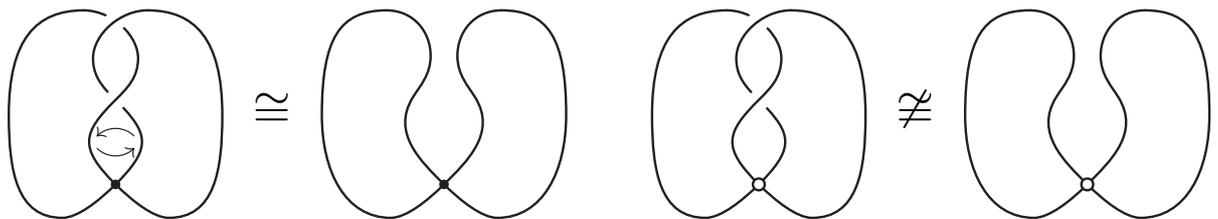
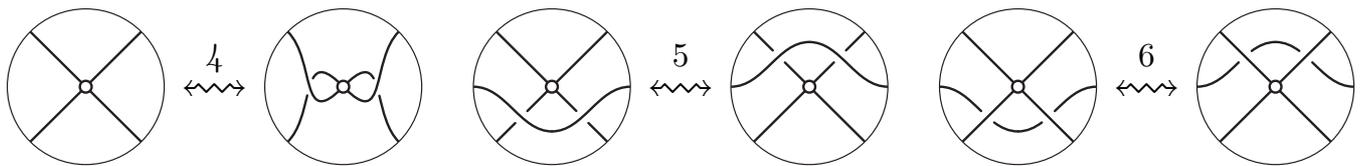


Nodi singolari $K \subset R^3$ nodo (liscio) singolare $\stackrel{\text{def}}{\iff} K$ curva chiusa liscia con un numero finito di singularità consistenti in punti doppi con tangenti distinte $s(K) \stackrel{\text{def}}{=} \text{numero delle singularità di } K$ Note: 1) K nodo singolare \Rightarrow “docile” (liscio) per definizione2) K orientato, $-K$, $|K|$ e \bar{K} come nel caso non singolare $K, K' \subset R^3$ nodi singolari (orientati)equivalenti $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists h : R^3 \rightarrow R^3$ diffeo tale che $K' = h(K)$ isotopi ($K \cong K'$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} h$ è realiz. con un'isotopia liscia $H : \text{id}_{R^3} \cong h$
 $\iff \exists J : K \rightsquigarrow K'$ deformazione liscia $(J : K \times [0, 1] \rightarrow R^3$ diff. e j_t regolare $\forall t$ t.c. $K_t = j_t(K)$ nodo (liscio) singolare $\forall t$)Note: 1) \cong è una relazione di equivalenza tra nodi singolari2) \cong rispetta le singularità $\Rightarrow s(K)$ invariante isotopico3) isotopia topologica $\not\iff$ isotopia liscia4) $K, K' \subset R^3$ nodi lisci isotopi \iff isotopi come nodi sing.
 $\rightsquigarrow \{\text{nodi lisci}\} / \cong \subset \{\text{nodi singolari}\} / \cong$ 5) invarianti di nodi singolari \rightsquigarrow invarianti di nodi lisci $K \subset R^3$ nodo singolare (orientato) verticalmente ammissibile $\stackrel{\text{def}}{\iff} \pi| : K \rightarrow R^2$ regolare (\iff no tang. vert. e piani tang. vert. nei punti sing.) e iniettiva eccetto un numero finito di punti doppi trasversali (\iff tang. distinte) non singolari $\rightsquigarrow D \stackrel{\text{def}}{=} \pi(K) + \text{sotto/sopra passaggi nei punti doppi (incroci)}$
 \swarrow diagramma (orientato) di K

- Note: 1) K nodo singolare $\Rightarrow K \cong_\varepsilon K'$ vert. ammissibile
 $\Rightarrow K$ è rappresentato da un diagramma D
 2) D determina K a meno di isotopia verticale

