Insiemi di Julia e di Mandelbrot

1) L_0 è il cerchio unitario
2) L_c si deforma con continuità al variare di c
3) $J_c = \operatorname{Bd} L_c$ è una insieme frattale "autosimile"
   ricostruibile da un qualunque tratto (Julia 1918)
4) J_c e L_c sono connessi o totalmente sconnessi
5) J_c e L_c sono connessi se e solo se L_c contiene l'origine
6) $M = \{c \mid J_c \text{ e } L_c \text{ sono connessi}\}$ (Mandelbrot 1980)
7) $\operatorname{Bd} M$ è una insieme frattale "autosimile"
   di complessità crescente col dettaglio

Tutto è generato dalle funzioni quadratiche $z \mapsto z^2 + c$

Numeri complessi

$$az^2 + bz + c = 0 \rightsquigarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{se} \quad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, i \quad \text{se} \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$z = x + y\,i$ non solo come rappresentazione formale
(verifica delle soluzioni $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$ per $z^2 - z + 1 = 0$)

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \rightsquigarrow z^3 + pz + q = 0$$

$$\rightsquigarrow z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad \text{con} \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

$\rightsquigarrow$ soluzioni reali anche se $\Delta < 0$ ponendo $a \pm b\,i = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta}}$
($z^3 - 15z - 4 = 0 \rightsquigarrow z = 4$ con $a = 2$ e $b = 1$)

$\mathbb{C} := \{x + y\,i \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$z + z' = (x + y\,i) + (x' + y'\,i) = (x + x') + (y + y')\,i$$

$$z \cdot z' = (x + y\,i)\,(x' + y'\,i) = (x\,x' - y\,y') + (x\,y' + x'\,y)\,i$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni equazione algebrica $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$
a coefficienti in $\mathbb{C}$ ha una soluzione $z = x + y\,i$ in $\mathbb{C}$
(quindi ogni equazione algebrica reale è risolubile in $\mathbb{C}$)

Piano di Gauss

$\mathbb{C} \leftrightsquigarrow$ piano cartesiano $(z = x + y\,i \leftrightarrow (x, y) \leftrightarrow r\,(\cos\alpha, \sin\alpha))$
$\mathbb{R} \leftrightsquigarrow$ retta reale (asse x) $\mathbb{R}\,i \leftrightsquigarrow$ retta immaginaria (asse y)
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ (modulo) $\operatorname{Arg} z = \alpha = \operatorname{arctg} y/x$ (argomento)

$z + z' \leftrightarrow (x + x', y + y')$ (regola del parallelogramma)
$z \cdot z' \leftrightarrow (x\,x' - y\,y', x\,y' + x'\,y) \leftrightarrow r\,r'\,(\cos(\alpha + \alpha'), \sin(\alpha + \alpha'))$

$|z| - |z'| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$ (proprietà triangolare)
$|z \cdot z'| = |z|\,|z'|$ e $\operatorname{Arg}(z \cdot z') = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z'$

Insiemi di Julia

Fissato $c \in \mathbb{C}$ consideriamo la funzione quadratica $z \mapsto z^2 + c$
$z \rightsquigarrow z \mapsto z_1 = z^2 + c \mapsto z_2 = z_1^2 + c \mapsto z_3 = z_2^2 + c \mapsto \ldots$

$L_c := \{z \in \mathbb{C} \mid z \mapsto z_1 \mapsto z_2 \mapsto \ldots \mapsto z_n \mapsto \ldots$ succ. limitata$\}$
(cioè esiste $R > 0$ tale che $|z_n| \leq R$ per ogni $n \geq 0$)

