

$K \subset R^3$ nodo (connesso)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} K \cong S^1$ ($\exists k : S^1 \rightarrow K$ omeomorfismo)

$K \subset R^3$ nodo con n componenti (n -nodo)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} K = K_1 \cup \dots \cup K_n \subset R^3$ unione di n nodi connessi disgiunti

$\iff K \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ unione topologica di n copie di S^1

Nota: nel seguito il termine nodo significa un qualunque n -nodo
(nodo connesso o n -nodo solo per specific. il num. di comp.)

$n(K) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\text{numero di componenti del nodo } K}$

nodo orientato $\stackrel{\text{def}}{=} \text{nodo con un'orientazione (= verso di percor.)}$

Note: 1) K nodo con n componenti $\Rightarrow K$ ammette 2^n orientazioni

2) K nodo orientato $\rightsquigarrow -K \stackrel{\text{def}}{=} K$ con orientaz. opposta

$|K| \stackrel{\text{def}}{=} K$ non orientato

$K, K' \subset R^3$ nodi (orientati)

equivalenti $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists h : R^3 \rightarrow R^3$ omeo tale che $K' = h(K)$

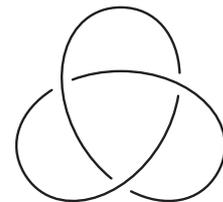
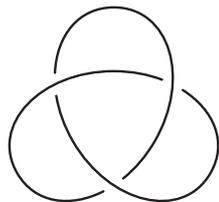
isotopi ($K \cong K'$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} h$ è realizzabile con un'isotopia $H : \text{id}_{R^3} \cong h$
($H : R^3 \times [0, 1] \rightarrow R^3$ omot. t.c. h_t omeo $\forall t$)

Note: 1) $\text{Omeo}_+ R^m \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \text{Omeo } R^m \mid \exists H : \text{id}_{R^m} \cong h\} < \text{Omeo } R^m$
($H : h_0 \cong h_1, K : k_0 \cong k_1 \rightsquigarrow L = (k_t \circ h_t^{-1})_t : k_0 \circ h_0^{-1} \cong k_1 \circ h_1^{-1}$)
quindi \cong è una relazione di equivalenza tra nodi

2) $n(K)$ è invariante per equival. topologica (e isotopia)

3) K, K' isotopi \Rightarrow equivalenti (il viceversa non vale)

4) K nodo (orientato) $\rightsquigarrow \bar{K} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(K)$ nodo simmetrico di K



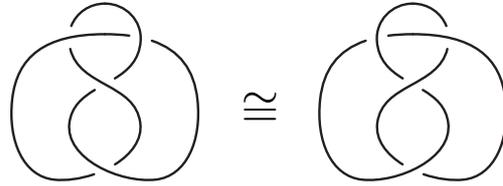
$T = \text{nodo trifoglio positivo}$ $\bar{T} = \text{nodo trifoglio negativo}$

$K \subset R^3$ nodo banale $\stackrel{\text{def}}{\iff} K \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \subset R^2 \subset R^3$

nodo simmetrico $\stackrel{\text{def}}{\iff} K \cong \bar{K}$ (nodi trifoglio non simm.)

nodo invertibile $\stackrel{\text{def}}{\iff} +K \cong -K$ (nodi trifoglio invertibili)

- Note: 1) $K \subset R^2 \subset R^3$ nodo planare \Rightarrow banale (teor. di Schönflies)
 2) nodi trifoglio non sono banali ($G(K) \cong G(\bar{K}) \not\cong \mathbb{Z}$)
 3) K nodo banale $\Rightarrow K$ simmetrico e invertibile
 4) $\exists K$ nodo non simmetrico e non invertibile



E = nodo a otto, simmetrico e invertibile

Teorema di approssimazione diff. per immersioni in $\dim \leq 3$

$A \subset R^{m \leq 3}$ aperto, $\varepsilon : A \rightarrow]0, +\infty[$ continua \Rightarrow

- 1) $\forall h : A \rightarrow R^m$ immers. $\exists H : A \times [0, 1] \rightarrow R^m$ omotopia t.c.
 $h_0 = h, h_t$ immers. diff. reg. e $d(h_0(x), h_t(x)) < \varepsilon(x) \forall t > 0$
 2) $\forall H : A \times [0, 1] \rightarrow R^m$ omot. di immers. con h_0, h_1 diff. reg.
 $\exists G : A \times [0, 1] \rightarrow R^m$ omotopia diff. t.c. $g_0 = h_0, g_1 = h_1,$
 g_t immers. diff. reg. e $d(h_t(x), g_t(x)) < \varepsilon(x) \forall t \in [0, 1]$

Corol. $\forall h : A \rightarrow B$ omeo tra aperti di $R^{m \leq 3}$

$\exists H : h \cong_\varepsilon g : A \rightarrow B$ diffeo ($\forall \varepsilon : A \rightarrow]0, +\infty[$ cont.)

\hookrightarrow ε -isotopia ($d(h_0(x), h_t(x)) < \varepsilon(x) \forall x \in A \forall t \in [0, 1]$)

Prop. $h \in \text{Omeo } R^{m \leq 3} \Rightarrow \begin{cases} h \cong \text{id}_{R^m} \Leftrightarrow h \in \text{Omeo}_+ R^m \\ h \cong \iota_{R^m} \Leftrightarrow h \notin \text{Omeo}_+ R^m \end{cases}$

Dim. $h \cong g \in \text{Diffeo } R^m$ con $g(0) = 0$ (corollario + traslazione)

$g \cong \ell \in \text{Aff}_0 R^m \cong \text{GL}(m, \mathbb{R})$ (isotopia $(g_t(x) = g(tx)/t)_{t>0}$)

$\ell \cong i \in \text{Isom}_0 R^m \cong \text{O}(m)$ (ortonormaliz. di Gram-Schmidt)

$i \cong \text{id}_{R^m}, \iota_{R^m}$ (rotazioni successive, per induzione su $m \geq 1$)

$h \rightsquigarrow \nu_h : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ definita $\nu_h(x) = \frac{h(x) - h(0)}{\|h(x) - h(0)\|}$

$\rightsquigarrow \nu_h^* : \mathcal{H}^{m-1} S^{m-1} \rightarrow \mathcal{H}^{m-1} S^{m-1} \leftrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\sigma_h} \mathbb{R}$ con $\sigma_h \in \mathbb{R}$

