Gruppi di trecce

$B = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \subset R^2 \times [0,1]$ treccia con n stringhe (n-treccia)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A_i arco ascendente (cioè $A_i \cap R^2_t =$ un punto $\forall\, t \in [0,1]$)
da $(i,0,0)$ a $(\pi_B(i),0,1)$ per ogni $i = 1,\ldots,n$, con $\pi_B \in \Sigma_n$

Note: 1) $B \leftrightarrow \gamma_B = \gamma_1 \times \ldots \times \gamma_n : [0,1] \to R^{2n} - \Delta$ cammino
t.c. $\{\gamma_i(0)\}_{i=1,\ldots,n} = \{\gamma_i(1)\}_{i=1,\ldots,n} = \{(i,0)\}_{i=1,\ldots,n}$
dove $\Delta = \{(p_1,\ldots,p_n) \in R^{2n} \mid \exists\, i \neq j \text{ t.c. } p_i = p_j\}$
$\alpha_i(s) = (\gamma_i(s), s) = (x_i(s), y_i(s), s) = A_i \cap R^2_s$
$\Rightarrow \alpha_i : [0,1] \to R^3$ parametriz. continua di A_i

2) $B \leftrightarrow \omega_B = \pi \circ \gamma_B : [0,1] \to (\Gamma_n R^2, *)$ cappio
dove $\Gamma_n R^2 \overset{\text{def}}{=\!=} (R^{2n} - \Delta)/\Sigma_n$ e $* = \{(i,0)\}_{i=1,\ldots,n}$
spazio delle n-configurazioni di R^2
$\pi : R^{2n} - \Delta \to (R^{2n} - \Delta)/\Sigma_n$ proiez. canonica
rivestimento regolare di grado $|\Sigma_n| = n!$
($\Rightarrow \Gamma_n R^2$ $2n$-varietà differenziabile)

3) $\Gamma_n R^2$ è omeomorfo a un aperto di R^{2n}
($\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definita $(z_1,\ldots,z_n) \mapsto (a_1,\ldots,a_n)$
con $\Pi_i(z - z_i) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$
$\rightsquigarrow \psi/_\sim : \mathbb{C}^n/\Sigma_n \cong \mathbb{C}^n$ $(\sim_\psi \Leftrightarrow \sim_{\Sigma_n})$
$\rightsquigarrow \Gamma_n R^2 \cong (\mathbb{C}^n - \Delta)/\Sigma_n \cong \mathbb{C}^n - \psi(\Delta)$ aperto in $\mathbb{C}^n$)

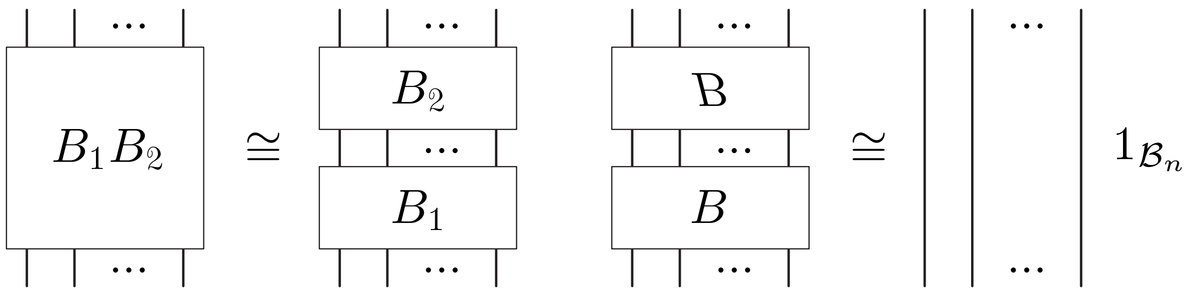
$B, B' \subset R^2 \times [0,1]$ trecce equivalenti ($B \cong B'$)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, (B_t)_{t\in[0,1]}$ famiglia continua di trecce t.c. $B_0 = B$ e $B_1 = B'$
($\exists\, J : B \times [0,1] \to R^2 \times [0,1]$ cont. t.c. $j_t(B \cap R^2_s) = B_t \cap R^2_s\ \forall\, t$)
deformazione della treccia B (nella treccia B')

Prop. $B \cong B' \Leftrightarrow \gamma_B \simeq_{\{0,1\}} \gamma_{B'} \Leftrightarrow \omega_B \simeq_{\{0,1\}} \omega_{B'}$ (relaz. di equiv.)

