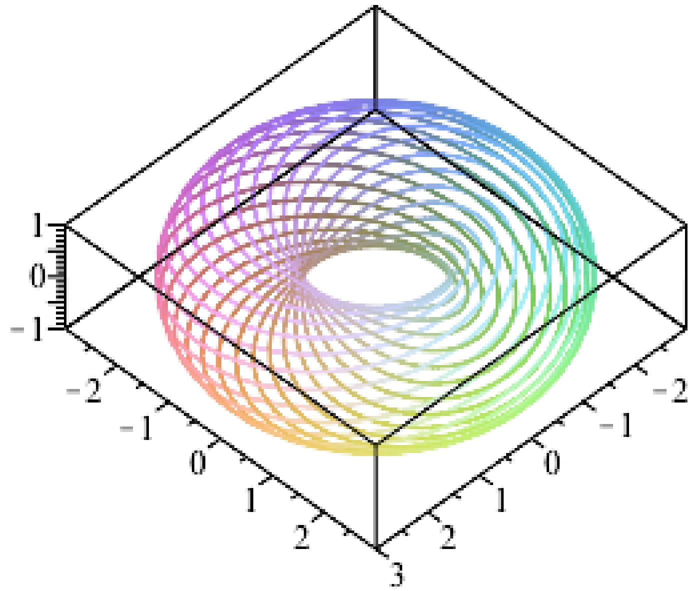


$plot3d\left([toro(s,t)], s = 0..2\,\pi, t = 0..2\,\pi,\right.$ # ... *qui colorata in funzione dei parametri*

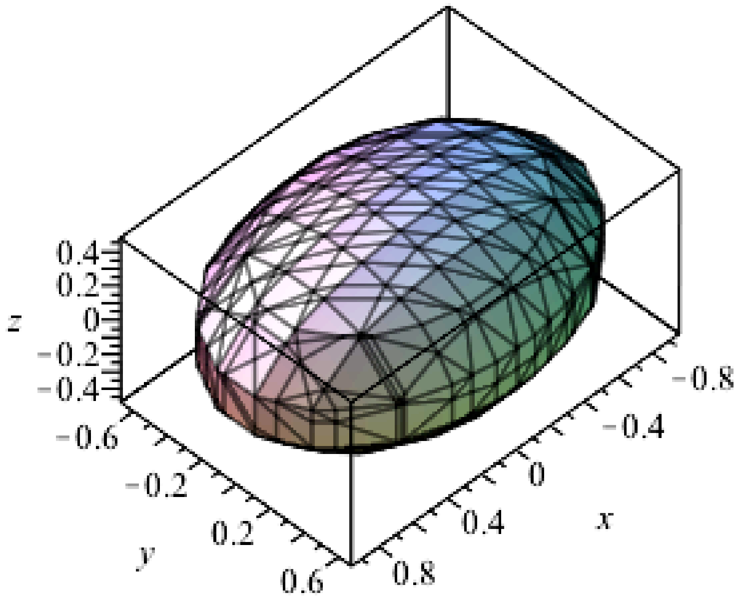
$\left. scaling = constrained, axes = boxed, transparency = 0.5, color = \frac{t}{2\,\pi} \right)$



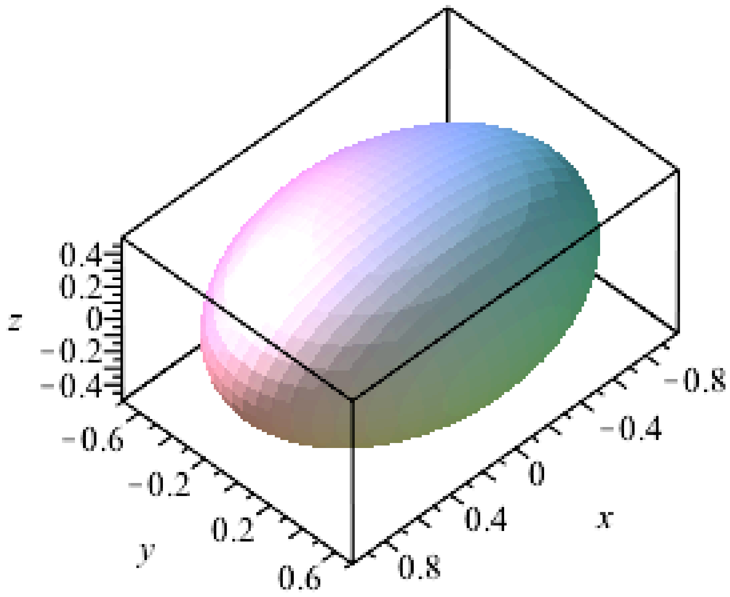
$plots[spacecurve]\left([toro(16\, t, 25\, t)], t = 0 \,..2\,\pi,\right.$ # *plot di una curva parametrizzata nello spazio*
$\left. scaling = constrained, axes = boxed, numpoints = 1000\right)$