$H = (h_t)_{t \in [0,1]}$ isotopia $\rightsquigarrow H^\nu = (h_t^\nu = \nu_{h_t})_{t \in [0,1]}$ omotopia

quindi $h \cong h' \Rightarrow \sigma_h = \sigma_{h'}$, da cui $\sigma_h = \pm 1$ ($= \sigma_{\text{id}_{R^m}}, \sigma_{\iota_{R^m}}$)

inoltre $\text{id}_{R^m} \not\cong \iota_{R^m}$ ($\sigma_{\text{id}_{R^m}} = 1 \neq -1 = \sigma_{\iota_{R^m}}$)

Corol. $\forall h \in \text{Omeo } R^{m \leq 3}, h \in \text{Omeo}_+ R^m \text{ o } \iota \circ h, h \circ \iota \in \text{Omeo}_+ R^m$

Note: 1) $\text{Omeo}_+ R^m \leq \text{Omeo } R^m$ sottogruppo (normale) di indice 2
 \uparrow omeomorfismi che conservano l'orientazione

2) $\text{Diffeo}_+ R^m = \text{Diffeo } R^m \cap \text{Omeo}_+ R^m$

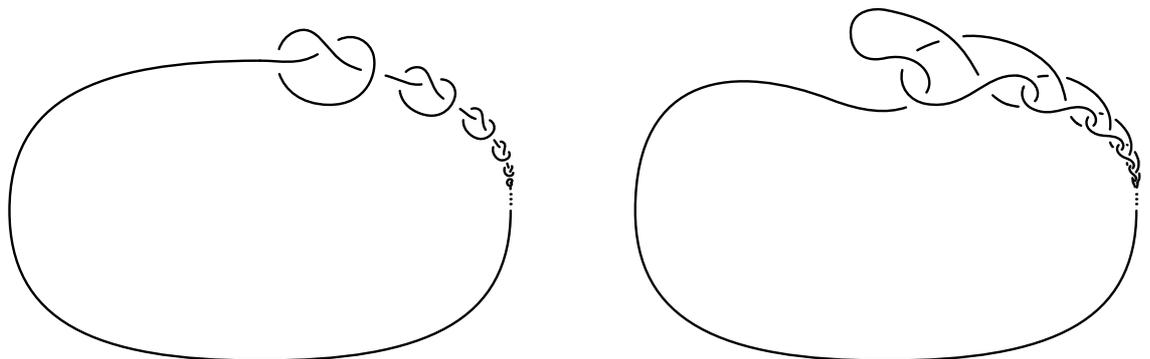
Note: 1) $\{\text{nodi orient.}\} / \text{isotopia} \rightsquigarrow \{\text{nodi non orient.}\} / \text{isotopia}$
 $\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $\{\text{nodi orient.}\} / \text{equiv.} \rightsquigarrow \{\text{nodi non orient.}\} / \text{equiv.}$

2) K nodo orient. banale $\Leftrightarrow |K|$ nodo non orient. banale
 $\Updownarrow \qquad \qquad \qquad \Updownarrow$
 K equiv. a $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \Leftrightarrow |K|$ equiv. a $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$

Nodi e deformazioni docili

$K \subset R^3$ nodo docile $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists T \subset R^3$ intorno tubolare topologico di K
 $(T \cong K \times B^2 \text{ omeo t.c. } p \leftrightarrow (p, 0) \forall p \in K)$
nodo liscio $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} K$ curva differenziabile regolare
nodo poligonale $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} K$ poligonale chiusa (semplice)

Note: 1) la nozione di nodo docile è invariante per isotopia (ed equiv. topologica), quelle di nodo liscio/poligonale no
 2) nodi selvaggi (non docili)



$G(K)$ non finitam. generato $G(K) \cong \mathbb{Z}$ ma $K \not\cong S^1$

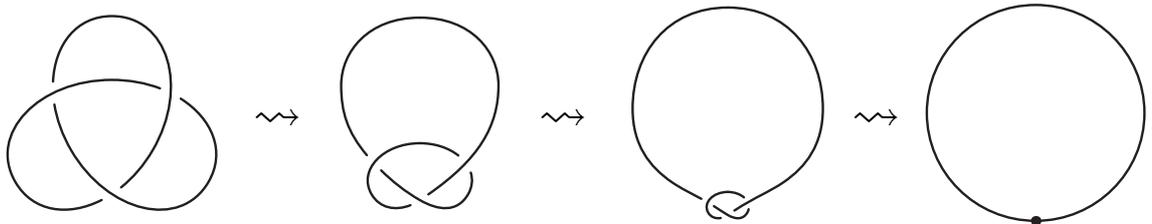
Prop. K nodo liscio/poligonale \Rightarrow docile

Dim. K nodo liscio

orientazione su $K \rightsquigarrow p \mapsto T(p)$ versore tangente
 $\rightsquigarrow V \in R^3$ versore t.c. $V \neq \pm T(p)$ per ogni $p \in K$

$(K_t)_{t \in [0,1]}$ deform. docile $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists$ fam. cont. di int. tubolari $(T_t)_{t \in [0,1]}$
 $(\exists L : T \times [0,1] \rightarrow R^3$ cont. t.c. $L|_T = J$ e $\ell_t : T \cong T_t \forall t)$
deform. liscia $\stackrel{\text{def}}{=} \text{famiglia differenziabile di nodi lisci}$
 $(\exists J$ diff. e j_t regolare $\forall t$, basta J cont. e $j'_t(s)$ continua)
deform. poligonale $\stackrel{\text{def}}{=} \text{fam. cont. non deg. di nodi polig.}$
 $(t \mapsto v_i(t)$ cont. $\forall v_i$ vertice e $d(v_i(t), v_{i+1}(t)) > \delta > 0)$

Note: 1) isotopia \Rightarrow deform. docile $(H : K \cong K' \rightsquigarrow L = H|_{T \times [0,1]})$
 2) $K \rightsquigarrow K' \rightsquigarrow K''$ deform. docili $\rightsquigarrow K \rightsquigarrow K''$ deform. docile
 3) la nozione di deform. docile è invariante per isotopia
 (ed equiv. topologica), quelle di deform. liscia/polig. no
 4) deformazione selvaggia (non docile)



5) deform. docile $\not\iff K_t$ nodo docile $\forall t$ (strozzatura)
 6) deform. liscia $\not\iff K_t$ nodo liscio $\forall t$ ($j'_t(s)$ non cont.)
 7) deform. polig. $\not\iff K_t$ nodo polig. $\forall t$ (degeneraz. spigoli)

Prop. $J : K \rightsquigarrow K'$ deformazione liscia/poligonale \Rightarrow docile