$D, D' \subset R^2$ diagrammi di $K, K' \subset R^3$ nodi singolari
 $D \rightsquigarrow D' \stackrel{\text{def}}{\iff} D$ e D' sono equivalenti a meno di \cong (isotopia del piano), dei mov. di Reidemeister e dei seguenti movimenti che coinvolgono i punti singolari



Teorema. $K, K' \subset R^3$ nodi singolari con diagrammi $D, D' \subset R^2$
 $\Rightarrow D \rightsquigarrow D'$ se e solo se $K \cong K'$

Dim. analoga al caso non singolare

Diagrammi di Gauss

$K \subset R^3$ nodo singolare connesso orientato

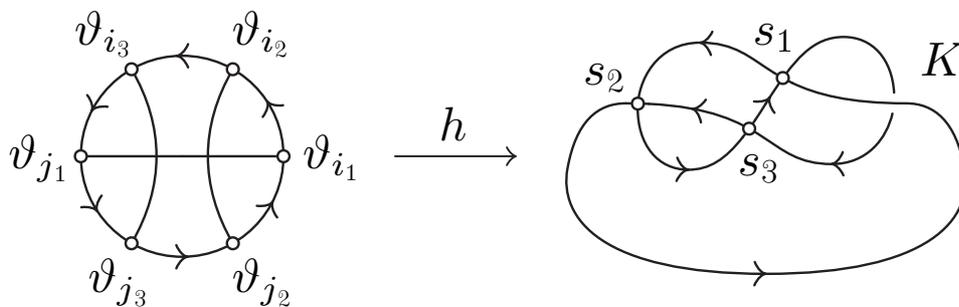
$h : S^1 \rightarrow K$ parametrizzazione regolare positiva

$\rightsquigarrow 0 \leq \vartheta_1 < \dots < \vartheta_{2s(K)} < 2\pi$ t.c. $h(\vartheta_k)$ singolarità $\forall 1 \leq k \leq 2s(K)$

$\rightsquigarrow \{i_1, j_1\}, \dots, \{i_s(K), j_s(K)\}$ t.c. $h(\vartheta_{i_k}) = h(\vartheta_{j_k}) \forall 1 \leq k \leq s(K)$

$\rightsquigarrow G_K = S^1$ con $s(K)$ "corde" di estremi ϑ_{i_k} e $\vartheta_{j_k} \forall 1 \leq k \leq s(K)$

\curvearrowright diagramma di Gauss di K



- Note: 1) G_K è univoc. determinato a meno di diffeo positivi di S^1
 2) $\vartheta_k = k\pi/s(K) \rightsquigarrow G_K$ univoc. determ. a meno di rotazioni
 3) G_K dipende solo dalla sequenza dei punti doppi lungo K
 4) $G_{-K} = \sigma(G_K), G_{\bar{K}} = G_K$ (stessa sequenza di punti doppi)

Prop. $K, K' \subset R^3$ nodi singolari connessi orientati

$G_K \cong G_{K'} \Leftrightarrow K$ e K' equivalenti a meno di isotopia e auto-attraversamenti trasversali

Dim. isotopia e auto-attraversamenti trasversali

\Rightarrow stessa ordine ciclico dei punti doppi $\Rightarrow G_K \cong G_{K'}$

$G_K = G_{K'} \Rightarrow K = k(\Gamma)$ e $K' = k'(\Gamma)$

con $\Gamma \cong G_K / \text{corde} \cong G_{K'} / \text{corde}$ grafi diffeo

$k = h / \text{corde}, k' = h' / \text{corde} : \Gamma \rightarrow R^3$ imm.

$k \simeq k' \rightsquigarrow$ isotopia e auto-attravers. trasv.