Dim. primo $\Leftrightarrow$ segue dalla definizione
secondo $\Leftrightarrow$ segue da π rivestimento

$\mathcal{B}_n \overset{\text{def}}{=\!=} \{n\text{-trecce}\}/_{\cong} \leftrightarrow \Omega(\Gamma_n R^2)/_{\simeq_{\{0,1\}}} = \pi_1(\Gamma_n R^2)$
gruppo delle n-trecce (con l'operazione che rende $\leftrightarrow$ iso)

<u>Note</u>: 1) $B_1 B_2 = (1,1,1/2)(B_1 \cup (B_2 + (0,0,1)))\ \forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}_n$
2) $1_{\mathcal{B}_n} = \{(i,0)\}_{i=1,\ldots,n} \times [0,1]$ (<u>treccia banale</u>)
3) $B \rightsquigarrow B^{-1} = (1,1,-1)B + (0,0,1)$ <u>treccia inversa</u>
4) $\varphi_n : \mathcal{B}_n \to \Sigma_n$ epimorfismi definiti $B \mapsto \pi_B$
$\mathcal{P}_n \overset{\text{def}}{=\!=} \ker \varphi_n \subset \mathcal{B}_n$ <u>gruppo delle n-trecce pure</u>



<u>Note</u>: 1) $\mathcal{B}_1 \cong 0\ \ (\Gamma_1 R^2 \cong R^2)$
2) $\mathcal{B}_2 \cong \mathbb{Z}\ \ (\Gamma_2 R^2 \cong R^2 \times (R^2 - \{0\})/\mathbb{Z}_2 \cong R^3 \times S^1)$
3) $\mathcal{B}_n$ gruppo non commutativo per $n \geq 3$
(φ_n epimorfismo su Σ_n non commutativo)

<u>Prop</u>. trecce e deformazioni di trecce sono docili
(cioè si estendono a intorni tubolari)

<u>Dim</u>. $\alpha_i : [0,1] \to R^2 \times [0,1]$ param. cont. di $A_i \subset B$
$\rightsquigarrow \widetilde{\alpha}_i : [0,1] \times B^2 \to T_i \subset R^3$ definita $\widetilde{\alpha}_i(s,x) = \alpha_i(s) + \varepsilon\, x$
tale che $T = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ intorno tubolare di B
$J : B \times [0,1] \to R^2 \times [0,1]$ deformazione di B
$\rightsquigarrow \widetilde{J} : T \times [0,1] \to R^2 \times [0,1]$ deformazione di T
definita $\widetilde{J}_t(\widetilde{\alpha}_i(s,x),t) = J(\alpha_i(s),t) + \varepsilon\, x$

<u>Prop</u>. $B \cong B' \Leftrightarrow B$ e B' trecce <u>isotope</u>
$(\exists\, H : \mathrm{id}_{R^2 \times [0,1]} \cong_{R^2 \times \{0,1\}} h$ isotopia
t.c. $h_t(R^2_s) = R^2_s\ \forall\, t, s \in [0,1]$ e $h(B) = B')$

<u>Dim</u>. $J : B \rightsquigarrow B'$ deform. di B in B'
$\rightsquigarrow 0 = t_1 < \ldots < t_k = 1$ t.c. $\widetilde{J}(B \times [t_i, t_{i+1}]) \subset T(B_{t_i})$
$\rightsquigarrow H_i : R^2 \times [0,1] \times [t_i, t_{i+1}]$ estensione di $J_{|B \times [t_i, t_{i+1}]}$
$\rightsquigarrow H =$ concatenazione di $H_1, \ldots, H_k$

<u>Prop</u>. 1) B treccia $\Rightarrow B \cong_\varepsilon B'$ con B' treccia liscia/poligonale
<u>ε-deformazione</u> $\leftrightsquigarrow$ <u>ε-isotopia</u>

2) B, B' trecce lisce/poligonali
$B \cong B' \Leftrightarrow \exists\, (B_t)_{t\in[0,1]}$ <u>deform. liscia/poligonale</u> di B in B'
(cioè B_t trecca liscia/poligonale $\forall\, t \in [0,1]$)

<u>Dim</u>. caso liscio: approssimazione diff. di γ_B e $\gamma_B \simeq_{0,1} \gamma_{B'}$
caso polig.: segue dal caso liscio (appr. poligonali iscritte)