$c = 0 \rightsquigarrow z \mapsto z^2 \mapsto \ldots \mapsto z^{2n} \mapsto \ldots$ limitata se e solo se $|z| \leq 1$
($L_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ = cerchio unitario)
$c = -1 \rightsquigarrow 0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto \ldots$ limitata $(0, -1 \in L_{-1})$
$\pm 1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto \ldots$ limitata $(1 \in L_{-1})$
$\pm\,i \mapsto -2 \mapsto 3 \mapsto 8 \mapsto \ldots$ illimitata $(\pm\,i, -2, 3, 8 \notin L_{-1})$
$c = 1 \rightsquigarrow 0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 5 \mapsto \ldots$ illimitata $(0, 1, 2, 5, \ldots \notin L_1)$
$\pm 1 \mapsto 2 \mapsto 5 \mapsto 26 \mapsto \ldots$ illimitata $(-1, 26 \notin L_1)$
$\pm\,i \mapsto 0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto \ldots$ illimitata $(\pm i \notin L_1)$
$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \mapsto \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \mapsto \ldots$ limitata $(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \in L_1)$

Alcune proprietà degli insiemi L_c:
1) $L_c \neq \varnothing$ $(z^2 - z + c = 0 \Rightarrow z = z_1 = \ldots = z_n = \ldots$ costante$)$
2) L_c simmetrico rispetto all'origine $(\pm z = \pm z_0 \mapsto z_1 = z_0^2 + c)$
3) L_c è limitato $(|z| \geq |c| \Rightarrow |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq (|z| - 1)|z|$
$|z| > 2 \Rightarrow |z| - 1 > 1 \Rightarrow |z_n| \geq (|z| - 1)^n |z| \to \infty)$
4) $J_c := \operatorname{Bd} L_c$ è simmetrico rispetto all'origine e limitato
e, se connesso, è una "curva" di lunghezza infinita

Insieme di Mandelbrot

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid L_c \text{ connesso}\} = \{c \in \mathbb{C} \mid 0 \in L_c\}$$
$$= \{c \in \mathbb{C} \mid c \mapsto c_1 \mapsto c_2 \mapsto \ldots \mapsto c_n \mapsto \ldots \text{ succ. limitata}\}$$

Alcune proprietà di M:

1) $M \neq \varnothing$ (M contiene 0, -1 e $\pm i$, ma non contiene 1 e $1 \pm i$
$$c = \pm i \mapsto -1 \pm i \mapsto \mp i \mapsto -1 \pm i \mapsto \ldots \text{ limitata}$$
$$c = 1 \pm i \mapsto 1 \pm 3\,i \mapsto \ldots \text{ illimitata})$$
2) M è simmetrico rispetto all'asse reale
($c = a + b\,i \mapsto \bar{c} = a - b\,i \leftrightsquigarrow$ simmetria
$c \rightsquigarrow c \mapsto c_1 \mapsto c_2 \mapsto \ldots \Rightarrow \bar{c} \rightsquigarrow \bar{c} \mapsto \bar{c}_1 \mapsto \bar{c}_2 \mapsto \ldots$)
3) M è limitato ($|c| > 2 \Rightarrow c \mapsto c_1 \mapsto c_2 \mapsto \ldots$ illimitata)
4) $\mathrm{Bd}\, M$ è una "curva" simmetrica limitata di lunghezza infinita

Algoritmo per la rappresentazione di M

(colore del pixel $(a, b) \leftrightsquigarrow c = a + b\,i$ con $|c| < 2$)

m = massimo numero di iterazioni

inizio
  $x := 0\,;\ y := 0\,;\ n := 0$
  finché $n \leq m$ e $x^2 + y^2 \leq 4$ **ripeti**
    $x := x^2 - y^2 + a\,;\ y := 2xy + b\,;\ n := n + 1$
  se $n = m + 1$ **allora** *nero* **altrimenti** *colore*(n)
fine

Lunghezza di una curva

$C \subset \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow l(C) := \lim_{\delta(P) \to 0} l(P)$
con P poligonale inscritta in C
e $\delta(P)$ = massima lunghezza dei lati di P

S = semicirconf. unitaria $\rightsquigarrow l(S) = \lim_{n \to \infty} n \sin(\pi/n) = \pi$

K = curva di Koch $\rightsquigarrow l(K) = \lim_{n \to \infty} (4/3)^n = \infty$
(K è limite di poligonali T_n con 4^n lati di lunghezza $1/3^n$)

Dimensione frattale di una curva

$C \subset R^2 \rightsquigarrow l_\delta(C) := \min_{\delta(P)\leq\delta} l(P)$ per ogni $\delta > 0$

