Fiocco di neve (Koch 1904)

$K =$ limite uniforme di poligonali chiuse $T_k \subset R^2$

isotopie elem. $T_0 \rightsquigarrow T_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow T_k \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow K$

$\Rightarrow K$ curva di Jordan $\Rightarrow \dim K = 1$ (dim. topologica)

Dimensione topologica

Cantor (1877): non si può definire come numero di parametri

Peano (1890): neppure parametri continui (curva di Peano)

Brouwer (1911): teorema di invarianza del dominio

$\rightsquigarrow$ dimensione come concetto topologico

Lebesgue (1911): nozione intuitiva di cov (dim. per ricoprim.)

Poincaré (1912): nozione intuitiva di ind (dim. induttiva)

Menger-Urysohn (1922): 1) $\operatorname{ind} \varnothing \overset{\text{def}}{=\!=} -1$

2) $\operatorname{ind} X \overset{\text{def}}{=\!=} \min n$ tale che $\exists\, \mathcal{B}$ base (di int.) con $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} B < n \;\forall B \in \mathcal{B}$

Cech (1933): $\operatorname{cov} X \overset{\text{def}}{=\!=} \min n$ t.c. $\forall \mathcal{U}\, \exists \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ con $\operatorname{ord} \mathcal{V} \leq n+1$

Brouwer-Menger-Urysohn-Hurewicz (1924-1927):

$\dim X \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{ind} X = \operatorname{cov} X$ se $X$ metrizzabile separabile

Proprietà della dimensione topologica:

1) $X \cong Y \Rightarrow \dim X = \dim Y$

2) $X \subset Y \Rightarrow \dim X \leq \dim Y$

3) $\dim X \cup Y \leq \max(\dim X, \dim Y) + 1$

($\dim X \cup Y = \max(\dim X, \dim Y)$ se $X, Y$ chiusi in $X \cup Y$)

4) $\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y$

(vale $=$ se $\dim X = 0$ o se $\dim X = 1$ e $Y$ loc. compatto)

5) $\dim R^n = n$ ($\dim R = 1$ e proprietà 4)

$X \subset R^n$ ha punti interni $\Leftrightarrow \dim X = n$

$X \subset R^n$ aperto/chiuso $\Rightarrow \dim \operatorname{Fr} X = n-1$

$X \subset R^n$ separa $R^n \Rightarrow \dim X \geq n-1$

Lunghezza di $K$

$L(K) = \lim_{k\to\infty} L(T_k) = \lim_{k\to\infty} \#(\text{lati}) \cdot L(\text{lati}) = \infty$
$(L(T_k) = (3 \cdot 4^k) \cdot 1/3^k = 3 \cdot (4/3)^k) \rightsquigarrow$ lunghezza infinita)

$L'(K) = \lim_{k\to\infty} L'(T_k) = \lim_{k\to\infty} \#(\text{lati}) \cdot L(\text{lati})^2 = 0$
$(L'(T_k) = (3 \cdot 4^k) \cdot 1/3^{2k} = 3 \cdot (4/9)^k) \rightsquigarrow$ area nulla)

Misura di Caratheodory-Hausdorff

Caratheodory (1914): misura esterna $n$-dim. per $X \subset R^m$
$H_n^\delta X = \inf_{|\mathcal{U}|<\delta} \Sigma_{U\in\mathcal{U}} |U|^n \rightsquigarrow H_n X = \lim_{\delta\to 0} H_n^\delta X = \sup H_n^\delta X$
$(n = m \rightsquigarrow L_n X = c_n H_n X$ misura esterna di Lebesgue)

Hausdorff (1919): misura esterna $r$-dim. per $X = (X, d)$
$H_r^\delta X = \inf_{|\mathcal{U}|<\delta} \Sigma_{U\in\mathcal{U}} |U|^r \rightsquigarrow H_r X = \lim_{\delta\to 0} H_r^\delta X = \sup H_r^\delta X$

Proprietà della misura di Hausdorff:

1) $H_0 X = \infty$ se $X$ è infinito
2) $H_r X < \infty \Rightarrow H_s X = 0 \quad \forall\, s > r \geq 0 \; (H_s^\delta X \leq \delta^{s-r} H_r^\delta X)$
3) $f : X \to Y$ $k$-lip $\Rightarrow H_r f(X) \leq k^r H_r X \quad \forall\, r \geq 0$

Dimensione di Hausdorff

$\dim_H X \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sup\{r \mid H_r X = \infty\} = \inf\{r \mid H_r X = 0\}$
$(n(\delta) = \inf_{|\mathcal{U}|<\delta}$ infinito di ordine $\dim_H X$ per $\delta \to 0)$

Proprietà della dimensione di Hausdorff:

1) $X \cong_{\text{lip}} Y \Rightarrow \dim_H X = \dim_H Y$
2) $X \subset Y \Rightarrow \dim_H X \leq \dim_H Y$
3) $\dim_H X \cup Y = \max(\dim_H X, \dim_H Y)$
4) $\dim_H X \times Y \geq \dim_H X + \dim_H Y$
5) $\dim_H X \geq \dim X$ ($X$ frattale $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \dim_H X > \dim X$)

$X$ autosimile $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X = \cup_i \sigma_i(X)$ con $\sigma_i : X \to X$ similitudini
t.c. $\sigma_i(X) \cap \sigma_j(X) \ll X$ per ogni $X \; \forall\, i \neq j$

$\rightsquigarrow H_r X = \Sigma_i H_r \sigma_i(X) = \Sigma_i r_i^r H_r X \rightsquigarrow \dim_H X = r \Leftrightarrow \Sigma_i r_i^r = 1$

Dimensione di Hausdorff di $K$

$K = \iota_1(K') \cup \iota_2(K') \cup \iota_3(K')$ con $K' = \cup_{i=1}^4 \sigma_i(K')$, $r_i = 1/3$
$\rightsquigarrow \dim_H K = \dim_H K' = \log 4 / \log 3 = 1,2618\ldots$

Curve di tutte le dimensioni

$K_a = \iota_1(K'_a) \cup \iota_2(K'_a) \cup \iota_3(K'_a)$ con $K'_a = \cup_{i=1}^4 \sigma_i(K'_a)$, $r_i = 1/a$
$\rightsquigarrow \dim_H K_a = \dim_H K'_a = \log 4 / \log a \geq 1 \ (1 < a \leq 4)$

$K_a \subset R^2$ per $2 < a \leq 4 \rightsquigarrow 1 \leq \dim_H K_a < 2$

Esercizio: Costruire $K_a \subset R^n$ con $a \leq 2$

Poligoni regolari inscritti in curve di Jordan

$C \subset R^2$ curva di Jordan liscia $\Rightarrow$ esistono infiniti triangoli equilateri inscritti in $C$

Esercizio: generalizzare a curve di Jordan liscie $C \subset R^n$
Esercizio: $C \subset R^2$ curva di Jordan $\Rightarrow$ esiste un triangolo equilatero inscritto in $C$

Problema: $C \subset R^2$ curva di Jordan (liscia) $\Rightarrow$ esiste un triangolo equilatero $T$ inscritto t.c. $I(T) \subset I(C)$?
Problema: $C \subset R^2$ curva di Jordan (liscia) $\Rightarrow$ esiste un quadrato inscritto in $C$? In particolare, se $C = K$?