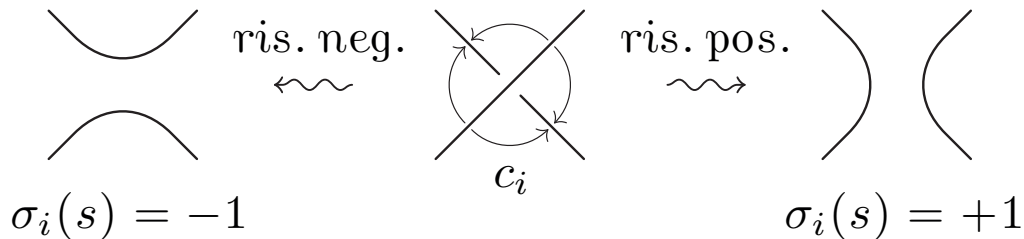


Parentesi di Kauffman

$D \subset R^2$ diagramma

$\rightsquigarrow S(D)$ insieme degli stati di D

s stato di $D \stackrel{\text{def}}{=} \text{curva chiusa semplice in } R^2 \text{ ottenuta con una risoluzione pos./neg. per ogni incrocio}$



$\rightsquigarrow \sigma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1(s) + \dots + \sigma_{c(D)}(s) \in \mathbb{Z}$

$\rho(s) \stackrel{\text{def}}{=} \text{numero di componenti di } s$

$\rightsquigarrow \langle D \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in S(D)} t^{\sigma(s)} (-t^2 - t^{-2})^{\rho(s)-1} \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$

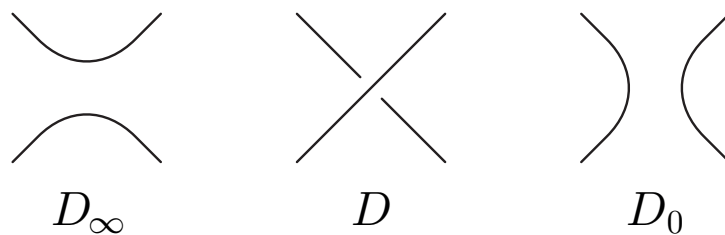
\swarrow parentesi di Kauffman del diagramma D

Note: 1) $S(D)$ ha cardinalità $2^{c(D)}$

2) $|\sigma(s)| \leq c(D)$, $\sigma(s) \equiv_2 c(D)$ e $1 \leq \rho(s) \leq c(D) + n(D)$

Prop. 1) $\langle \hat{D} = D \sqcup S^1 \rangle = (-t^2 - t^{-2}) \langle D \rangle$

2) $\langle D \rangle = t \langle D_0 \rangle + t^{-1} \langle D_\infty \rangle$



Dim. 1) $S(D) \leftrightarrow S(\hat{D})$ corrisp. biunivoca definita $s \leftrightarrow \hat{s} = s \sqcup S^1$

tale che $\sigma(\hat{s}) = \sigma(s)$ e $\rho(\hat{s}) = \rho(s) + 1$

$\Rightarrow \langle \hat{D} \rangle = \sum_{\hat{s} \in S(\hat{D})} t^{\sigma(\hat{s})} (-t^2 - t^{-2})^{\rho(\hat{s})-1}$
 $= \sum_{s \in S(D)} t^{\sigma(s)} (-t^2 - t^{-2})^{\rho(s)} = (-t^2 - t^{-2}) \langle D \rangle$

2) $S(D) = S_0(D) \sqcup S_\infty(D)$ partizione con

$S_0(D) \leftrightarrow S(D_0)$ definita $s \leftrightarrow s_0 = s$ tale che

$\sigma(s) = \sigma(s_0) + 1$ e $\rho(s) = \rho(s_0)$

$S_\infty(D) \leftrightarrow S(D_\infty)$ definita $s \leftrightarrow s_\infty = s$ tale che