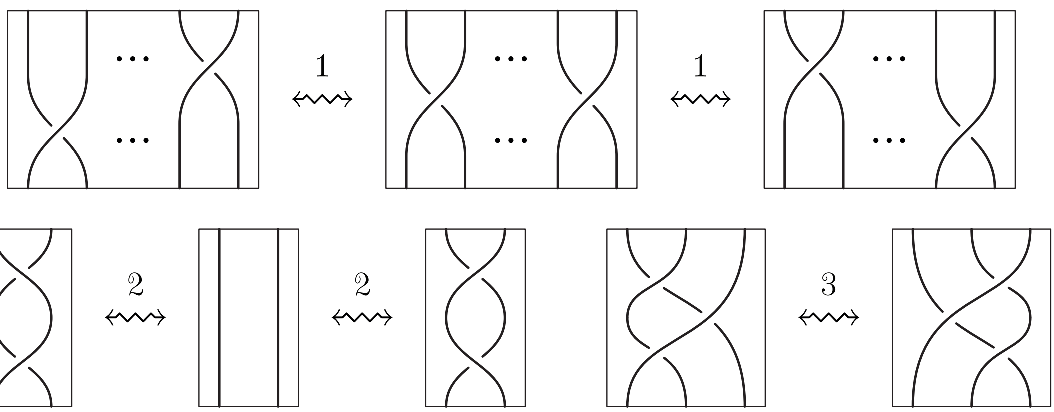
$B \subset R^2 \times [0,1]$ treccia liscia <u>verticalmente ammissibile</u>
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_| : B \to R \times [0,1]$ regolare ($\Leftrightarrow$ no tang. vert.) e iniettiva eccetto un numero finito di punti doppi trasversali ($\Leftrightarrow$ tang. distinte)
$\rightsquigarrow D \overset{\text{def}}{=\!=} \pi(B)$ + sotto/sopra passaggi nei punti doppi (<u>incroci</u>)
<u>diagramma liscio</u> di B

$B \subset R^2 \times [0,1]$ treccia poligonale <u>verticalmente ammissibile</u>
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_| : B \to R \times [0,1]$ iniettiva eccetto un numero finito di punti doppi trasv. ($\Leftrightarrow$ no spigoli vert., pt. doppi interni a spigoli)
$\rightsquigarrow D \overset{\text{def}}{=\!=} \pi(B)$ + sotto/sopra passaggi nei punti doppi (<u>incroci</u>)
<u>diagramma poligonale</u> di B

<u>Nota</u>: $D \subset R \times [0,1]$ determina B a meno di isotopia verticale
(B e B' trecce verticalmente ammissibili con $D = D' \Rightarrow$
$(B_t = (1-t)B + tB')_{t\in[0,1]}$ def. docile vert. $\rightsquigarrow$ isotopia vert.)

<u>Prop</u>. ogni treccia è rappresentata da un diagramma liscio/polig.

<u>Dim</u>. analoga a quella per i nodi docili



$D, D' \subset R \times [0,1]$ diagrammi di $B, B' \subset R^2 \times [0,1]$ trecce lisce/polig.
$D \leftrightsquigarrow D' \overset{\text{def}}{\iff}$ D e D' equiv. a meno di $\cong$ (isotopia di $R \times [0,1]$ che mantiene la direz. orizzontale, quindi la struttura del diagr.) e dei <u>movimenti</u> nella figura sopra

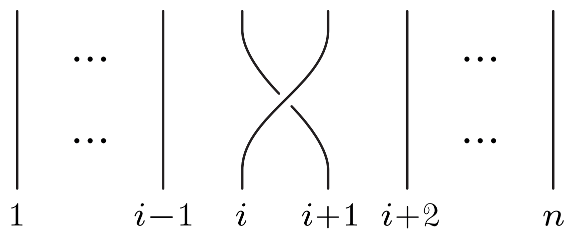
<u>Note</u>: 1) $D \leftrightsquigarrow D' \Rightarrow B \cong B'$ ($\cong$ e movim. $\rightsquigarrow$ isotopie di trecce)
2) il movimento simmetrico $2'$ coincide con 2, movimenti $1, 3 \overset{2,2'}{\rightsquigarrow}$ varianti con certi incroci invertiti, in particolare si hanno i movimenti simmetrici $1', 3'$

<u>Teorema</u>. $B, B' \subset R^2 \times [0,1]$ trecce con diagr. $D, D' \subset R \times [0,1]$
$\Rightarrow D \leftrightsquigarrow D'$ se e solo se $B \cong B'$

<u>Dim</u>. analoga a quella per isotopia di nodi e mov. di Reidemeister

<u>Note</u>: 1) $\{\text{trecce}\}/\cong\ \leftrightsquigarrow\ \{\text{diagr. di trecce}\}/\cong$ e movimenti
2) diagrammi e movimenti lisci $\leftrightsquigarrow$ polig. (a meno di $\cong_\varepsilon$)

<u>Corol</u>. $\mathcal{B}_n \cong \langle b_1, \dots, b_{n-1} \mid b_i b_j = b_j b_i\ \forall\, 1 \le i < i+1 < j \le n-1$
$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}\ \forall\, 1 \le i \le n-2 \rangle$

