

Prop. Ogni diagr. $D \subset R^2$ di un nodo $K \subset R^3$ si può trasformare in un diagr. $D' \subset R^2$ del nodo banale con $n(K)$ componenti invertendo alcuni incroci $\rightsquigarrow u(D) \stackrel{\text{def}}{=} \min. \#$ di tali incroci

Dim. $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$, $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow K_i$ param. delle componenti $D \rightsquigarrow D'$ diag. ascendente a partire dai punti $p_i = \alpha_i(0) \in K_i$
 t.c. in ogni incrocio formato da $p = \alpha_i(s)$, $q = \alpha_j(t)$
 p passa sotto q se e solo se $(i, s) <_{\text{less.}} (j, t)$

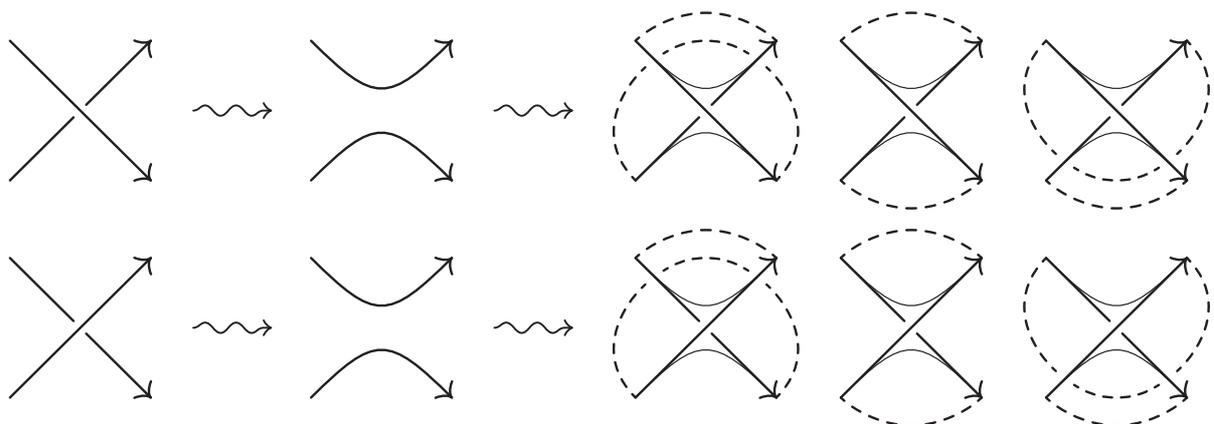
$D' \rightsquigarrow K'$ t.c. $K' \cap \{z = a\} = \emptyset$, $\{p'_a, p''_a\}$ (può essere $p'_a = p''_a$)
 K' banale ($D_1 \cup \dots \cup D_n = \cup_a [p'_a, p''_a]$ unione disg. di dischi lisci se K liscio t.c. $K = \text{Bd}(D_1 \cup \dots \cup D_n)$)

$K \subset R^3$ nodo $\rightsquigarrow u(K) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{u(D) \mid D \text{ diagr. di } K \text{ a meno di } \cong\}$
 \uparrow indice di banalizzazione (o snodamento) di K

- Note:
- 1) $u(K)$ invariante isotopico e $u(K) = u(\bar{K})$ per definizione
 - 2) $u(K) = 0 \Leftrightarrow K$ banale (= 1 per trifogli e nodo a otto)
 - 3) $u(K) \leq c(K)/2$ ($u(D) \leq c(D)/2$ per ogni diagramma D)
 - 4) $c(D) = c(K) \not\Rightarrow u(D) = u(K)$ (per esempio $u(10_{11}) = ?$)
 - 5) $u(K_1 \sqcup K_2) = u(K_1) + u(K_2)$
 - 6) $u(K_1 \# K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$ (vale = ?)
 - 7) $u(K)$ non è effettivamente calcolabile (in generale)