Dim. $J : K \rightsquigarrow K'$ deformazione liscia

$j'_t(s)$ continua \Rightarrow scomp. J in piccole deform. (nota 2 sopra)
 si può assumere che $\exists V \in R^3$ versore t.c.

$$V \neq \pm T_t(s) = \pm j'_t(s) / \|j'_t(s)\| \quad \forall s \in K \quad \forall t$$

$$\rightsquigarrow N_t(s) = V \times T_t(s) / \|V \times T_t(s)\|, \quad B_t(s) = T_t(s) \times N_t(s)$$

$$\text{e } \ell_t(s, (x, y)) = j_t(s) + \varepsilon(x N_t(s) + y B_t(s)) \text{ appl. cont.}$$

ε suff. piccolo $\Rightarrow \ell_t : K \times B^2$ immers. e $\ell_t(s, 0) = j_t(s) \quad \forall t \quad \forall s$

$\rightsquigarrow (T_t = \ell_t(T))_{t \in [0,1]}$ fam. cont. di int. tub. $\Rightarrow J$ deform. docile

$J : K \rightsquigarrow K'$ deformazione poligonale

$d(v_i(t), v_{i+1}(t)) > \delta > 0 \Rightarrow$ si possono rendere i nodi K_t lisci
 con raccordi di ampiezza costante

$\rightsquigarrow J \cong J'$ deform. liscia $\Rightarrow J$ deform. docile (nota 3 sopra)

Prop. $J : K \rightsquigarrow K'$ deformazione docile tra nodi lisci/poligonali
 $\Rightarrow J \cong_\varepsilon J' : K \rightsquigarrow K'$ deformazione liscia/poligonale

Dim. $J : K \rightsquigarrow K'$ deformazione docile tra nodi lisci
 $\rightsquigarrow L : T \times [0, 1] \rightarrow R^3$ estensione a T int. tubolare di K
 $\rightsquigarrow H = L|_A : A \times [0, 1] \rightarrow R^3$ restrizione con $A = \text{Int } T \subset R^3$
 si può assumere h_1 imm. diff. reg. (appr. per imm. + int. tub.)
 $\Rightarrow H \cong_\varepsilon G : A \times [0, 1] \rightarrow R^3$ omot. diff. t.c. $g_0 = h_0, g_1 = h_1$
 e g_t imm. diff. reg. $\forall t \in [0, 1]$
 $\Rightarrow J \cong_\varepsilon J' = G|_{K \times [0, 1]} : K \rightsquigarrow K'$ deform. liscia
 $J : K \rightsquigarrow K'$ deformazione docile tra nodi poligonali
 $\Rightarrow J \cong_\varepsilon J_\ell : K_\ell \rightsquigarrow K'_\ell$ deform. liscia tra appr. lisce di K e K'
 $\Rightarrow J_\ell \cong_\varepsilon (J_\ell)_p : (K_\ell)_p \rightsquigarrow (K'_\ell)_p$ deform. polig. tra polig. inscr.
 $\rightsquigarrow J \cong_\varepsilon J' : K \rightsquigarrow (K_\ell)_p \rightsquigarrow (K'_\ell)_p \rightsquigarrow K'$ deform. poligonale

Teorema. $K, K' \subset R^3$ nodi docili/lisci/poligonali

$K \cong K' \Leftrightarrow \exists K \rightsquigarrow K'$ deform. docile/liscia/poligonale

Dim. L'implicazione \Rightarrow segue dalla prop. preced. (+ nota 1 sopra)
 mentre per l'implicazione \Leftarrow basta il caso liscio (prop. prec.)

$J : K \rightarrow K'$ deformazione liscia
 $\rightsquigarrow G : A \times [0, 1] \rightarrow R^3$ omot. diff. come nella dimostr. prec.
 $\rightsquigarrow (V_t)_{t \in [0, 1]}$ fam. diff. con V_t campo di vettori su $A_t = g_t(A)$
 definito $V_t(x) = (\partial G / \partial t)(g_t^{-1}(x), t)$
 $\rightsquigarrow (W_t)_{t \in [0, 1]}$ fam. diff. di campi vettori su R^3 t.c. $W_t|_{C_t} = V_t$
 con $C_t = g_t(C), C \subset A$ int. ch. di $K, \forall t \in [0, 1]$
 $\rightsquigarrow H : K \cong K'$ isotopia diff. (integr. $(W_t)_{t \in [0, 1]}$ rispetto a t)

Nota: nel seguito nodi e deformazioni si intendono tutti docili
 e se necessario lisci o poligonali, anche le superfici tutte
 lisce (diff. regolari) o poligonali a seconda dell'occorrenza
 ($S \subset R^3$ superficie poligonale $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S = P_1 \cup \dots \cup P_m$ con
 P_i polig./triang. affine $\forall i$ e $P_i \cap P_j = \emptyset$ /vertice/lato $\forall i \neq j$
 $\rightsquigarrow S' \subset R^3$ superficie liscia a meno di \cong_ε)

Corol. $K \subset R^3$ nodo liscio/poligonale banale \Leftrightarrow

$$K = \text{Bd}(D_1 \cup \dots \cup D_n) \text{ con } D_i \subset R^3 \text{ dischi lisci/polig. disg.}$$

Dim. Basta considerare il caso liscio (il caso poligonale segue per approssimazione: dischi polig. \leftrightarrow lisci a meno di \cong_ε)

K nodo liscio banale

$$\Rightarrow \exists H : K \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \subset R^2 \text{ isotopia diff. (dim. teorema)}$$

$$\Rightarrow D_1 \cup \dots \cup D_n = h_1^{-1}(B^2 \sqcup \dots \sqcup B^2)$$

dischi lisci disgiunti t.c. $K = \text{Bd}(D_1 \cup \dots \cup D_n)$

$K = \text{Bd}(D_1 \cup \dots \cup D_n)$ con $D_i \subset R^3$ dischi lisci disgiunti

$$\rightsquigarrow \varphi : B^2 \sqcup \dots \sqcup B^2 \rightarrow D_1 \cup \dots \cup D_n \subset R^3 \text{ imm. diff. reg.}$$

$$\rightsquigarrow (K_t = \varphi(tS^1 \sqcup \dots \sqcup tS^1))_{t \in [\varepsilon, 1]} : K_\varepsilon \rightsquigarrow K \text{ deform. liscia}$$

t.c. $K_\varepsilon \cong K'_\varepsilon =$ piccole circonfer. separate $C_i \subset T_0 D_i$

$$\Rightarrow K \cong K_\varepsilon \cong K'_\varepsilon \text{ banale}$$

K_i componente di $K \subset R^3$ nodo è separabile

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} K \cong K' \text{ t.c. } K' - K'_i \text{ e } K'_i \text{ sono separati da un piano}$$

$$\Leftrightarrow \exists S \subset R^3 \text{ 2-sfera liscia t.c. } K - K_i \subset I(S) \text{ e } K_i \subset E(S)$$

$$\Leftrightarrow \exists S \subset R^3 \text{ 2-sfera liscia t.c. } K_i \subset I(S) \text{ e } K - K_i \subset E(S)$$