$b_i =$ 

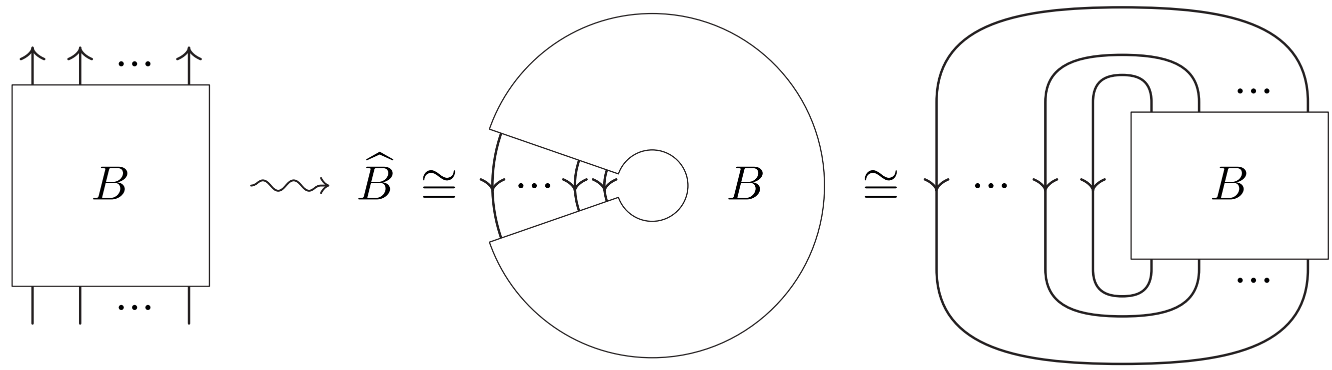
<u>Dim</u>. B treccia $\rightsquigarrow D$ diagamma con incroci a quote distinte
$\rightsquigarrow B = b_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots b_{i_k}^{\varepsilon_k}$ (un termine b_{i_j} con $\varepsilon_{i_j} = \pm 1$ per ogni incrocio pos./neg.)
relazioni $\leftrightsquigarrow$ movimenti 1 e 3 (mov. 2 $\leftrightsquigarrow$ rel. banali $b_i b_i^{-1}$)

<u>Note</u>: 1) $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$ indotta da $\{b_1, \dots, b_{n-1}\} \subset \{b_1, \dots, b_n\}$
2) $\varphi_n(b_i) = s_i = (i\ i{+}1) \Rightarrow \varphi_{n+1}$ estensione di φ_n
($\Sigma_n \cong \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid s_i^2\ \forall\, 1 \le i \le n-1$
$s_i s_j = s_j s_i\ \forall\, 1 \le i < i+1 < j \le n-1$
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}\ \forall\, 1 \le i \le n-2 \rangle$)

3) $e_n : \mathcal{B}_n \to \mathbb{Z}$ epimorfismi def. $e_n(b_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots b_{i_k}^{\varepsilon_k}) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$
(relazioni bilanciate $\Rightarrow$ ben definiti)

Trecce e nodi

$B \subset R^2 \times [0,1]$ treccia
$\rightsquigarrow \widehat{B} \overset{\text{def}}{=\!=} \eta(B') \subset R^3$ nodo (docile) orientato
chiusura di B (treccia chiusa associata a B)
con $B' \cong B$ tale che $B' \subset\,]0,+\infty[\, \times R \times [0,1]$
$\eta : \,]0,+\infty[\, \times R \times [0,1] \to R^2 - \{0\} \times R \subset R^3$
definita $\eta(x,y,z) = (x\cos(2z-1)\pi, x\sin(2z-1)\pi, y)$



Note: 1) $\widehat{B}$ ben definito a meno di $\cong$ di nodi orientati
(non dipende da B': $B' \cong B \cong B'' \Rightarrow \eta(B') \cong \eta(B'')$)
2) $B_1 \cong B_2 \Rightarrow \widehat{B}_1 \cong \widehat{B}_2$ come nodi orientati
(def. di trecce $B_1 \rightsquigarrow B_2 \rightsquigarrow$ def. di nodi $\widehat{B}_1 \rightsquigarrow \widehat{B}_2$)
3) $\widehat{B} \cong K \Rightarrow n(K) =$ numero cicli disgiunti di π_B
4) $B \in \mathcal{B}_n$ treccia banale $\Leftrightarrow \widehat{B} \cong n$-nodo banale
5) $\widehat{B} \cong K$, $B' = B^{-1} \Rightarrow \widehat{B}' \cong -\overline{K}$ $(B' = \sigma(B) \rightsquigarrow \widehat{B} = -\sigma(\widehat{B}'))$

Esempi: 1) $B = b_1^{\pm 1} \in \mathcal{B}_2 \rightsquigarrow \widehat{B} \cong$ 1-nodo banale
2) $B = b_1^{\pm 2} \in \mathcal{B}_2 \rightsquigarrow \widehat{B} \cong H, \overline{H}$
3) $B = b_1^{\pm 3} \in \mathcal{B}_2 \rightsquigarrow \widehat{B} \cong T, \overline{T}$
4) $B = (b_1 b_2 b_1 b_2)^{\pm 1} \in \mathcal{B}_3 \rightsquigarrow \widehat{B} \cong T, \overline{T}$
5) $B = (b_1 b_2^{-1} b_1 b_2^{-1})^{\pm 1} \in \mathcal{B}_3 \rightsquigarrow \widehat{B} \cong E$