Superfici di Seifert

Prop. Ogni nodo orientato $K \subset R^3$ è bordo di una superficie compatta connessa orientata $S \subset R^3$
superficie di Seifert per K \curvearrowright



Dim. $D \subset R^2$ diagramma di K

$\rightsquigarrow C_1, \dots, C_k \subset R^2$ curve chiuse semplici disgiunte
(risoluzione degli incroci in base all'orientazione)

$\rightsquigarrow D_1, \dots, D_k \subset R^3$ dischi orizzontali disgiunti
($\text{Cl}I(C_1), \dots, \text{Cl}I(C_k) \subset R^2$ impilati per inclusione)

$\rightsquigarrow S = D_1 \cup \dots \cup D_k \cup c(D)$ bande semiavvitate
+ eventuali tubi per rendere S connessa
(solo nel caso K non connesso)

Nota: K liscio/poligonale $\rightsquigarrow S$ liscia/poligonale

$K \subset R^3$ nodo connesso

$\rightsquigarrow g(K) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{g = g(S) \mid S \text{ superficie di Seifert per } K\}$
 \swarrow genere del nodo K (dove $g(S) \stackrel{\text{def}}{=} g(\widehat{S} = S \cup_{\text{Bd}} B^2) \cong T_g$)

Note: 1) $g(K)$ invariante isotopico e $g(K) = g(\overline{K})$ per definizione

2) $g(-K) = g(K)$ ($-S$ superficie di Seifert per $-K$)

3) $g(K) = 0 \Leftrightarrow K$ banale (bordo di un disco)

4) $g(K) \leq c(K)/2$

(D diagramma di K tale che $c(D) = c(K)$)

$\rightsquigarrow S$ superficie di Seifert tale che $\chi(\widehat{S}) \geq 2 - c(K)$

$\Rightarrow g(K) \leq g(\widehat{S}) = 1 - \chi(\widehat{S})/2 \leq c(K)/2$)

5) $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$

(S_1, S_2 superfici di Seifert per K_1, K_2)

$\rightsquigarrow S_1 \#_{\text{Bd}} S_2$ superficie di Seifert per $K_1 \# K_2$)

6) $g(K)$ non è effettivamente calcolabile (in generale)

Prop. $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2) \quad \forall K_1, K_2$ nodi connessi

Dim. basta provare che $K = K_1 \# K_2 \Rightarrow g(K) \geq g(K_1) + g(K_2)$

$P \subset R^3$ piano che separa K_1 e K_2 eccetto l'arco $A \subset P$

$S \subset R^3$ superficie di Seifert per K con $g(S) = g(K)$

trasversalità $\rightsquigarrow P \cap S = A \cup \{\text{curve chiuse semplici in } P\}$

assumiamo S t.c. il numero k di tali curve sia minimale

- $k > 0 \Rightarrow$ esiste $C \subset P \cap S$ t.c. $I(C) \cap S = \emptyset$ o $E(C) \cap S = \emptyset$
 C non sconnette $S \rightsquigarrow S'$ t.c. $g(S') < g(S)$ (assurdo)
 C sconnette $S \rightsquigarrow S'$ t.c. $g(S') = g(S)$ e $k' < k$ (assurdo)
 $k = 0 \Rightarrow S = S_1 \#_{\text{Bd}} S_2$ con S_i superficie di Seifert per K_i
 $\Rightarrow g(K) = g(S) = g(S_1) + g(S_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$

- Corol. 1) $g(K) = 1 \Rightarrow K$ nodo primo (es. trifogli e nodo a otto)
 2) $K_1 \# K_2$ banale $\Rightarrow K_1, K_2$ entrambi banali
 3) K nodo connesso non banale $\rightsquigarrow \{K_n = \#_n K \mid n \geq 1\}$
 famiglia infinita di nodi connessi non equivalenti

Teorema di Schubert (1949)