(teorema di Schönflies: $\forall S \subset R^3$ 2-sfera liscia $\exists H : S^2 \cong S$)

Corol. $K \subset R^3$ nodo (docile) è banale

$$\Leftrightarrow \text{ogni componente di } K \text{ è banale e separabile}$$

Dim. $K \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \subset R^2 \Rightarrow$ componenti banali e separabili

K nodo liscio (a meno di \cong_ε) con comp. K_i banali e separ.

$$n(K) = 1 \Rightarrow K \text{ banale (corollario precedente)}$$

$$n(K) > 1 \Rightarrow \exists D \subset R^3 \text{ disco liscio e } \exists S \subset R^3 \text{ 2-sfera liscia}$$

$$K_n = \text{Bd} D \subset I(S) \text{ e } K_1 \cup \dots \cup K_{n-1} \subset E(S)$$

inoltre si possono supporre D e S trasversali

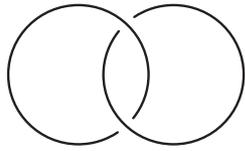
$$\Rightarrow \text{si intersecano in curve chiuse lisce disgiunte}$$

$$\rightsquigarrow D \subset I(S) \text{ (chirurgia lungo curve minimali in } S)$$

$$\Rightarrow K \rightsquigarrow K' \text{ con } K'_n \text{ piccola circonfer. separata}$$

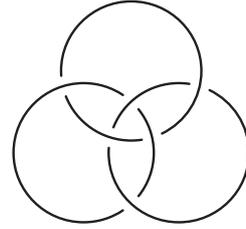
$$\Rightarrow K \text{ banale per induzione su } n(K)$$

Nota: ogni componente di K banale $\nRightarrow K$ banale



2-nodo di Hopf

(comp. non separabili)



3-nodo borromeo

(comp. separabili a coppie)

Diagrammi

$K \subset R^3$ nodo liscio (orientato) verticalmente ammissibile

$\xLeftrightarrow{\text{def}} \pi| : K \rightarrow R^2$ regolare (\Leftrightarrow no tang. vert.) e iniettiva eccetto un numero finito di punti doppi trasversali (\Leftrightarrow tang. distinte)

$\rightsquigarrow D \stackrel{\text{def}}{=} \pi(K) +$ sotto/sopra passaggi nei punti doppi (incroci)

\swarrow diagramma liscio (orientato) di K

$K \subset R^3$ nodo poligonale (orientato) verticalmente ammissibile

$\xLeftrightarrow{\text{def}} \pi| : K \rightarrow R^2$ iniettiva eccetto un numero finito di punti doppi trasversali (\Leftrightarrow no spigoli vert., pt. doppi interni a spigoli)

$\rightsquigarrow D \stackrel{\text{def}}{=} \pi(K) +$ sotto/sopra passaggi nei punti doppi (incroci)

\swarrow diagramma poligonale (orientato) di K

Note: 1) D determina K a meno di isotopia verticale

(K e K' nodi verticalmente ammissibili con $D = D' \Rightarrow (K_t = (1-t)K + tK')_{t \in [0,1]}$ def. docile vert. \rightsquigarrow isot. vert.)

2) ogni diagramma liscio/poligonale rappresenta un nodo docile univocamente determinato a meno di isotopia

Prop. $K \subset R^3$ nodo docile

$\Leftrightarrow K \cong_\varepsilon K'$ nodo liscio/poligonale verticalmente ammissibile

$\Leftrightarrow K$ rappresentato (a meno di \cong) da un diag. liscio/polig.

Dim. K' polig. vert. amm. $\rightsquigarrow K''$ liscio vert. amm. (raccordi lisci)

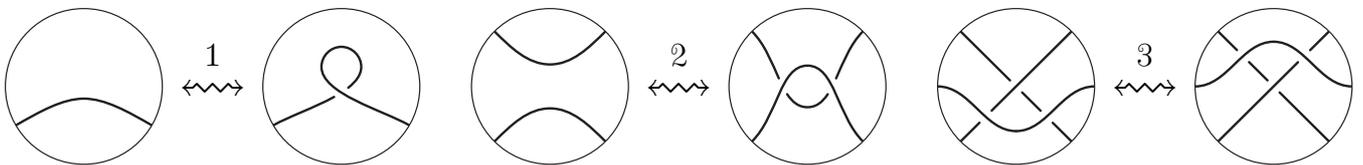
\Rightarrow basta il caso K' polig. con K stesso polig. (a meno di \cong_ε)

v_1, \dots, v_n vert. di $K \rightsquigarrow w_1 = \pi(v_1), \dots, w_n = \pi(v_n)$ vert. di D

$K \cong_\varepsilon K'$ t.c. $v'_i \notin$ piano verticale per due punti dell'insieme finito degli w'_1, \dots, w'_{i-1} e delle intersezioni di due rette (incidenti) da loro generate

$D, D' \subset R^2$ diagrammi di $K, K' \subset R^3$ nodi lisci/poligonali

$D \rightsquigarrow D' \stackrel{\text{def}}{\iff} D$ e D' sono equivalenti a meno di \cong (isotopia del piano, che mantiene la struttura del diagramma) e dei seguenti movimenti di Reidemeister (locali nel senso che modificano la struttura del diagramma solo nel disco considerato)



Note: 1) $D \rightsquigarrow D' \Rightarrow K \cong K'$

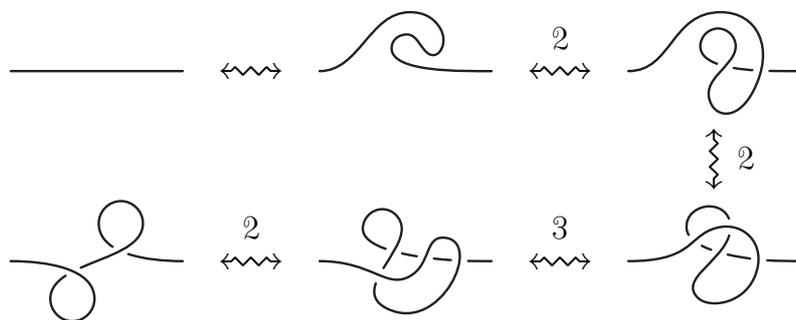
(isotopia del piano si estende a isotopia dello spazio e movim. di Reidemeister \iff isotopie locali dello spazio)