Teorema di Alexander (1923)
$K \subset R^3$ nodo orientato $\Rightarrow \exists\, B \subset R^2 \times [0,1]$ treccia t.c. $\widehat{B} \cong K$

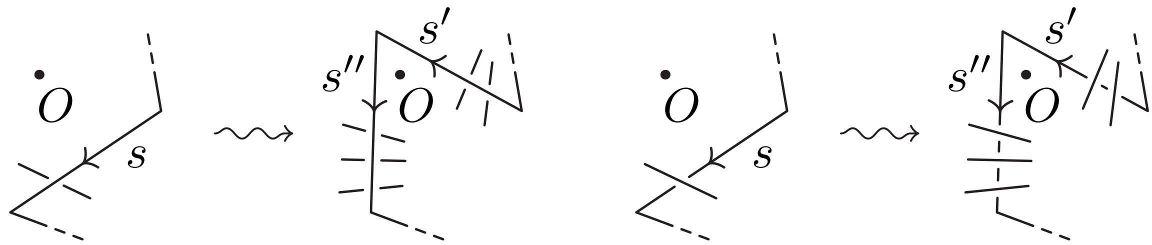
<u>Dim</u>. D diagramma poligonale di K

$O \notin D \rightsquigarrow$ spigoli positivi/negativi (rispetto a O)

suddivisione $\rightsquigarrow$ spigolo negativo con al più un incrocio

s spigolo neg. $\rightsquigarrow s' \cup s''$ spigoli pos. sopra/sotto tutto

a seconda che s passi sopra/sotto



$K \subset R^3$ nodo orientato $\rightsquigarrow s(K) \overset{\text{def}}{=\!=} \min\{n \mid K \cong \widehat{B} \text{ con } B \in \mathcal{B}_n\}$

<u>numero (minimo) di stringhe</u> di K

<u>Note</u>: 1) $s(K)$ invariante isotopico per definizione

2) $s(K) \geq n(K)$ e $s(K) = n(K) \not\Leftarrow\Rightarrow$ componenti banali

3) $s(-K) = s(K)$ $(K \cong \widehat{B} \Rightarrow -K \cong \widehat{B}'$ con $B' = \rho_\pi(B))$

4) $s(\overline{K}) = s(K)$ (segue da nota 5 sopra)

5) $s(K_1 \sqcup K_2) = s(K_1) + s(K_2)$

$(K_i \cong \widehat{B}_i \Rightarrow K_1 \sqcup K_2 \cong \widehat{B}$ con $B = B_1 \sqcup B_2$ affiancate)

6) $s(K_1 \# K_2) \leq s(K_1) + s(K_2)$

$(K_i \cong \widehat{B}_i \Rightarrow K_1 \# K_2 \cong \widehat{B}$ con $B = B_1 \# B_2$ affiancate)

7) $s(K)$ non è effettivamente calcolabile

<u>Prop</u>. $K \subset R^3$ nodo orientato

$\Rightarrow s(K) =$ minimo numero $s(D)$ di curve di Seifert

$C_1, \ldots, C_{s(D)}$ per un diagramma D di K

<u>Dim</u>. D diagramma di K con $s(D)$ minimo

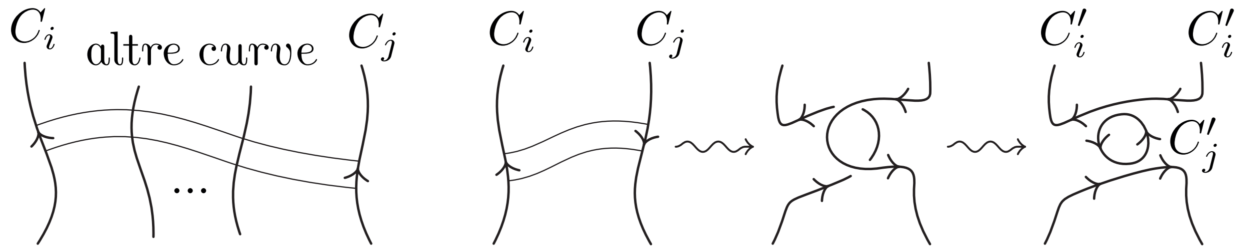
$\sim$ relazione binaria (non equiv.) di coorientazione

sull'insieme $\{C_1, \ldots, C_{s(D)}\}$ delle curve di Seifert

D con minimo numero ℓ di coppie $C_i \not\sim C_j \Rightarrow \ell = 0$

$(\exists\, C_i \not\sim C_j \Rightarrow C_i$ e C_j si possono supporre adiacenti