$\sigma(s) = \sigma(s_\infty) - 1$ e $\rho(s) = \rho(s_\infty)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle D \rangle &= \sum_{s \in S_0(D) \sqcup S_\infty(D)} t^{\sigma(s)} (-t^2 - t^{-2})^{\rho(s)-1} \\ &= \sum_{s_0 \in S(D_0)} t^{\sigma(s_0)+1} (-t^2 - t^{-2})^{\rho(s_0)-1} \\ &\quad + \sum_{s_\infty \in S(D_\infty)} t^{\sigma(s_\infty)-1} (-t^2 - t^{-2})^{\rho(s_\infty)-1} \\ &= t \langle D_0 \rangle + t^{-1} \langle D_\infty \rangle \end{aligned}$$

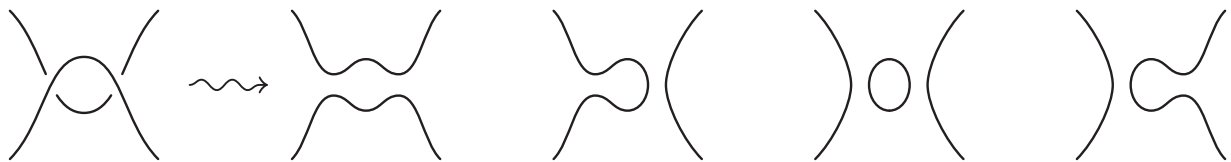
Prop. $\langle D' \rangle = -t^3 \langle D \rangle$ se $D \overset{1}{\rightsquigarrow} D'$ e $\langle D' \rangle = \langle D \rangle$ se $D \overset{2,3}{\rightsquigarrow} D'$

Dim. $D \overset{1}{\rightsquigarrow} D' \Rightarrow D'_\infty \cong D \quad D'_0 \cong \widehat{D}$



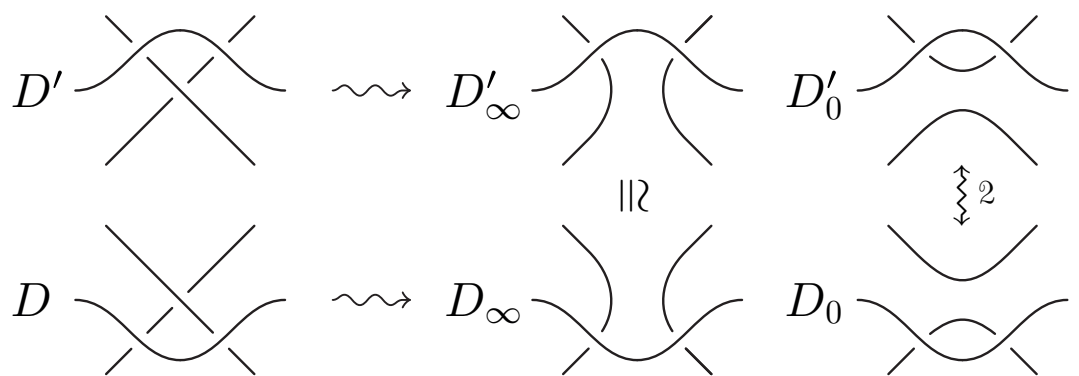
$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle D' \rangle &= t^{-1} \langle D'_\infty \rangle + t \langle D'_0 \rangle = t^{-1} \langle D \rangle + t \langle \widehat{D} \rangle \\ &= t^{-1} \langle D \rangle + t(-t^2 - t^{-2}) \langle D \rangle = -t^3 \langle D \rangle \end{aligned}$$

$D \overset{2}{\rightsquigarrow} D' \Rightarrow D'_{\infty 0} \cong D \quad D'_{\infty \infty} \cong D'' \quad D'_{0\infty} \cong \widehat{D}'' \quad D'_{00} \cong D''$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle D' \rangle &= \langle D'_{\infty 0} \rangle + t^{-2} \langle D'_{\infty \infty} \rangle + \langle D'_{0\infty} \rangle + t^2 \langle D'_{00} \rangle \\ &= \langle D \rangle + t^{-2} \langle D'' \rangle + \langle \widehat{D}'' \rangle + t^{-2} \langle D'' \rangle = \langle D \rangle \end{aligned}$$