2) movim. di Reidemeister invarianti per riflessione

(il movimento simmetrico 2' coincide con 2,

il movimento simmetrico 3' equivale a 3 mediante 2,

il movimento simmetrico 1' equivale a 1 mediante 2 e 3)



Teorema. $K, K' \subset R^3$ nodi con diagrammi $D, D' \subset R^2$

$\Rightarrow D \rightsquigarrow D'$ se e solo se $K \cong K'$

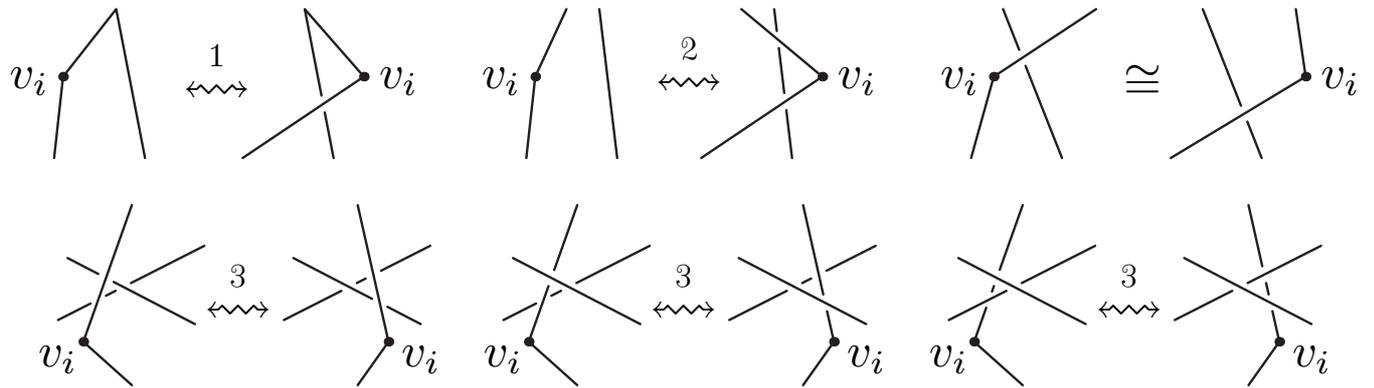
Dim. $K \cong K'$ nodi poligonali (a meno di \cong_ε)

$\rightsquigarrow K \rightsquigarrow K'$ deformazione poligonale

\rightsquigarrow sequenza di ε -deform. polig. tra nodi polig. vert. ammis.

t.c. un vertice v_i si sposta linearm. e gli altri restano fissi

$\varepsilon > 0$ suff. piccolo \Rightarrow a meno di isotopia e riflessione si ha:



Note: 1) $\{\text{nodi in } R^3\} / \cong_{R^3} \rightsquigarrow \{\text{diagr. in } R^2\} / \cong_{R^2}$ e movimenti
 2) diagrammi e movimenti lisci \leftrightarrow polig. (a meno di \cong_ε)

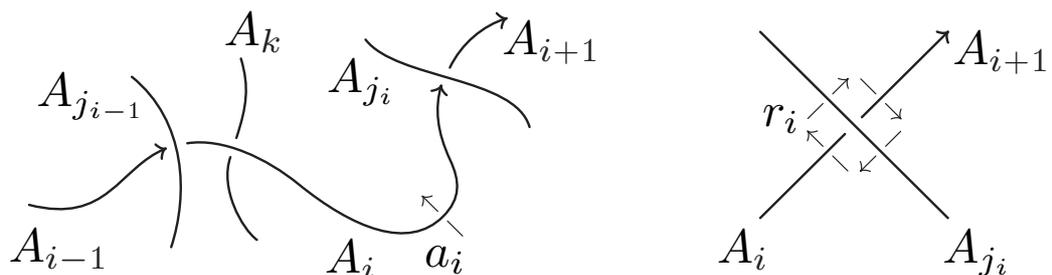
Gruppo fondamentale

$K \subset R^3$ nodo $\rightsquigarrow G(K) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(R^3 - K)$
 \swarrow
gruppo del nodo K

Note: 1) $K \cong K' \Leftrightarrow R^3 - K \cong R^3 - K' \Leftrightarrow G(K) \cong G(K')$
 2) la prima \Leftarrow vale a meno di simmetrie
 per nodi connessi (Gordon-Luecke 1989)
 la seconda \Leftarrow vale per nodi connessi primi (Whitten 1987)

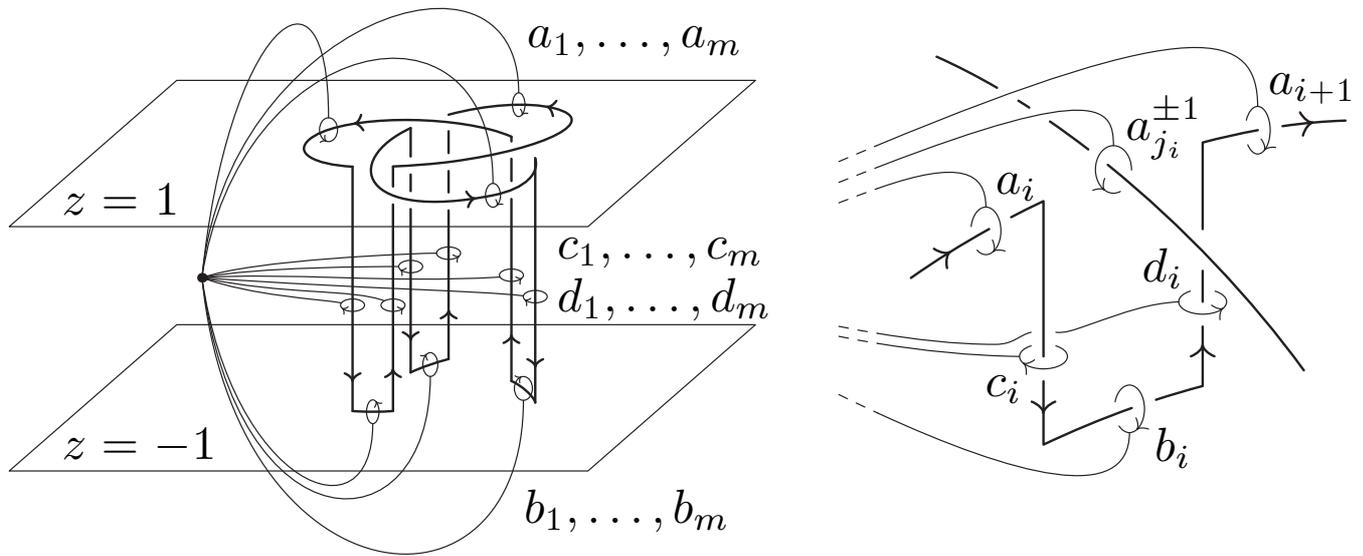
Prop. $K \subset R^3$ nodo con diagramma $D \subset R^2$