Ogni nodo connesso orientato $K \subset R^3$ ha una decomposizione in nodi primi $K = K_1 \# \dots \# K_m$ unica a meno dell'ordine

Dim. esistenza: segue dalla proposizione sopra

unicità: $K_1 \# K_2 = K_0 \# K$ con K_0 primo

$\Rightarrow K_i = K_0 \# K'$ e $K = K_j \# K'$ con $\{i, j\} = \{1, 2\}$

($P \subset R^3$ piano che separa K_1 e K_2 accetto l'arco A)

$S \subset R^3$ sfera t.c. $K_0 \subset \text{Cl} I(S)$ e $K \subset \text{Cl} E(S)$

trasvers. $\rightsquigarrow P \cap S = \cup \{k \text{ curve chiuse semplici}\}$

k minimale $\Rightarrow k = 0$ (chirurgia su P e S)

$P \cap S = \emptyset$ implica immediatamente l'asserto)

Indice di allacciamento

$K_1 \cup K_2 \subset R^3$ nodo orientato con due componenti

$\rightsquigarrow \ell(K_1, K_2) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi([K_2]) \in \mathbb{Z}$ con $\varphi : H(K_1) \rightarrow \mathbb{Z}$ iso t.c. $\varphi(\mu_1) = 1$

\nwarrow indice di allacciamento tra K_1 e K_2

Note: 1) $\ell(K_1, K_2)$ invariante isotopico per definizione

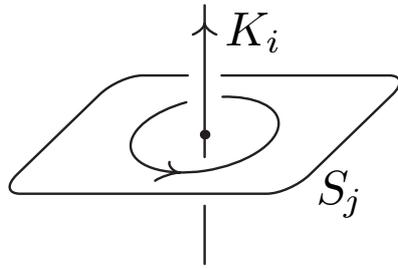
2) $\ell(\bar{K}_1, \bar{K}_2) = -\ell(K_1, K_2)$ (orient. inv. di $R^3 \rightsquigarrow \mu_1$ opposto)

3) $\ell(-K_1, K_2) = \ell(K_1, -K_2) = -\ell(K_1, K_2)$ per definizione

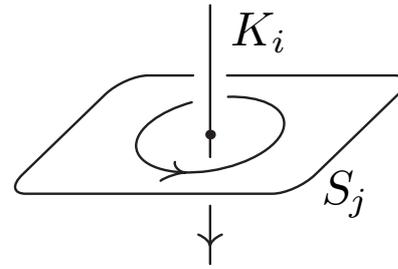
Prop. $\ell(K_1, K_2) = \#(K_1 \cap S_2)$ per ogni S_2 superf. di Seifert per K_2

$= \#(S_1 \cap K_2)$ per ogni S_1 superf. di Seifert per K_1

($\#$ indica il numero di intersezioni trasversali con segno)



intersezione positiva

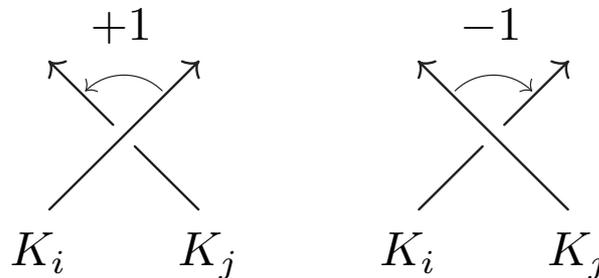


intersezione negativa

Dim. $S_2 \rightsquigarrow K_2 \sim \#(K_1 \cap S_2) \mu_1$ (intersezione pos./neg. $\rightsquigarrow \pm \mu_1$)
 $S_1 \cap S_2 =$ unione di curve chiuse e archi (trasversalità)
 archi $\rightsquigarrow K_1 \cap S_2 \leftrightarrow S_1 \cap K_2$ corrisp. biun. tra inters. pos./neg.