$D \overset{3}{\rightsquigarrow} D' \Rightarrow$

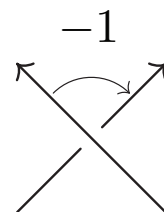
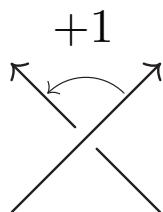


$$\Rightarrow \langle D' \rangle = t^{-1} \langle D'_\infty \rangle + t \langle D'_0 \rangle = t^{-1} \langle D_\infty \rangle + t \langle D_0 \rangle = \langle D \rangle$$

$D \subset R^2$ diagramma orientato

$\rightsquigarrow w(D) \stackrel{\text{def}}{=} \#(\text{incroci con segno di } D)$

\curvearrowright indice di arricciamento del diagramma D



- Note: 1) $w(D) = \ell(D, D')$ con D' diagramma parallelo a D
 2) $w(D') = w(D) + 1$ se $D \overset{1}{\rightsquigarrow} D'$ e $w(D') = w(D)$ se $D \overset{2,3}{\rightsquigarrow} D'$
 (indipendentemente dall'orientazione dei diagrammi)

Prop. D diagramma orientato $\rightsquigarrow P_D(t) \stackrel{\text{def}}{=} (-t)^{-3w(D)} \langle |D| \rangle \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$
 t.c. $D \rightsquigarrow D' \Rightarrow P_{D'}(t) = P_D(t)$

Dim. $D \overset{1}{\rightsquigarrow} D' \Rightarrow P_{D'}(t) = (-t)^{-3w(D')} \langle |D'| \rangle$
 $= (-t)^{-3w(D)-3} (-t)^3 \langle |D| \rangle = P_D(t)$
 $D \overset{2,3}{\rightsquigarrow} D' \Rightarrow \langle D' \rangle = \langle D \rangle$ e $w(D') = w(D) \Rightarrow P_{D'}(t) = P_D(t)$

Polinomio di Kauffman

$K \subset R^3$ nodo orientato

$\rightsquigarrow P_K(t) \stackrel{\text{def}}{=} P_D(t)$ con D diagramma di K

\nwarrow polinomio di Kauffman del nodo orientato K

- Note: 1) $P_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ invariante isotopico del nodo orientato K
 2) K banale $\Leftrightarrow P_K(t) = (-t^2 - t^{-2})^{n(K)-1}$ ($\Rightarrow P_{S^1}(t) = 1$)
 3) $P_{-K}(t) = P_K(t)$ ($w(-D) = w(D)$ e $|-D| = |D|$)
 $\Rightarrow P_K(t)$ non dipende dall'orient. per K connesso
 4) $P_{\bar{K}}(t) = P_K(t^{-1})$ ($w(\bar{D}) = -w(D)$, $\bar{D}_0 = \bar{D}_\infty$, $\bar{D}_\infty = \bar{D}_0$)
 $P_H(t) = -t^{-10} - t^{-2} \Rightarrow H$ (orientato) non simmetrico
 $P_T(t) = -t^{-16} + t^{-12} + t^{-4} \Rightarrow T$ non simmetrico
 $P_E(t) = t^{-8} - t^{-4} + 1 - t^4 + t^8$ (E simmetrico)

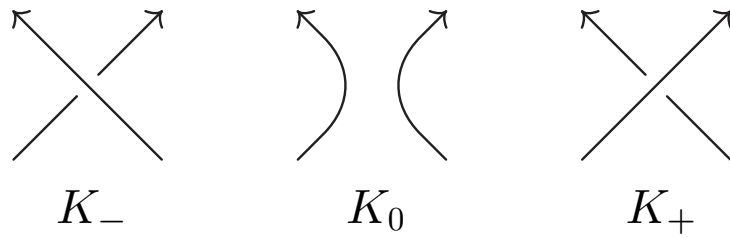
Prop. 1) $P_{K_1 \sqcup K_2}(t) = (-t^2 - t^{-2}) P_{K_1}(t) P_{K_2}(t)$
 2) $P_{K_1 \# K_2}(t) = P_{K_1}(t) P_{K_2}(t)$