Corol. $D, D' \subset R^2$ diagrammi di K e K'

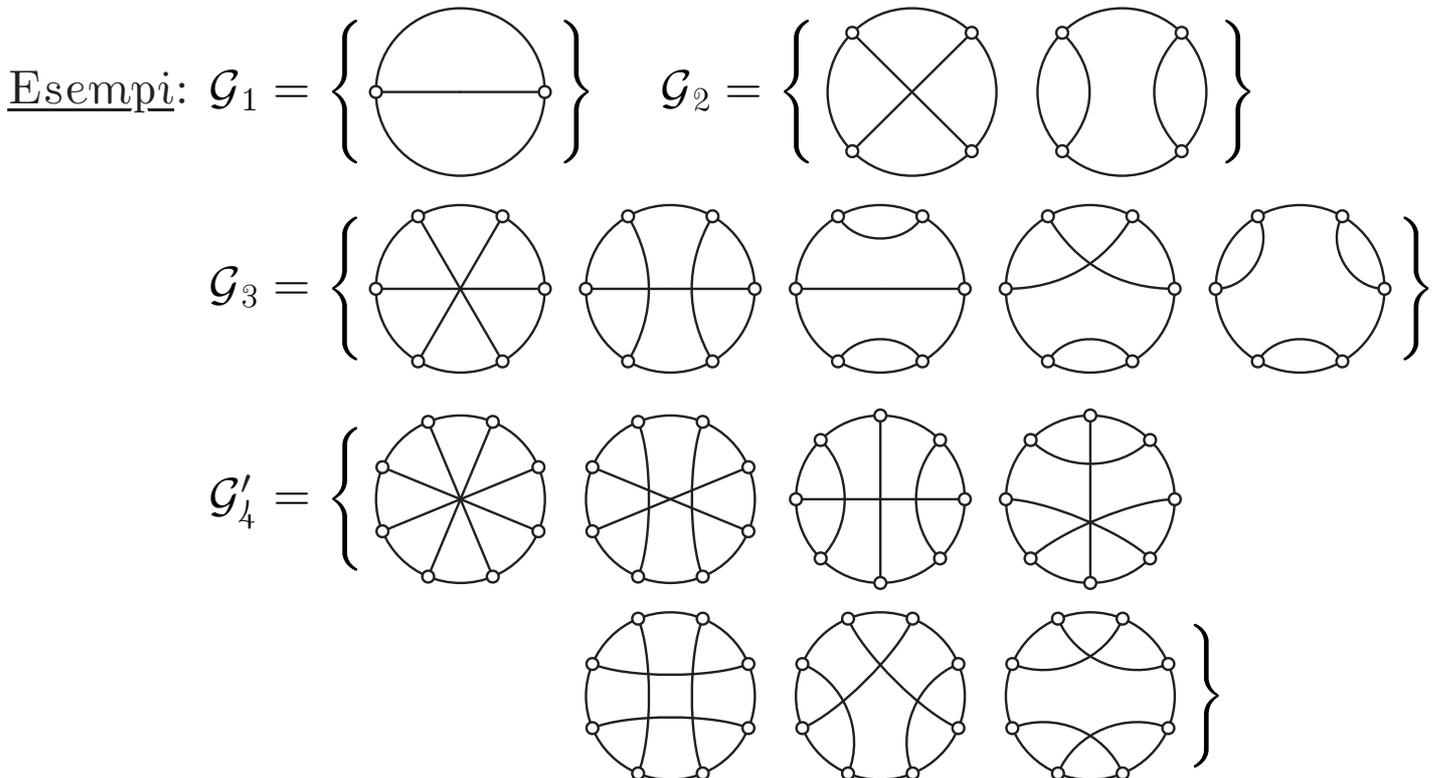
$G_K \cong G_{K'} \Leftrightarrow D$ e D' equivalenti a meno di isotopia, movimenti $\overset{1-6}{\rightleftarrows}$ e inversioni di incroci

$\mathcal{G}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{diagrammi di Gauss con } n \text{ corde}\} / \cong \quad \forall n \geq 0$

\uparrow diagrammi di Gauss di ordine n

$\mathcal{G}'_n \stackrel{\text{def}}{=} \{[g] \in \mathcal{G}_n \mid g \text{ non ha corde isolate}\} \subset \mathcal{G}_n \quad \forall n \geq 0$

\uparrow diagrammi di Gauss non degeneri di ordine n



Nota: i diagrammi di Gauss sopra sono tutti simmetrici

\exists diagrammi di Gauss non simmetrici con piú corde

Invarianti di Vassiliev

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{nodi singolari connessi orientati}\} / \cong$$

$$\mathcal{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{K \in \mathcal{S} \mid s(K) \geq n\} / \cong \quad \forall n \geq 0$$