$d(C) := 1 - \lim_{\delta\to 0} \log l_\delta(C)/\log\delta$ (Mandelbrot 1967)

1) $l(C) < \infty \not\Leftarrow\Rightarrow d(C) = 1$ (C curva "regolare")
2) $l(C) = \infty \Leftarrow\not\Rightarrow d(C) > 1$ (C curva "frattale")
   $d(C)$ misura la rapidità con cui $l_\delta(C) \to \infty$ quando $\delta \to 0$
   $(l_\delta(C) \propto \delta^{-\alpha} \Rightarrow d(C) = 1 - \lim_{\delta\to 0} \log\delta^{-\alpha}/\log\delta = 1 + \alpha)$
3) d è invariante rispetto alle similitudini
   (σ similitudine con rapporto $r \Rightarrow l_{r\delta}(\sigma(C)) = r\, l_\delta(C)$)

Curve autosimili

$C = \sigma_1(C) \cup \ldots \cup \sigma_n(C)$, σ_i similitudine con rapporto r_i

$[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1] = \sigma_1([0,1]) \cup \sigma_2([0,1])$ con $r_1 = r_2 = 1/2$

$K = \sigma_1(K) \cup \sigma_2(K) \cup \sigma_3(K) \cup \sigma_4(K)$ con $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/3$

C autosimile non rettilinea $\Rightarrow$ C frattale

($C = \sigma_1(C) \cup \ldots \cup \sigma_n(C)$, σ_i similitudine con rapporto r

$\Rightarrow l_{r\delta}(C) = l_{r\delta}(\sigma_1(C)) + \ldots + l_{r\delta}(\sigma_n(C)) = nr l_\delta(C)$

$\Rightarrow l_\delta(C) \propto \delta^{1+\log n/\log r} \Rightarrow d(C) = \log n/\log r$)

1) $d(K) = \log 4/\log 3$
2) $1 \leq a < 2 \rightsquigarrow K_a \subset R^2$ curva con $d(K_a) = a$
   ($a = 2 \rightsquigarrow K_2 \subset R^2$ che non è più una "curva")

J_c è "autosimile" mediante "riduzioni con distorsione"

($z \mapsto z^2 + c \Rightarrow L_c \mapsto L_c \Rightarrow J_c \mapsto J_c$ ($z_1, z_2 \in J_c \mapsto z \in J_c$)

$\rightsquigarrow J_c = J_c^1 \cup J_c^2$ con J_c^1 e J_c^2 copie ridotte e distorte di J_c)

$\mathrm{Bd}\, M$ è "autosimile" mediante "riduzioni con varianti"

(con ogni riduzione aumenta la complessità)

J_c e $\mathrm{Bd}\, M$ curve "autosimili" $\Rightarrow$ curve frattali

Esempi di autosimilarità (statistica) in natura

Curve litoranee, rilievi terrestri, crateri lunari
Fenomeni di turbolenza, distribuzione delle galassie
Moti browniani, fenomeni di diffusione
Disturbi radio, fenomeni sismici
Struttura dei tessuti cellulari, forme biologiche

1) L'autosimilarità in natura si presenta limitatamente ad un certo intervallo di scale
2) Le strutture in evoluzione (per es. sviluppo di strutture biologiche) presentano "autosimilarità" con distorsione
3) In tutti i casi la dimensione frattale ha un significato fisico

Esempi di applicazioni

Classificazione di strutture geologiche/biologiche
Studio di processi di evoluzione chimico/fisici
Analisi delle sequenze di errori nelle trasmissioni
Analisi di serie storiche (andamento della borsa)
Visione artificiale (riconoscimento delle tessiture)
Compressione di immagini digitalizzate
Generazione di scenari virtuali

Letture consigliate

1) Benoît B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali - Forma, caso e dimensione*, Einaudi, Torino 1987.
2) H.O. Peitgen e P.H. Richten, *La bellezza dei frattali*, Bollati Boringhieri, Torino 1987.
3) Keith Devlin, *Dove va la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.