$G(K) \cong \langle a_1, \dots, a_m \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ presentazione di Wirtinger
 con un generatore a_i per ogni arco A_i di D e una relazione
 $r_i = a_i a_{j_i}^{\pm 1} a_{i+1}^{-1} a_{j_i}^{\mp 1}$ per ogni incrocio di D (gli archi A_i sono
 numerati ciclicamente sulle componenti di K e la relazione
 r_i corrisponde all'incrocio formato da A_i, A_{i+1} e A_{j_i})



Dim. K con archi di D a quota 1 e sottopassaggi a quota -1
 $X = R^3 - K = X_+ \cup X_-$ con $X_\pm = X \cap \{z \gtrless \mp 1\} \subset X$ aperti

orientazione su $K \rightsquigarrow$ numerazione ciclica di archi e incroci
 orientazione dei meridiani a_i, b_i, c_i, d_i

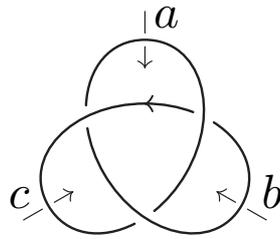


$$\begin{aligned} \pi_1(X_+) &\cong \langle a_1, \dots, a_m \rangle, \quad \pi_1(X_-) \cong \langle b_1, \dots, b_m \rangle \\ \pi_1(X_+ \cap X_-) &\cong \langle c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m \rangle \\ \Rightarrow \pi_1(X) &\cong \langle a_i, b_i \mid b_i w_i a_i^{-1} w_i^{-1}, b_i w_i a_{j_i}^{\pm 1} a_{i+1}^{-1} a_{j_i}^{\mp 1} w_i^{-1} \rangle \\ &\cong \langle a_i, i = 1, \dots, m \mid a_i a_{j_i}^{\pm 1} a_{i+1}^{-1} a_{j_i}^{\mp 1}, i = 1, \dots, m \rangle \end{aligned}$$

- Note: 1) num. rel. < num. gen. se D ha comp. banali separate
 2) $H(K) \stackrel{\text{def}}{=}} \text{Ab}(G(K)) \cong H_1(R^3 - K) \cong \mathbb{Z}^{n(K)} = \langle \mu_1, \dots, \mu_{n(K)} \rangle$
 con μ_j classe dei meridiani della componente K_j
 ($\text{Ab}(r_i) = a_i a_{i+1}^{-1} \Rightarrow a_i \sim a_{i+1}$ lungo ogni componente K_j)
 3) μ_j è univocamente determinato come coppia libero
 a meno del verso che dipende dall'orientazione di K_j



- Esempi: 1) K nodo banale $\Rightarrow G(K) = \langle a_1, \dots, a_{n(K)} \rangle$ gruppo libero
 in particolare: K nodo banale connesso $\Rightarrow G(K) \cong \mathbb{Z}$
 2) T nodo trifoglio \Rightarrow
 $G(T) \cong \langle a, b, c \mid acb^{-1}c^{-1}, bac^{-1}a^{-1}, cba^{-1}b^{-1} \rangle$
 $\cong \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1}, baba^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle$
 $\cong \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$

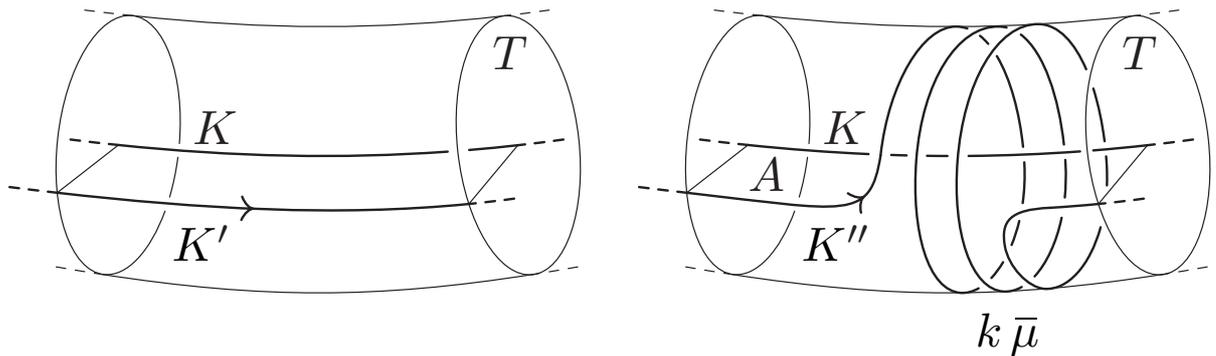


$G(T)$ non abeliano $\Rightarrow G(T) \not\cong \mathbb{Z} \Rightarrow T$ non banale
 ($\exists \varphi : G(T) \rightarrow \Sigma_3$ omomorfismo suriettivo)

Prop. $K \subset R^3$ nodo connesso

K banale $\Leftrightarrow G(K)$ abeliano $\Leftrightarrow G(K) \cong \mathbb{Z}$

Dim. Basta provare $G(K) = \langle \mu \rangle \Rightarrow K$ banale (vedi note sopra)
 $T \subset R^3$ intorno tubolare di K liscio $\Rightarrow R^3 - K \rightsquigarrow \text{Cl}(R^3 - T)$
 $K' \subset \text{Bd}T$ nodo liscio orientato “parallelo” a K



$G(K) \cong \langle \mu \rangle \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $K' \simeq k\mu$ in $\text{Cl}(R^3 - T)$
 $\rightsquigarrow K'' \cong K' + k\bar{\mu} \subset \text{Bd}T$ coppia non singolare
 tale che $K'' \simeq *$ in $\text{Cl}(R^3 - T)$
 $\rightsquigarrow D \subset \text{Cl}(R^3 - T)$ disco singolare t.c. $\text{Bd}D = K''$
 $\rightsquigarrow D' \subset \text{Cl}(R^3 - T)$ disco liscio non singolare
 tale che $\text{Bd}D' = K''$ (lemma di Dehn)
 $\rightsquigarrow D'' = D' \cup A$ con A anello tra K e K''
 disco liscio non singolare t.c. $\text{Bd}D'' = K$
 $\Rightarrow K$ banale