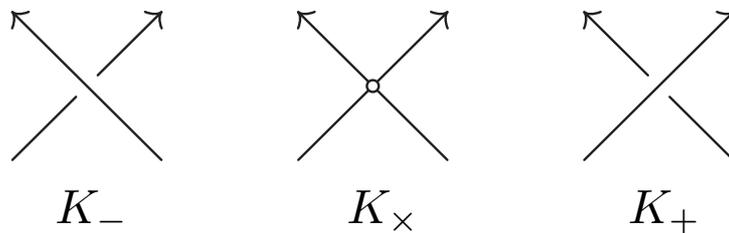
Note: 1) $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_1 \supset \dots \supset \mathcal{S}_n \supset \mathcal{S}_{n+1} \supset \dots$

2) $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n+1} = \{\text{nodi conn. orientati con } s(K) = n\} / \cong$

3) $\mathcal{K} = \mathcal{S} - \mathcal{S}_1 = \{\text{nodi conn. orientati lisci (non sing.)}\} / \cong$

$v : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}$ con \mathbb{K} campo

invariante di Vassiliev $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ invariante isotopico t.c.
 $v(K_+) - v(K_-) = v(K_\times)$



di ordine n $\stackrel{\text{def}}{\iff} v(K) = 0$ per ogni $K \in \mathcal{S}_{n+1}$

Prop. $a_n : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ n-esimo coeff. del polinomio di Conway

$\rightsquigarrow \tilde{a}_n : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ invar. di Vassiliev di ordine $n \geq 0$

(nullo per n dispari) definito

$$\tilde{a}_n(K) = \begin{cases} a_{n-s}(K_{0\dots 0}) & \text{con } K_{0\dots 0} \in \mathcal{K} \text{ se } s(K) = s \leq n \\ a_0(K_{0\dots 0}) = 0 & \text{con } K_{0\dots 0} \in \mathcal{S}_1 \text{ se } s(K) = s > n \end{cases}$$

(K_\times sostituito con K_0 per ogni singolarità)

Dim. $s < n \Rightarrow \tilde{a}_n(K_+) - \tilde{a}_n(K_-) = a_{n-s}(K_{+0\dots 0}) - a_{n-s}(K_{-0\dots 0})$
 $= a_{n-s-1}(K_{00\dots 0}) = \tilde{a}_n(K_\times)$

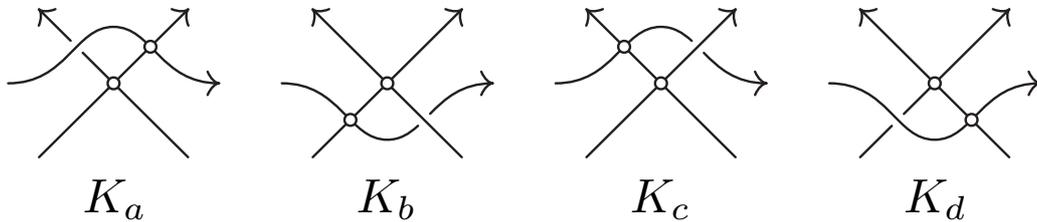
$s = n \Rightarrow \tilde{a}_n(K_+) - \tilde{a}_n(K_-) = a_0(K_{+0\dots 0}) - a_0(K_{-0\dots 0}) = 0$
 $= a_0(K_{\times 0\dots 0}) = \tilde{a}_n(K_\times)$

- Note: 1) anche il polinomio di Jones in due variabili per nodi conn. si può esprimere mediante invarianti di Vassiliev
- 2) invar. di Vassiliev sono univarsali almeno per nodi lisci?
 $(K \cong K' \stackrel{?}{\iff} v(K) = v(K') \quad \forall v \text{ invariante di Vassiliev})$

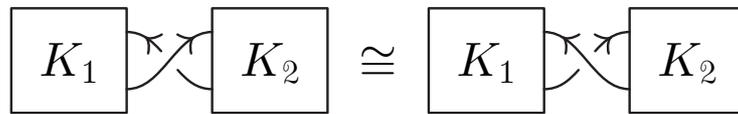
Prop. $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}$ invariante di Vassiliev