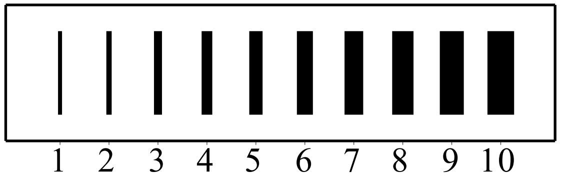
$plots[implicitplot3d]\left(x^2 + 2\,y^2 + 4\,z^2 = 1, x = -1\,..1, y = -1\,..1, z = -1\,..1,\right.$ # *plot implicito di una superficie*
$\left.axes = boxed, scaling = constrained\right)$



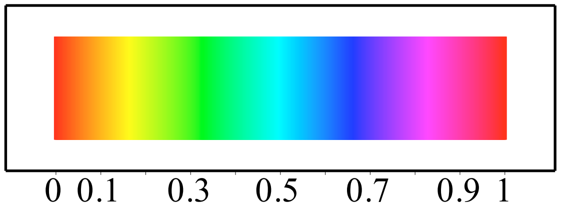
$plots[implicitplot3d](x^2 + 2\,y^2 + 4\,z^2 = 1, x = -1\,..1, y = -1\,..1, z = -1\,..1,$ # *con una griglia più fine e senza i bordi delle faccette*
$axes = boxed, scaling = constrained, grid = [30, 30, 30], style = surface)$



```
plots[display](seq(plottools[line]([t,-1], [t, 1], thickness = t), t = 1 ..10),   # gli spessori delle curve
  axes = box, view = [0 ..11,-1.5 ..1.5], tickmarks = [[$ 1 ..10], [ ]])
```




```
plots[display](seq(plottools[line]([t,-1], [t, 1], color = HUE(t)), t = 0 ..1, 0.001),   # lo spettro dei colori
  axes = box, view = [-0.1 ..1.1,-1.5 ..1.5], tickmarks = [[seq(0 ..1, 0.1)], [ ]])
```



PLOT(*POINTS*([1, 3], [1, 5], [1, 7], *COLOR*(*RGB*, 1, 0, 0)),

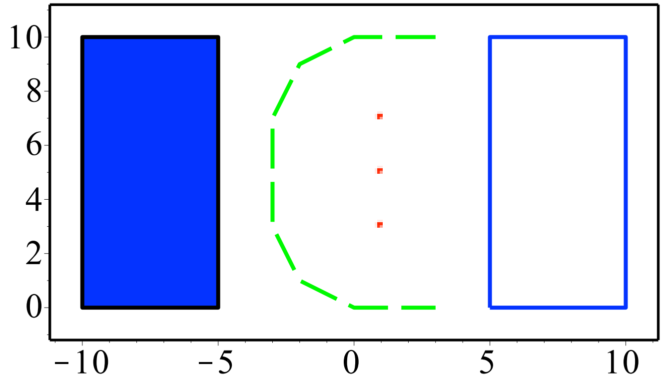
 # la struttura interna di un plot bidimensionale (che si può ottenere con un comando plot)

CURVES([[3, 10], [0, 10], [−2, 9], [−3, 7], [−3, 3], [−2, 1], [0, 0], [3, 0]], *COLOR*(*RGB*, 0, 1, 0), *LINESTYLE*(*DASH*)),