$\Rightarrow D \overset{2}{\rightsquigarrow} D'$ tale che $C_i, C_j \rightsquigarrow C_i' \sim C_j')$



$C_i \sim C_j$ $\qquad$ $C_i \not\sim C_j$ adiacenti $\rightsquigarrow$ $C'_i \sim C'_j$

$C_i \sim C_j \ \forall\, i,j \Rightarrow D \rightsquigarrow D'$ diagramma di $s(D)$-treccia chiusa
a meno di ribaltamento di alcuni archi
($\exists$ rinum. t.c. C_i e C_{i+1} adiacenti $\forall\, i \leq k-1$)

$\Rightarrow s(K) \leq s(D)$ minimo

$B \in \mathcal{B}_{s(K)}$ tale che $K \cong \widehat{B}$

$\rightsquigarrow D$ diagramma di K con $s(K)$ curve di Seifert

$\Rightarrow s(K) \geq s(D)$ minimo

Corol. $s(K) \leq n(K) + c(K)$

Dim. D diagramma di K nodo orientato con $c(D) = c(K)$
risoluz. incrocio di $D \rightsquigarrow$ increm. numero componenti $= \pm 1$
$\Rightarrow$ numero curve di Seifert per $D \leq n(K) + c(K)$

Teorema di Markov (1935)

$B \in \mathcal{B}_n$, $B' \in \mathcal{B}_m$ trecce t.c. $\widehat{B} \cong K$, $\widehat{B}' \cong K'$

$K \cong K' \Leftrightarrow B \leftrightsquigarrow B'$ relaz. di equiv. generata da

1) $B_1 \in \mathcal{B}_\ell \rightsquigarrow B_2 = B_1 b_\ell^{\pm 1} \in \mathcal{B}_{\ell+1}$ (stabilizzazione)

2) $B_1 B_2 \rightsquigarrow B_2 B_1$ con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\ell$ ($\leftrightsquigarrow$ coniugio in $\mathcal{B}_\ell$)

Dim. $\Leftarrow$) $B_2 = B_1 b_n \Rightarrow \widehat{B}_2 \overset{1}{\leftrightsquigarrow} \widehat{B}_1 \ \forall\, B_1 \in \mathcal{B}_\ell$ (a meno di ribaltam.)
$\widehat{B_2 B_1} \cong \widehat{B_1 B_2} \ \forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\ell$

$\Rightarrow$) D, D' diagrammi poligonali di K, K'
$K \cong K' \rightsquigarrow D = D_1 \leftrightsquigarrow D_2 \leftrightsquigarrow \ldots \leftrightsquigarrow D_k = D'$
sequenza di movimenti di Reidemeister
$\rightsquigarrow D = D'_1 \leftrightsquigarrow D'_2 \leftrightsquigarrow \ldots \leftrightsquigarrow D'_{k'} = D'$
con $D'_1, \ldots, D'_{k'}$ diagrammi di trecce chiuse
$\Rightarrow B \leftrightsquigarrow B'$ (mov. di Reidem. tra trecce chiuse
$\rightsquigarrow$ relazioni + stabiliz. + coniugio)

<u>Note</u>: 1) idea: $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_n \subset \ldots \subset \mathcal{B}_\infty \stackrel{\text{def}}{=\!=} \cup_{n\geq 1}\mathcal{B}_n$

$\rightsquigarrow$ invarianti di nodi effettivamente calcolabili

2) stabilizzazione $\rightsquigarrow \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_{n+1}$ non omomorfismo

3) $B_1 B_2 \leftrightsquigarrow B_2 B_1 \leftrightsquigarrow$ coniugio in $\mathcal{B}_n$ ma non commutatività

($\leftrightsquigarrow$ relazione non compositiva)

4) $\mathrm{Ab}(\mathcal{B}_n) \cong \mathbb{Z}$ ($\mathrm{Ab}(b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}) \rightsquigarrow b_i \sim b_{i+1}$)

$\psi : \mathcal{B}_n \to A$ omom. con A comm. $\Rightarrow \psi = a\, e_n$ con $a \in A$

5) $\varphi_n : \mathcal{B}_n \to \Sigma_n$ non tiene conto del segno degli incroci

6) $\beta_{n,q} : \mathcal{B}_n \to \mathrm{GL}(K, n)$ <u>rappresentazione di Burau</u>

alterazione di $\varphi_n \leftrightsquigarrow \beta_{n,1}$ con $q \in K - \{0\}$ definita

$\beta_{n,q}(b_i) = I_{i-1} \oplus M_q \oplus I_{n-i-1}$ dove $M_q = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

t.c. $M_q^2 + (q-1)M_q - q = 0$ (teor. di Cayley-Hamilton)