Note: 1) la proposizione si estende al caso non connesso:

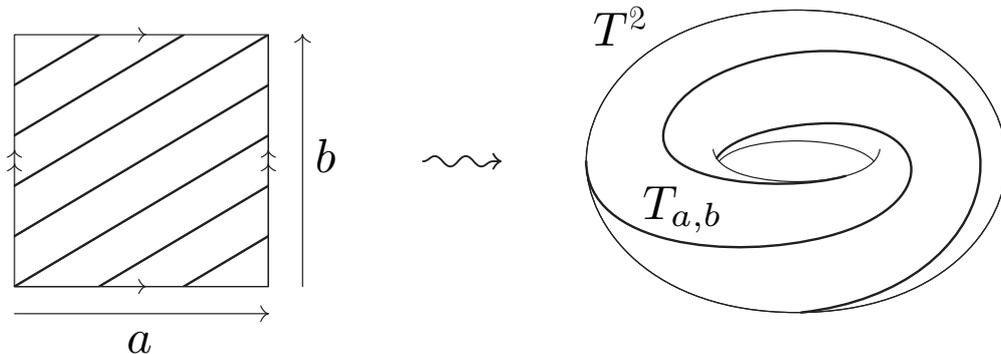
$K \subset R^3$ nodo banale $\Leftrightarrow G(K)$ libero di rango $n(K)$

2) Lemma di Dehn (1910): singolarità in $\text{Int}D$ eliminabili
 non basta chirurgia: punti tripli (Papakiriakopoulos 1957)

Famiglie di nodi

$T_{a,b} \subset R^3$ nodo torico con $a, b \in \mathbb{Z}$

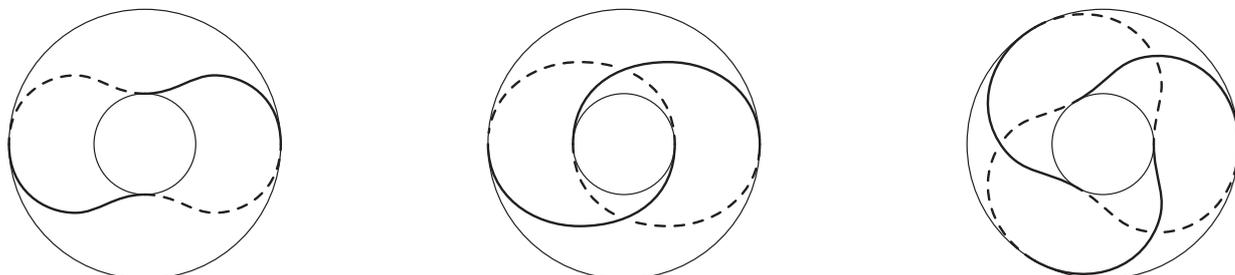
def curva chiusa semplice in $T^2 \subset R^3$ toro di rotazione
 equivalente a (a paralleli) + (b meridiani) in $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$,
 univocamente determinata a meno di isotopia da a e b



Note: 1) $n(T_{a,b}) = (a, b)$, quindi $T_{a,b}$ nodo connesso $\Leftrightarrow (a, b) = 1$

2) $T_{a,b} \cong T_{b,a}$, $T_{a,b} \cong T_{-a,-b} \cong -T_{a,b}$ e $T_{-a,b} \cong T_{a,-b} \cong \bar{T}_{a,b}$
 mentre $T_{a,b}$ e $T_{a',b'}$ topolog. equiv. in $T^2 \Leftrightarrow (a, b) = (a', b')$

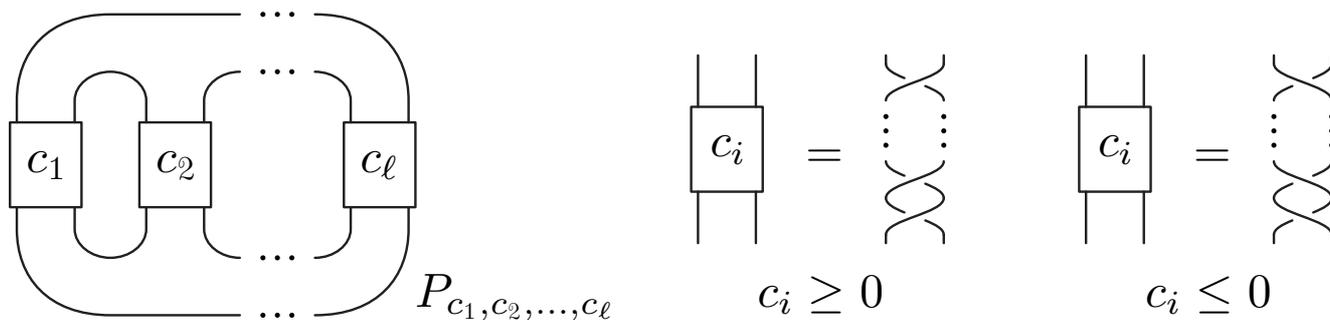
Esempi:



$T_{1,2}$ (nodo banale) $T_{2,2}$ (2-nodo di Hopf) $T_{2,3}$ (trifoglio neg.)

$P_{c_1, c_2, \dots, c_\ell} \subset R^3$ nodo Pretzel con $c_1, c_2, \dots, c_\ell \in \mathbb{Z}$ e $\ell \geq 1$

definito nella figura seguente

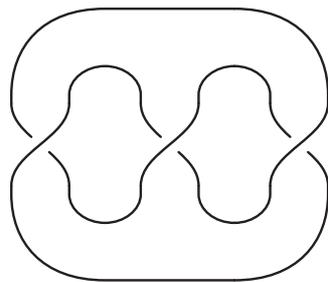


Note: 1) $n(P_{c_1, c_2, \dots, c_\ell}) \leq \ell$ per ogni $c_1, c_2, \dots, c_\ell \in \mathbb{Z}$

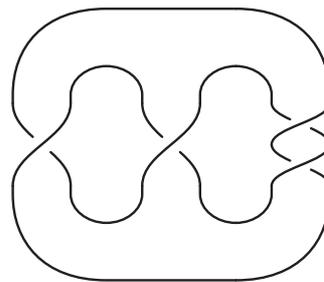
2) $\ell = 1 \rightsquigarrow P_{c_1}$ nodo banale per ogni $c_1 \in \mathbb{Z}$

$\ell = 2 \rightsquigarrow P_{c_1, c_2} \cong T_{2, c_1+c_2}$ per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$

Esempi:

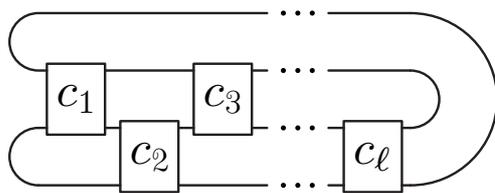


$P_{1,1,1}$ (trifoglio neg.)