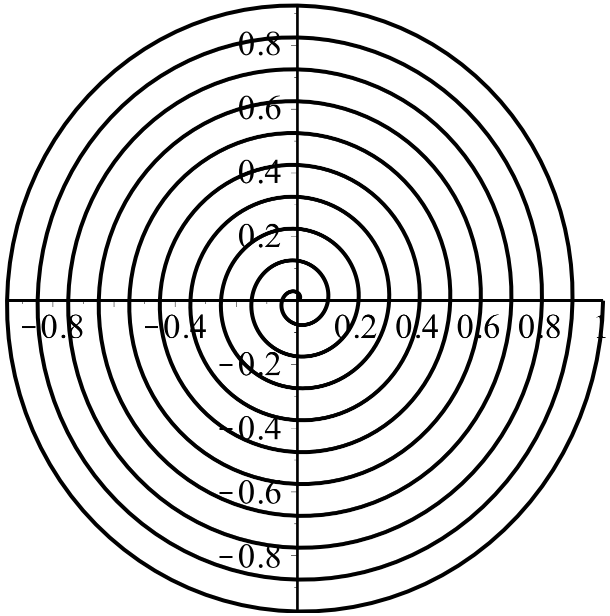
POLYGONS([[−5, 0], [−10, 0], [−10, 10], [−5, 10]], *COLOR*(*RGB*, 0, 0, 1)),

POLYGONS([[5, 0], [10, 0], [10, 10], [5, 10]], *COLOR*(*RGB*, 0, 0, 1), *STYLE*(*LINE*)),

AXESSTYLE(*BOX*), *VIEW*(−11 ..11,−1 ..11), *SCALING*(*CONSTRAINED*), *SYMBOL*(*_SOLIDCIRCLE*))

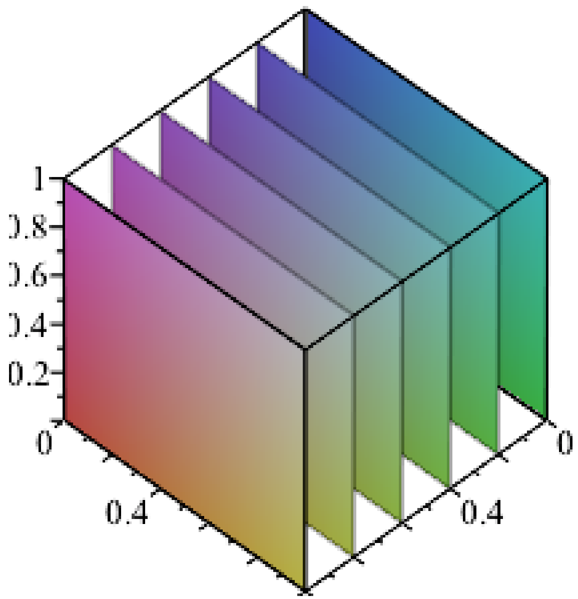


$$PLOT\left(CURVES\left(\left[evalf\left(seq\left(\left[\frac{t\cos(2\pi t)}{10}, \frac{t\sin(2\pi t)}{10}\right], t = 0..10, 0.01\right)\right)\right]\right)\right)$$ *# ... o anche generare direttamente*



$PLOT3D(POLYGONS(seq([[t, 0, 0], [t, 0, 1], [t, 1, 1], [t, 1, 0]], t = 0 ..1, 0.2)), AXESSTYLE(BOX))$

 # la struttura interna di un plot 3 tridimensionale



$$dt := 0.01 :$$

$$pts := seq\left(\left[\left[\frac{t\cos(2\,\pi\,t)}{10}, \frac{t\sin(2\,\pi\,t)}{10}, 1\right], \left[\frac{(t+dt)\cos(2\,\pi\,(t+dt))}{10}, \frac{(t+dt)\sin(2\,\pi\,(t+dt))}{10}, 1\right], [0, 0, 0]\right], t = 0\,..3, dt\right) :$$

PLOT3D(*POLYGONS*(*evalf*(*pts*)), *AXESSTYLE*(*BOX*), *STYLE*(*PATCHNOGRID*)) # ... *ecco come generare una superficie*