<u>Algebre di Hecke</u>

K campo, $q \in K - \{0\}$

$\rightsquigarrow F_K(t_1, ..., t_n) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\Sigma_{i\leq m} a_i w_i \,|\, a_i \in K, w_i \in W(t_1, \ldots, t_n), m \geq 1\}$

$\hookrightarrow$ <u>K-algebra libera non commutativa</u> generata da $t_1, \ldots, t_n$

$\rightsquigarrow I_{n,q} \stackrel{\text{def}}{=\!=}$ ideale bilatero di $F_K(t_1, \ldots, t_{n-1})$

generato da: $t_i^2 + (q-1)t_i - q \;\forall\, 1 \leq i \leq n-1$

$t_i t_j - t_j t_i \;\forall\, 1 \leq i < i+1 < j \leq n-1$

$t_i t_{i+1} t_i - t_{i+1} t_i t_{i+1} \;\forall\, 1 \leq i \leq n-2$

$\rightsquigarrow H_{n,q} \stackrel{\text{def}}{=\!=} F_K(t_1, ..., t_{n-1})/I_{n,q}$

$\hookrightarrow$ <u>K-algebra di Hecke</u> di ordine $n \geq 1$

<u>Note</u>: 1) $H_{1,q} \cong K$, $H_{2,q} \cong K[t]/(t^2 + (q-1)t - q)$

2) $H_{n,q} \subset H_{n+1,q}$ (indotta da $\{t_1, \ldots, t_{n-1}\} \subset \{t_1, \ldots, t_n\}$)

3) t_i invertibile con $t_i^{-1} = q^{-1}t_i - q^{-1} + 1$ (prime relazioni)

<u>Prop</u>. $\eta_{n,q} : H_{n,q} \oplus (H_{n,q} \otimes_{H_{n-1,q}} H_{n,q}) \to H_{n+1,q}$ applicazione definita $\eta_{n,q}(a, \Sigma_i\, b_i \otimes c_i) = a + \Sigma_i\, b_i t_n c_i \;\forall\, a, b_i, c_i \in H_{n,q}$ è un isomorfismo di $H_{n,q}$-moduli bilateri per ogni $n \geq 1$

$\dim_K H_{n,q} \oplus (H_{n,q} \otimes_{H_{n-1,q}} H_{n,q}) = \dim_K H_{n+1,q} = (n+1)!$

<u>Dim</u>. induz. su $n \geq 1$ ($H_{1,q} \cong K$ e $H_{2,q} \cong K_1[t] = \{a + b\,t \,|\, a, b \in K\}$)

$\eta_{n,q}$ applicazione ben definita

($\eta_{n,q}$ bilineare su $b \otimes c$ con $b, c \in H_{n,q}$

$\eta_{n,q}(b\,h \otimes c) = \eta_{n,q}(b \otimes h\,c)\ \forall\, b, c \in H_{n,q}\ \forall\, h \in H_{n-1,q}$)

$\eta_{n,q}$ omomorfismo di $H_{n,q}$-bimoduli

($\eta_{n,q}$ K-lineare e $H_{n,q}$-lineare sul fattore $H_{n,q}$

$$\left.\begin{array}{l} \eta_{n,q}(h(b \otimes c)) = h\,\eta_{n,q}(b \otimes c) \\ \eta_{n,q}((b \otimes c)h) = \eta_{n,q}(b \otimes c)h \end{array}\right\} \forall\, b, c \in H_{n,q}\ \forall\, h \in H_{n,q})$$

$\eta_{n,q}$ applicazione suriettiva

($w \in W(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow w \sim \Sigma_i a_i w_i$ con al più un t_n in ogni w_i

infatti: $t_n h t_n \sim h t_n^2 \sim (1-q) h t_n + q h\ \forall\, h \in H_{n-1,q}$

$t_n h' t_{n-1} h'' t_n \sim h' t_{n-1} t_n t_{n-1} h''\ \forall\, h', h'' \in H_{n-1,q}$

$\Rightarrow t_n h t_n \sim \Sigma_i a_i w_i$ come sopra $\forall\, h \in H_{n,q}$)

$\dim_K H_{n,q} \oplus (H_{n,q} \otimes_{H_{n-1,q}} H_{n,q}) = \dim_K H_{n+1,q} \Rightarrow \eta_{n,q}$ iso

($\dim_K H_{n,q} = n! \Rightarrow \dim_K H_{n,q} \oplus (H_{n,q} \otimes_{H_{n-1,q}} H_{n,q}) = (n+1)!$

$\Rightarrow \dim_K H_{n+1,q} \leq (n+1)!$

$S_i = \{1, t_i, t_i t_{i-1}, \ldots, t_i t_{i-1} \ldots t_1\}$ con $i = 1, \ldots, n$