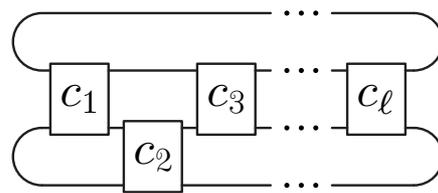


$P_{1,1,2}$ (nodo a otto)

$R_{c_1, c_2, \dots, c_\ell} \subset R^3$ nodo razionale con $c_1, c_2, \dots, c_\ell \in \mathbb{Z}$ e $\ell \geq 1$ definito nella figura seguente



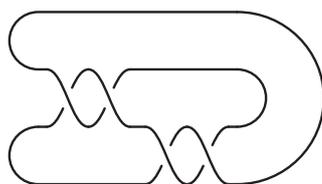
$R_{c_1, c_2, \dots, c_\ell}$ con ℓ pari



$R_{c_1, c_2, \dots, c_\ell}$ con ℓ dispari

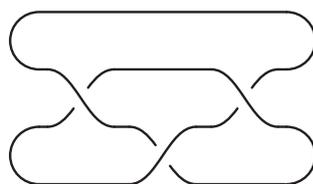
- Note: 1) $n(R_{c_1, c_2, \dots, c_\ell}) = 1, 2$ per ogni $c_1, c_2, \dots, c_\ell \in \mathbb{Z}$
 2) $R_{c_1, c_2, \dots, c_\ell}$ univocam. determ. a meno di \cong dal numero $p/q = 1/(c_1 - 1/(c_2 - 1/(c_3 \dots - 1/(c_{\ell-1} - 1/c_\ell)))) \in \mathbb{Q}$

Esempi:



$R_{2,2} \leftrightarrow 2/3$

\cong



$R_{1,-1,1} \leftrightarrow 2/3$

(trifoglio neg.)

Operazioni sui nodi

$K_1, K_2 \subset R^3$ nodi (docili)

$\rightsquigarrow K_1 \sqcup K_2 \subset R^3$ nodo (docile) unione separata di K_1 e K_2

$\stackrel{\text{def}}{=} K'_1 \cup K'_2 \subset R^3$, con $K'_1 \cong K_1$ e $K'_2 \cong K_2$ separ. da un piano

Note: 1) $K_1 \sqcup K_2$ ben definito a meno di isotopia

($K''_1 \cong K'_1$ e $K''_2 \cong K'_2$ separati $\Rightarrow K''_1 \cup K''_2 \cong K'_1 \cup K'_2$)

2) $K'_1 \cong K_1$ e $K'_2 \cong K_2 \Rightarrow K'_1 \sqcup K'_2 \cong K_1 \sqcup K_2$

3) l'operazione \sqcup è associativa e commutativa

$K \subset R^3$ nodo separabile (nei nodi K_1 e K_2)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} K \cong K_1 \sqcup K_2$$

$$\iff \exists S \subset R^3 \text{ 2-sfera liscia t.c. } K \cap I(S) \cong K_1 \text{ e } K \cap E(S) \cong K_2$$

$$\iff \exists S \subset R^3 \text{ 2-sfera liscia t.c. } K \cap E(S) \cong K_1 \text{ e } K \cap I(S) \cong K_2$$

$K_1, K_2 \subset R^3$ nodi (docili) connessi orientati

$\rightsquigarrow K_1 \# K_2 \subset R^3$ nodo (docile) connesso orientato

↙ somma connessa di K_1 e K_2

$\stackrel{\text{def}}{=} \text{Cl}(K'_1 \cup K'_2 - A) \subset R^3$ con $K'_1 \cong K_1$ e $K'_2 \cong K_2$ separati da un piano eccetto un arco $A = K'_1 \cap K'_2$ contenuto in esso sul quale K'_1 e K'_2 inducono orientazioni opposte

Note: 1) $K_1 \# K_2$ ben definito a meno di isotopia

(indipendente da $K'_1 \cong K_1$, $K'_2 \cong K_2$ e $A = K'_1 \cap K'_2$)

2) $K'_1 \cong K_1$ e $K'_2 \cong K_2 \Rightarrow K'_1 \# K'_2 \cong K_1 \# K_2$

3) l'operazione $\#$ è associativa, commutativa e $K \# S^1 \cong K$

4) $(-K_1) \# (-K_2) \cong -(K_1 \# K_2)$

5) K_2 non invertibile $\rightsquigarrow K_1 \# K_2 \not\cong K_1 \# (-K_2)$

6) $K \cong K_1 \# K_2 \Leftrightarrow K$ connesso e $\exists S \subset R^3$ 2-sfera liscia t.c.

$$K \cap S = \{p, q\}, (K \cap I(S)) \cup A \cong K_1 \text{ e } (K \cap E(S)) \cup A \cong K_2$$

per ogni arco semplice $A \subset S$ tra p e q

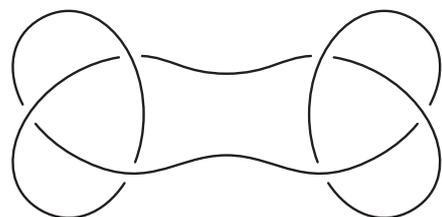
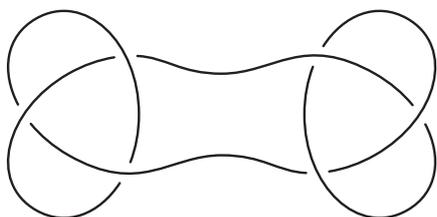
$K \subset R^3$ nodo connesso non banale

primo $\stackrel{\text{def}}{\iff} K \cong K_1 \# K_2 \Rightarrow K_1$ banale o K_2 banale

composto $\stackrel{\text{def}}{\iff} K \cong K_1 \# K_2$ con K_1 e K_2 non banali

Nota: le definizioni non dipendono dall'orientazione

Esempi:



$T \# T =$ nodo della nonna $T \# \bar{T} =$ nodo quadrato

($T \# T \not\cong T \# \bar{T}$, anche se $G(T \# T) \cong G(T \# \bar{T})$)