1) $v(K) = 0$ per ogni $K = \boxed{K_1} \circlearrowright \boxed{K_2}$

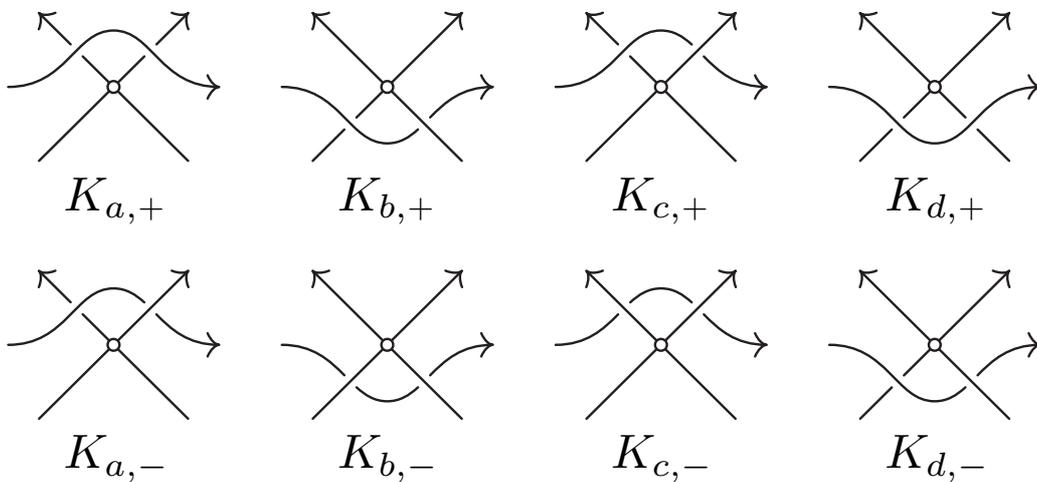
2) $v(K_a) - v(K_b) + v(K_c) - v(K_d) = 0$



Dim. 1) $K_- \cong K_+ \Rightarrow v(K_-) = v(K_+) \Rightarrow v(K_\times) = 0$



$$\begin{aligned} 2) \quad v(K_a) - v(K_b) &= v(K_{a,+}) - v(K_{a,-}) - v(K_{b,+}) + v(K_{b,-}) \\ &= v(K_{d,+}) - v(K_{d,-}) - v(K_{c,+}) + v(K_{c,-}) \\ &= v(K_d) - v(K_c) \end{aligned}$$



Prop. $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}$ invariante di Vassiliev di ordine n

- $K \in \mathcal{S}_n \Rightarrow$ 1) $v(K)$ invariante per inversione di incroci
- 2) $v(K)$ dipende solo dal diagr. di Gauss G_K
- 3) $v(K) = 0$ se $G_K \in \mathcal{G}_n - \mathcal{G}'_n$ (diagr. degenerate)

Dim. 1) $K_\pm \in \mathcal{S}_n \Rightarrow K_\times \in \mathcal{S}_{n+1} \Rightarrow v(K_\times) = 0 \Rightarrow v(K_-) = v(K_+)$

- 2) $G_K = G_{K'} \Rightarrow K \cong K'$ a meno di inversioni di incroci
- 3) segue da 2 e dalla proprietà 1 nella prop. sopra

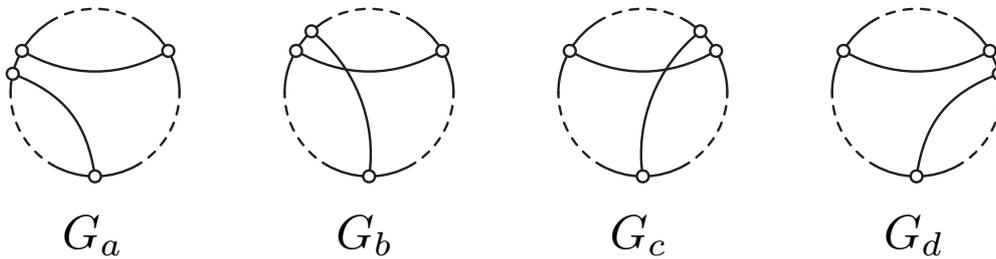
$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{v : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K} \mid v \text{ invariante di Vassiliev}\} \subset \mathbb{K}^{\mathcal{S}}$$