Dim. 1) $D_1 \sqcup D_2$ diagr. di $K_1 \sqcup K_2 \Rightarrow w(D_1 \sqcup D_2) = w(D_1) + w(D_2)$
 $S(D_1 \sqcup D_2) \leftrightarrow S(D_1) \times S(D_2)$ corrisp. biunivoca
 definita $s = s_1 \sqcup s_2 \leftrightarrow (s_1, s_2)$ t.c. $\sigma(s) = \sigma(s_1) + \sigma(s_2)$
 $\rho(s) = \rho(s_1) + \rho(s_2)$
 $\Rightarrow \langle D_1 \sqcup D_2 \rangle = (-t^2 - t^{-2}) \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle$
 $\Rightarrow P_{K_1 \sqcup K_2}(t) = (-t^2 - t^{-2}) P_{K_1}(t) P_{K_2}(t)$
 2) come sopra con $\#$ al posto di \sqcup e $\rho(s) = \rho(s_1) + \rho(s_2) - 1$

Prop. $P_K(t)$ è univocamente determinato da $P_{S^1}(t) = 1$

$$\text{e } t^4 P_{K_+}(t) - t^{-4} P_{K_-}(t) = (t^{-2} - t^2) P_{K_0}(t)$$

↙ equazione caratteristica del polinomio di Kauffman



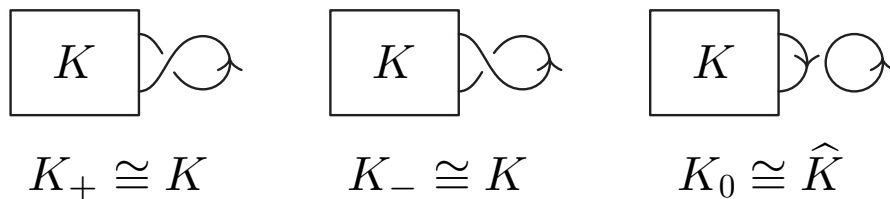
Dim. $\langle |D_{\pm}| \rangle = t \langle |D_{\pm}|_0 \rangle + t^{-1} \langle |D_{\pm}|_{\infty} \rangle$

$$\Rightarrow t^{\pm 1} \langle |D_{\pm}| \rangle = t^{\pm 1+1} \langle |D_{\pm}|_0 \rangle + t^{\pm 1-1} \langle |D_{\pm}|_{\infty} \rangle$$

$$\Rightarrow t \langle |D_+| \rangle - t^{-1} \langle |D_-| \rangle = (t^2 - t^{-2}) \langle |D_0| \rangle$$

$$\Rightarrow \text{equaz. caratteristica } (w(D_{\pm}) = w(D_0) \pm 1)$$

$$\text{equaz. caratteristica } \Rightarrow P_{\hat{K}}(t) = (-t^2 - t^{-2}) P_K(t)$$



$$P_{S^1}(t) = 1 \Rightarrow P_K(t) = (-t^2 - t^{-2})^{n(K)-1} \quad \forall K \text{ banale}$$

$$\rightsquigarrow P_K(t) = P_D(t) \quad (\text{doppia induzione su } c(D) \text{ e } u(D))$$

Note: 1) doppia induzione su $c(D)$ e $u(D) \rightsquigarrow$ algoritmo per colcolare $P_K(t)$ più efficiente rispetto alla definizione

2) $P_K(t)$ contiene solo termini di grado $\equiv_4 2(n(K) - 1)$
(equaz. caratteristica e $n(K_+) = n(K_-) = n(K_0) \pm 1$)

$K \subset R^3$ nodo orientato

$$\rightsquigarrow V_K(x) \stackrel{\text{def}}{=} P_K(x^{-1/4}) \in \begin{cases} \mathbb{Z}[x^{\pm 1}] & \text{se } n(K) \text{ dispari (es. connesso)} \\ \mathbb{Z}[x^{\pm 1/2}] & \text{se } n(K) \text{ pari} \end{cases}$$

↙ polinomio di Jones del nodo orientato K

Note: 1) $V_K(x)$ invariante isotopico del nodo orientato K

2) K banale $\Leftrightarrow V_K(x) = (-x^{1/2} - x^{-1/2})^{n(K)-1}$

3) $V_{-K}(x) = V_K(x)$ (indip. dall'orient. per K connesso)