Corol. $\ell(K_1, K_2) = \ell(K_2, K_1) \quad \forall K_1, K_2$ nodi connessi orientati

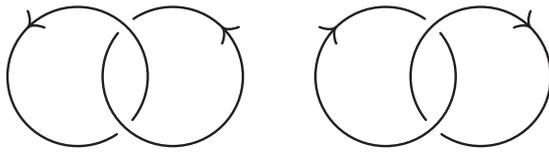
Prop. $D = D_1 \cup D_2 \subset R^2$ diagramma di $K = K_1 \cup K_2 \Rightarrow$
 $\ell(K_1, K_2) = \#(\text{incroci con segno in cui } K_1 \text{ passa sotto } K_2)$
 $= \#(\text{incroci con segno in cui } K_1 \text{ passa sopra } K_2)$
 $= \#(\text{incroci con segno tra } K_1 \text{ e } K_2)/2$



Dim. invertendo tutti gli incroci in cui K_1 passa sotto K_2
 si ha un diagramma D' di $K_1 \sqcup K'_2$ (K_1 separato vert. da K'_2)
 $\rightsquigarrow S'_2$ superficie di Seifert per K'_2 tale che $K_1 \cap S'_2 = \emptyset$
 $\rightsquigarrow S_2$ superficie di Seifert per K_2 ottenuta aggiungendo a S'_2
 una banda per ogni incrocio invertito in modo che
 $K_1 \cap S_2$ ha uno punto di intersezione pos./neg.
 per ogni incrocio pos./neg. in cui K_1 passa sotto K_2

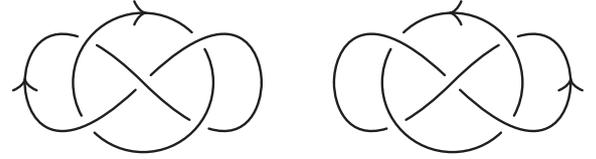
Note: 1) K_1 e K_2 separati $\Leftrightarrow \ell(K_1, K_2) = 0$ (nodo di Whitehead)
 2) $\ell(K_1, K_2) = \#$ incroci con segno da invert. per separare
 $= \#$ attravers. con segno necessari per separare

$$\ell(K_1, K_2) = \pm 1$$



H e \bar{H} = 2-nodi di Hopf

$$\ell(K_1, K_2) = 0$$



W e \bar{W} = 2-nodi di Whitehead

3) $\ell(K_1, K_2)$ = grado dell'applicazione $\varphi : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$

$$\text{definita } \varphi(s_1, s_2) = \frac{\gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)}{\|\gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)\|}$$

con $\gamma_i : S^1 \rightarrow R^3$ parametriz. reg. di K_i

$$= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\langle \gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2), \gamma_1'(s_1) \times \gamma_2'(s_2) \rangle}{\|\gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)\|^3} ds_1 ds_2$$

↙ formula integrale di Gauss

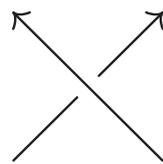
Invariante di Arf-Casson

Prop. Esiste unica applicazione $a : \{\text{nodi connessi orientati}\} \rightarrow \mathbb{Z}$

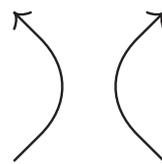
t.c. 0) $a(K)$ è invariante per isotopie di K

1) $a(K) = 0$ se K è banale

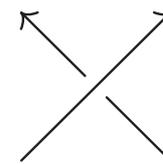
2) $a(K_+) - a(K_-) = \ell(K_1, K_2)$ con $K_1 \cup K_2 = K_0$