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid v \text{ invariante di Vassiliev di ordine } n\}$$

- Note: 1) V spazio vettoriale su \mathbb{K} (sistema lineare omogeneo)
 2) $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \dots \subset V$ sottospazi vettoriali
 3) $V_0 \cong \mathbb{K}$ ($v(K_{\times}) = 0 \Rightarrow v(K_-) = v(K_+) \Rightarrow v|_{\mathcal{S}-\mathcal{S}_1} = \text{cost.}$)
 4) $V_1 \cong \mathbb{K}$ ($\mathcal{G}'_1 = \emptyset \Rightarrow v|_{\mathcal{S}_1-\mathcal{S}_2} = 0 \Rightarrow V_1 = V_0$)

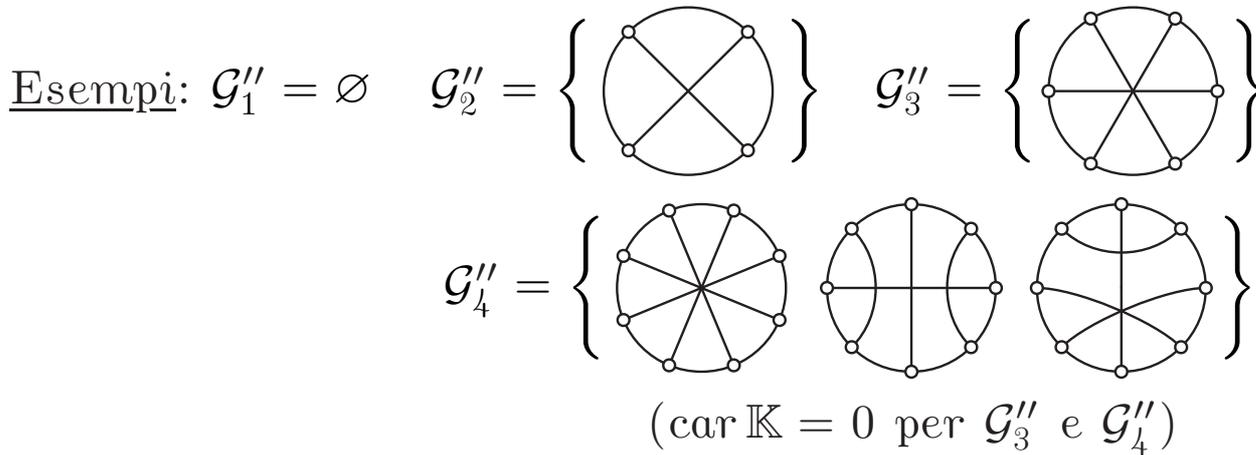
$$\mathbb{K}\mathcal{G}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}\text{-spazio vettoriale generato da } \mathcal{G}_n \text{ con } n \geq 0$$

$$\mathcal{R}_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle (\mathcal{G}_n - \mathcal{G}'_n) \cup \{G_a - G_b + G_c - G_d\} \rangle \subset \mathbb{K}\mathcal{G}_n \text{ sottospazio vett.}$$

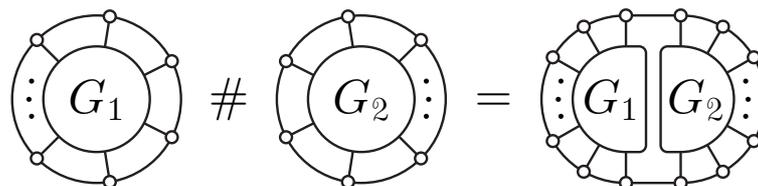


$$\mathcal{A}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}\mathcal{G}_n / \mathcal{R}_n \mathbb{K}\text{-spazio vettoriale tale che } \mathcal{A}_n^* \cong \text{Nil } \mathcal{R}_n \quad \forall n \geq 0$$