4) $V_{\bar{K}}(x) = V_K(x^{-1})$ (K simmetrico $\Rightarrow V_K(x)$ simmetrico)

5) $V_{K_1 \sqcup K_2}(x) = (-x^{1/2} - x^{-1/2}) V_{K_1}(x) V_{K_2}(x)$

$$6) V_{K_1 \# K_2}(x) = V_{K_1}(x)V_{K_2}(x)$$

$$7) V_K(x) \text{ è univocamente determinato da } V_{S^1}(x) = 1$$

$$\text{e } x^{-1}V_{K_+}(x) - xV_{K_-}(x) = (x^{1/2} - x^{-1/2})V_{K_0}(x)$$

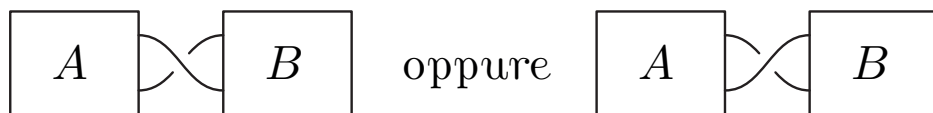
↙ equazione caratteristica del polinomio di Jones

Nodi alternanti

$D \subset R^2$ diagramma

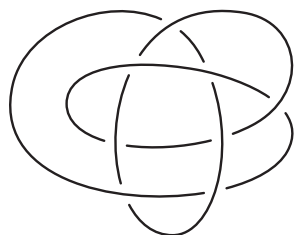
alternante $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ sottopassaggi e soprapassaggi si alternano lungo D
(non ce ne sono due uguali consecutivi lungo D)

ridotto $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ D non ha incroci separanti, cioè non ha la forma



$K \subset R^3$ nodo alternante $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ ammette un diagramma alternante

Note: 1) K nodo primo con $c(K) \leq 7 \Rightarrow K$ alternante



8_{20} nodo non alternante

2) K alternante $\Rightarrow \exists D$ diagramma alternante ridotto di K

Congettura di Tait (1898): D è minimale ($c(D) = c(K)$)

Lemma. $D \subset R^2$ diagramma connesso

$s_{\pm} \in S(D)$ unico stato tale che $\sigma(s_{\pm}) = \pm c(D)$

$\Rightarrow \rho(s_+) + \rho(s_-) \leq c(D) + 2$

inoltre: vale = se D è alternante

vale < se D è primo non alternante

Dim. $c(D) = 0 \Rightarrow D$ banale $\Rightarrow s_{\pm}$ banali $\Rightarrow \rho(s_+) = \rho(s_-) = 1$

$c(D) > 0 \rightsquigarrow D_0, D_{\infty}$ (rispetto a un incrocio fissato)

$D' = D_0$ o D_{∞} connesso con $c(D') = c(D) - 1$

$\Rightarrow \rho(s'_+) = \rho(s_+), \rho(s'_-) = \rho(s_-) \pm 1$ se $D' = D_0$

$\rho(s'_+) = \rho(s_+) \pm 1, \rho(s'_-) = \rho(s_-)$ se $D' = D_{\infty}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho(s_+) + \rho(s_-) &\leq \rho(s'_+) + \rho(s'_-) + 1 \\ &\leq c(D') + 3 = c(D) + 2 \text{ (induz.)} \end{aligned}$$

D alternante $\Rightarrow s_{\pm} \leftrightarrow$ regioni bianche/nere di una colorazione a scacchiera di D

$$\Rightarrow \rho(s_+) + \rho(s_-) - 2c(D) + c(D) = \chi(S^2) = 2$$

D primo non alternante $\Rightarrow c(D) \geq 2$

$$c(D) = 2 \Rightarrow D = \left(\bigcirc \bigcirc \right) \Rightarrow \rho(s_+) = \rho(s_-) = 1 \text{ } (\rightsquigarrow 2 < 4)$$

$c(D) > 2 \Rightarrow \exists D' = D_0$ o D_{∞} primo non alternante
 \Rightarrow vale $<$ per induzione come sopra