K_-



K_0



K_+

Dim. D diagramma di un nodo connesso orientato

$p \in D \rightsquigarrow D_p$ diagramma ascendente a partire da p

ottenuto da D mediante inversione di incroci

$\rightsquigarrow D_p = D_0, \dots, D_k = D$ successione di diagrammi

t.c. D_i è ottenuto da D_{i-1} con una sola inversione

$a(D) \in \mathbb{Z}$ definito a partire da $a(D_0) = 0$ usando la relazione

$$a(D_+) - a(D_-) = \ell(K_1, K_2) \text{ per ricavare } D_i \text{ da } D_{i-1}$$

$a(D)$ non dipende dall'ordine della sequenza di inversioni

(basta considerare lo scambio di inversioni successive)

$a(D)$ non dipende dalla scelta del punto p

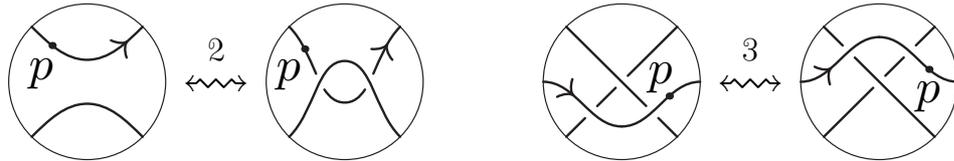
(basta confrontare p prima e dopo un incrocio)

$a(D) = 0$ se D ascendente (nessuna inversione)

$a(D_+) - a(D_-) = \ell(K_1, K_2)$ (per inversioni arbitrarie)

$a(D)$ è invariante per movimenti di Reidemeister

(banale per 1, scelta opportuna di p per 2 e 3)



$\leadsto a(K) = a(D)$ con D arbitrario diagramma di K

\swarrow invariante di Arf-Casson del nodo K

Nota: l'invariante di Arf classico è definito per nodo orientati (non solo connessi, con una opportuna prop. di allacciam.) a valori in \mathbb{Z}_2 e nel caso connesso coincide con $a(K) \bmod 2$

Prop. $a(-K) = a(K)$ per ogni nodo connesso orientato K

\leadsto invariante isotopico di nodi connessi (non orientati)

Dim. D diagr. ascend. $\Rightarrow -D$ diagr. discend. $\Rightarrow a(-D) = 0$
proprietà 1 e 2 invarianti per inversione dell'orient.

Note: 1) $a(\bar{K}) = a(K) \quad \forall K$ nodo connesso

(proprietà 1 e 2 invarianti per riflessione)

2) $a(K_1 \# K_2) = a(K_1) + a(K_2) \quad \forall K_1, K_2$ nodi connessi
(diagr. ascend. $\#$ diagr. ascend. = diagr. ascend.)

3) $a(T) = 1$ e $a(E) = -1 \Rightarrow T \not\cong E$ non banali

4) $a(T \# E) = 0$, quindi $a(K) = 0 \not\Rightarrow K$ banale

Colorazioni di diagrammi

$Q = (Q, *)$ con $*$ operazione binaria sull'insieme Q

quandle $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 1) $x * x = x \quad \forall x \in Q$

2) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z) \quad \forall x, y, z \in Q$

3) $\tau_y : Q \rightarrow Q$ def. $\tau_y(x) = x * y$ biunivoca $\forall y \in Q$

quandle involutivo $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ quandle t.c. τ_y involuzione $\forall y \in Q$

- Esempi: 1) G gruppo $\rightsquigarrow (G, *)$ quandle con $x * y = y^{-1}xy$
 $Q \subset G$ chiuso rispetto al coniugio $\rightsquigarrow (Q, *)$ quandle
 2) $T_\ell = (\{\text{trasposizioni di } \Sigma_\ell\}, *)$ quandle involutivo
 3) G gruppo e $n \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow (G, *)$ quandle con $x * y = y^{-n}xy^n$
 4) G gruppo $\rightsquigarrow (G, *)$ quandle invol. con $x * y = yx^{-1}y$
 5) $Q_\ell = (\mathbb{Z}_\ell, *)$ quandle involutivo con $x * y = 2y - x$