Nota: \mathcal{G}'_n generatori per $\mathcal{A}_n \rightsquigarrow \mathcal{G}''_n \subset \mathcal{G}'_n$ base per \mathcal{A}_n
 \swarrow
diagrammi di Gauss basici



$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n \mathbb{K}\text{-algebra graduata con prodotto } \# \text{ di diagrammi}$$



$$\widehat{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}\text{-algebra completamente di } \mathcal{A} \text{ (serie formali)}$$

- Note: 1) $G_1 \# G_2$ è ben definita modulo $G_a - G_b + G_c - G_d = 0$
 2) in $\widehat{\mathcal{A}}$ vale $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

$\varphi_n : V_n \rightarrow \mathbb{K}\mathcal{G}_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{unica appl. lineare t.c. } \varphi_n(v)(G_K) = v(K)$

Note: 1) $\varphi_0 \cong \text{id}_{\mathbb{K}}$ (a meno degli iso $V_0 \cong \mathbb{K}$ e $\mathcal{G}_0 \cong \mathbb{K}$)

2) $\ker \varphi_n = V_{n-1} \quad \forall n \geq 1$ (per definizione)

3) $V_n/V_{n-1} \cong \varphi_n(V_n) \subset \mathbb{K}\mathcal{G}_n^*$ sottospazio da determinare

Prop. V_n ha dimensione finita per ogni $n \geq 0$

Dim. $V_n \cong V_n/V_{n-1} \oplus V_{n-1}/V_{n-2} \oplus \dots \oplus V_1/V_0 \oplus V_0$

$$\Rightarrow \dim V_n = \sum_{i=1, \dots, n} \dim V_i/V_{i-1} + 1 \leq \sum_{i=1}^n |\mathcal{G}_i| + 1 < \infty$$

Prop. $\varphi_n(V_n) \subset \text{Nil } \mathcal{R}_n \subset \mathbb{K}\mathcal{G}_n^*$

Dim. $v \in V_n, G \in \mathcal{G}_n - \mathcal{G}'_n \Rightarrow$

$$\varphi_n(v)(G) = v(K) = 0 \text{ con } K \text{ tale che } G_K = G$$

$v \in V_n, G = G_a - G_b + G_c - G_d \Rightarrow$

$$\varphi_n(v)(G) = v(K_a) - v(K_b) + v(K_c) - v(K_d) = 0$$

Teorema di Kontsevich (1993)

$\mathbb{K} = \mathbb{Q} \rightsquigarrow I : \mathcal{K} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ invariante isotopico tale che

$\forall w \in \text{Nil } \mathcal{R}_n$ si ha $w = \varphi_n(v)$ con $v = \tilde{u} \in V_n$

dove $u : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Q}$ definito $u(K) = w(I_n(K))$

$\tilde{u} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Q}$ estensione di u def. per induzione su
 $s(K) \geq 0$ da $\tilde{u}(K_{\times}) = \tilde{u}(K_{+}) - \tilde{u}(K_{-})$

Dim. $K \subset R^3 \cong \mathbb{C}^2 \times R$ nodo liscio tale che $\pi : K \rightarrow R$ ha $\mu(K)$

punti critici tutti non-degeneri (min/max)

con valori distinti $t_{c_1} < t_{c_2} < \dots < t_{c_{\mu(K)}}$

$m \geq 0 \rightsquigarrow \Delta_m = \{(t_1, \dots, t_m) \in R^m \mid t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m\}$

$\mathcal{J}_m = \{(j_1, \dots, j_m) \mid 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m < \mu(K)\}$

$J \in \mathcal{J}_m \rightsquigarrow C_J =]t_{j_1}, t_{j_1+1}[\times]t_{j_2}, t_{j_2+1}[\times \dots \times]t_{j_m}, t_{j_m+1}[$

$\mathcal{P}_J = \{\{(z_{\ell}(t_k), z'_{\ell}(t_k))\} \mid t_{j_k} < t_k < t_{j_k+1}, k \leq m\}$