Lemma. $D \subset R^2$ diagramma connesso

$s_{\pm} \in S(D)$ unico stato tale che $\sigma(s_{\pm}) = \pm c(D)$

$$\Rightarrow 1) \max \text{esp}(\langle D \rangle) \leq c(D) + 2\rho(s_+) - 2$$

$$2) \min \text{esp}(\langle D \rangle) \geq -c(D) - 2\rho(s_-) + 2$$

inoltre valgono = se D è alternante ridotto

Dim. $s \in S(D) \rightsquigarrow s = s_1, s_2, \dots, s_k = s_+, s = s'_1, s'_2, \dots, s'_h = s_-$

$$\text{t.c. } \sigma(s_i) = \sigma(s_{i+1}) - 2, \rho(s_i) = \rho(s_{i+1}) \pm 1$$

$$\sigma(s'_i) = \sigma(s'_{i+1}) + 2, \rho(s'_i) = \rho(s'_{i+1}) \pm 1$$

$$\Rightarrow \sigma(s_i) + 2\rho(s_i) - 2 \leq \sigma(s_{i+1}) + 2\rho(s_{i+1}) - 2$$

$$\sigma(s'_i) - 2\rho(s'_i) + 2 \geq \sigma(s'_{i+1}) - 2\rho(s'_{i+1}) + 2$$

$$\Rightarrow \sigma(s) + 2\rho(s) - 2 \leq c(D) + 2\rho(s_+) - 2$$

$$\sigma(s) - 2\rho(s) + 2 \geq -c(D) - 2\rho(s_-) + 2$$

$$\Rightarrow \max \text{esp}(\langle D \rangle) \leq c(D) + 2\rho(s_+) - 2$$

$$\min \text{esp}(\langle D \rangle) \geq -c(D) - 2\rho(s_-) + 2$$

D alternante ridotto

$$\Rightarrow \rho(s_{k-1}) = \rho(s_+) - 1, \rho(s'_{h-1}) = \rho(s_-) - 1$$

$$\Rightarrow \sigma(s_{k-1}) + 2\rho(s_{k-1}) - 2 < c(D) + 2\rho(s_+) - 2$$

$$\sigma(s'_{h-1}) - 2\rho(s'_{h-1}) + 2 > -c(D) - 2\rho(s_-) + 2$$

\Rightarrow i termini con esp. max/min di $\langle D \rangle$ vengono solo da s_{\pm}

$$\Rightarrow \max \text{esp}(\langle D \rangle) = c(D) + 2\rho(s_+) - 2$$

$$\min \text{esp}(\langle D \rangle) = -c(D) - 2\rho(s_-) + 2$$

Teorema. $K \subset R^3$ nodo connesso, $D \subset R^2$ diagramma di K
 $A(V_K(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \max \text{esp}(V_K(x)) - \min \text{esp}(V_K(x)) \leq c(D)$
 inoltre: vale = se D è alternante ridotto
 vale < se D è primo non alternante

Dim. $A(V_K(x)) = A(P_K(t))/4 = A(\langle D \rangle)/4$
 $\Rightarrow A(V_K(x)) = (\max \text{esp}(\langle D \rangle) - \min \text{esp}(\langle D \rangle))/4$
 $\leq c(D)/2 + (\rho(s_+) + \rho(s_-))/2 - 1 \leq c(D)$
 D alternante ridotto \Rightarrow valgono entrambe le uguaglianze
 D primo non alternante \Rightarrow seconda disuguaglianza stretta

Corol. $K \subset R^3$ nodo primo alternante, $D \subset R^2$ diagramma di K
 D minimale ($c(D) = c(K)$) $\Leftrightarrow D$ alternante ridotto

Dim. D alternante ridotto $\Rightarrow c(D) = A(V_K(x)) = c(K)$
 D alternante non ridotto $\rightsquigarrow D'$ diagramma alternante
 ridotto ottenuto riducendo D
 $\Rightarrow c(D) > c(D') = c(K)$
 D non alternante \Rightarrow come sopra con D' alternante ridotto
 (K primo \Rightarrow si può assumere D primo)

Nota: i nodi primi sono riconoscibili dai diagrammi alternanti:
 se D è un diagr. alternante ridotto di K nodo connesso,
 allora K è primo $\Leftrightarrow D$ è primo (come diagramma)