$D \subset R^2$ diagramma orientato, Q quandle

\rightsquigarrow Q -colorazione di $D \stackrel{\text{def}}{=} Q$ -etichettatura degli archi di D
 tale che per ogni incrocio si ha

$$\begin{array}{c} | b = a * c \\ \hline c \longrightarrow \\ \hline | a \end{array}$$

$D \subset R^2$ diagramma (non orientato), Q quandle involutivo

\rightsquigarrow Q -colorazione di $D \stackrel{\text{def}}{=} Q$ -etichettatura degli archi di D
 tale che per ogni incrocio si ha

$$\begin{array}{c} | b = a * c \\ \hline c \longrightarrow \\ \hline | a = b * c \end{array}$$

$\text{Col}_Q(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{Q\text{-colorazioni di } D\}$ in entrambi i casi

Prop. $D, D' \subset R^2$ diagrammi (orientati), Q quandle (involutivo)
 Reidemeister-equiv. tra D e $D' \rightsquigarrow \text{Col}_Q(D) \leftrightarrow \text{Col}_Q(D')$
 $\Rightarrow \text{col}_Q(K) \stackrel{\text{def}}{=} |\text{Col}_Q(D)|$ con D diag. (orientato) di K
 invariante isotopico del nodo (orientato) K

Dim. basta considerare il caso di un singolo mov. di Reidemeister
 mov. 1/2/3 seguono rispettivamente dalle prop. 1/3/2 di $*$

Note: 1) $\text{Col}_{Q_\ell}(D)$ è uno \mathbb{Z}_ℓ -modulo

2) $\text{col}_{Q_\ell}(K)$ multiplo di ℓ (Q_ℓ -col. $+i \rightsquigarrow Q_\ell$ -col. $\forall i \in \mathbb{Z}_\ell$)

3) $\text{col}_{Q_\ell}(K)$ potenza di ℓ se ℓ primo (sist. lineare in \mathbb{Z}_ℓ)

4) ℓ pari \Rightarrow in ogni Q_ℓ -colorazione di un diagramma
la parità lungo le componenti è costante

$K \subset R^3$ nodo $\rightsquigarrow q_\ell(K) \stackrel{\text{def}}{=} \text{col}_{Q_\ell}(K)/\ell \in \mathbb{N}$ per ogni $\ell \in \mathbb{Z}$

Note: 1) $q_\ell(K)$ invariante isotopico e $q_\ell(\bar{K}) = q_\ell(K)$

(riflessione $\rightsquigarrow \text{Col}_{Q_\ell}(D) \leftrightarrow \text{Col}_{Q_\ell}(\bar{D})$)

2) K banale $\Leftrightarrow q_\ell(K) = \ell^{n(K)-1} \forall \ell \in \mathbb{Z}$

3) $q_2(K) = 2^{n(K)-1}$ (in ogni incrocio $a = b$)

4) $q_3(W) = 1 \Rightarrow W$ non banale

Prop. 1) $q_\ell(K_1 \sqcup K_2) = \ell q_\ell(K_1) q_\ell(K_2) \forall K_1, K_2$ nodi

2) $q_\ell(K_1 \# K_2) = q_\ell(K_1) q_\ell(K_2) \forall K_1, K_2$ nodi connessi

Dim. 1) $\text{Col}_{Q_\ell}(D_1 \sqcup D_2) \leftrightarrow \text{Col}_{Q_\ell}(D_1) \times \text{Col}_{Q_\ell}(D_2)$

2) $\text{Col}_{Q_\ell}(D_1 \# D_2) \hookrightarrow \text{Col}_{Q_\ell}(D_1) \times \text{Col}_{Q_\ell}(D_2)$

(posto $\ell = 2^h k$ con k dispari, induzione su $h \geq 0$)

\Rightarrow in ogni Q_ℓ -colorazione di $D_1 \# D_2$ i due archi
tra D_1 e D_2 hanno lo stesso colore)