$P \in \mathcal{P}_J \rightsquigarrow D_P = (-1)^{\delta(P)}$ (diagr. di Gauss indotto da P)

con $\delta(P) = \text{numero archi discententi}$

$$\rightsquigarrow I(K) = c^{\mu(K)/2} \sum_{m \geq 0} \sum_{J \in \mathcal{J}_m} \sum_{P \in \mathcal{P}_J} \int_{C_J \cap \Delta_m} \wedge_{k \leq m} d \log(z_{\ell}(t_k), z'_{\ell}(t_k)) D_P$$

integrale di Kontsevich sul nodo K

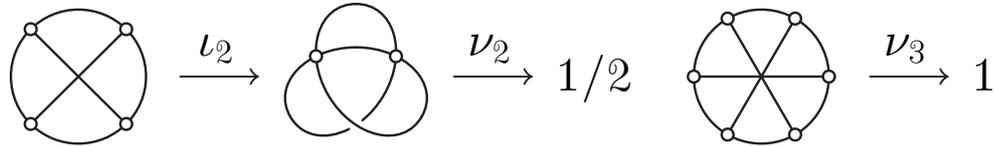
$I(K)$ convergente con coefficienti tutti razionali ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$)
 $I(K)$ invariante per deform. lisce (orizzontali e verticali)
 $w \in \text{Nil } \mathcal{R}_n \Rightarrow u(K) = w(I_n(K)) \rightsquigarrow v = \tilde{u} \in V_n$ t.c. $\varphi_n(v) = w$

Corol. $\mathbb{K} = \mathbb{Q} \Rightarrow \varphi_n(V_n) = \text{Nil } \mathcal{R}_n \subset \mathbb{Q}\mathcal{G}_n^*$
 $\rightsquigarrow \psi_n = \varphi_n / \sim : V_n / V_{n-1} \cong \text{Nil } \mathcal{R}_n \subset \mathbb{Q}\mathcal{G}_n^*$

Note: 1) $\mathbb{K} = \mathbb{Q} \Rightarrow V_n / V_{n-1} \leftrightarrow \{\nu_n : \mathcal{G}_n'' \rightarrow \mathbb{Q}\}$
 $V_n \leftrightarrow (\{\rho_i : \mathcal{G}_i'' \rightarrow \mathcal{S}_i\}_{i < n}, \{\nu_i : \mathcal{G}_i'' \rightarrow \mathbb{Q}\}_{i \leq n})$
 con $\rho_i(G) = K$ t.c. $G_K = G \ \forall G \in \mathcal{G}_i''$

- 2) i nodi basici $\rho_i(G)$ si possono fissare a priori
 in modo che $V_n \leftrightarrow \{\nu_i : \mathcal{G}_i'' \rightarrow \mathbb{Q}\}_{i \leq n}$
- 3) $v(K_+) - v(K_-) = v(K_\times) \rightsquigarrow$ algoritmo per esprimere
 $v(K) \in \mathbb{Q}$ con $v \in V_n$ e $K \in \mathcal{K}$ come combinazione lineare
 dei valori assegnati ai nodi basici in \mathcal{S}_i con $i < n$
 e ai diagrammi di Gauss basici in \mathcal{G}_n

Esempio: $v \in V_3$ determinato da $v(S^1) = 0$ e dai valori



$\rightsquigarrow v(T) = 1/2$ e $v(\bar{T}) = -1/2$ ($\Rightarrow T$ non simmetrico)

$$\begin{aligned}
 v\left(\text{Diagram 2}\right) &= v\left(\text{Diagram 2a}\right) + v\left(\text{Diagram 2b}\right) \\
 &= v\left(\text{Diagram 2c}\right) + v\left(\text{Diagram 2d}\right) = 1/2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v\left(\text{Diagram 2}\right) &= v\left(\text{Diagram 2a}\right) - v\left(\text{Diagram 2b}\right) \\
 &= -v\left(\text{Diagram 2c}\right) + v\left(\text{Diagram 2d}\right) \\
 &= v\left(\text{Diagram 2e}\right) - v\left(\text{Diagram 2f}\right) = -1/2
 \end{aligned}$$