$\rightsquigarrow \{h = h_1 h_2 \ldots h_n \,|\, h_i \in S_i\}$ K-lin. indip. (K-base) in $H_{n+1,q}$

$\Rightarrow \dim H_{n+1,q} = (n+1)!$)

<u>Nota</u>: $b_i \mapsto t_i \rightsquigarrow \rho_{n,q} : B_n \to H_{n,q}$ omom. moltipl. $\forall\, n \geq 1$, $q \neq 0$

(relazioni di $B_n \leftrightsquigarrow$ relazioni moltiplicative in $H_{n,q}$)

$z \in K - \{0\} \rightsquigarrow \{\mathrm{Tr}_{n,z} : H_{n,q} \to K\}_{n \geq 1}$ <u>tracce</u> definite per induz.

1) $\mathrm{Tr}_{1,z} \overset{\text{def}}{=\!=} \mathrm{id}_K : H_{1,q} \cong K \to K$

2) $\mathrm{Tr}_{n+1,z}(a + \Sigma_i b_i t_n c_i) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathrm{Tr}_{n,z}(a) + z\,\mathrm{Tr}_{n,z}(\Sigma_i b_i c_i)$

$\forall\, a + \Sigma_i b_i t_n c_i \in H_{n+1,q}$ con $a, b_i, c_i \in H_{n,q}$

<u>Prop</u>. $\{\mathrm{Tr}_{n,z} : H_{n,q} \to K\}_{n \geq 1}$ unica famiglia di forme K-lineari

t.c. 1) $\mathrm{Tr}_{n,z}(1) = 1$

2) $\mathrm{Tr}_{n+1,z}$ estensione di $\mathrm{Tr}_{n,z}$

3) $\mathrm{Tr}_{n+1,z}(h_1 t_n h_2) = z\,\mathrm{Tr}_{n,z}(h_1 h_2)\ \ \forall\, h_1, h_2 \in H_{n,q}$

4) $\mathrm{Tr}_{n,z}(h_1 h_2) = \mathrm{Tr}_{n,z}(h_2 h_1)\ \forall\, h_1, h_2 \in H_{n,q}$

Dim. proprietà 1,2,3 $\leftrightsquigarrow$ definizione

proprietà 4 banale per $n = 1$, induzione per $n > 1$

$a, a' \in H_{n-1,q} \Rightarrow \mathrm{Tr}_{n,z}(aa') = \mathrm{Tr}_{n,z}(a'a)$

$a, b', c' \in H_{n-1,q} \Rightarrow \mathrm{Tr}_{n,z}(a(b't_{n-1}c')) = \mathrm{Tr}_{n,z}((b't_{n-1}c')a)$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}_{n,z}(h_1h_2) = \mathrm{Tr}_{n,z}(h_2h_1)\ \forall\, h_1 \in H_{n-1,q}\,,\ h_2 \in H_{n,q}$

$a, b \in H_{n-1,q} \Rightarrow \mathrm{Tr}(at_{n-1}bt_{n-1}) = \mathrm{Tr}(bt_{n-1}at_{n-1})$

$$\begin{aligned} b, c, b', c' \in H_{n-1,q} \Rightarrow\ & \mathrm{Tr}_{n,z}((bt_{n-1}c)(b't_{n-1}c')) \\ &= \mathrm{Tr}_{n,z}(c'bt_{n-1}cb't_{n-1}) \\ &= \mathrm{Tr}_{n,z}(cb't_{n-1}c'bt_{n-1}) \\ &= \mathrm{Tr}_{n,z}((b't_{n-1}c')(bt_{n-1}c)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}_{n,z}(h_1h_2) = \mathrm{Tr}_{n,z}(h_2h_1)\ \forall\, h_1, h_2 \in H_{n,q}$

Note: 1) $t_it_{i-1}\dots t_{i-k+1} \in S_i \subset H_{n,q} \rightsquigarrow \mathrm{Tr}_{n,z}(t_it_{i-1}\dots t_{i-k+1}) = z^k$

2) $\mathrm{Tr}_{n,z}(t_it_{i+1}t_i^{-1}) = \mathrm{Tr}_{n,z}(t_i^{-1}t_it_{i+1}) = \mathrm{Tr}_{n,z}(t_{i+1}) = z$

3) $\mathrm{Tr}_{n,z}(t_it_{i+1}t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}) \neq \mathrm{Tr}_{n,z}(t_it_i^{-1}t_{i+1}t_{i+1}^{-1}) = \mathrm{Tr}_{n,z}(1) = 1$

$B \in \mathcal{B}_n \rightsquigarrow T_B(q,z) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathrm{Tr}_{n,z}(\rho_{n,q}(B)) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, z]$

Prop. 1) $T_{Bb_n}(q,z) = z\,T_B(q,z)\ \forall\, B \in \mathcal{B}_n$

2) $T_{Bb_n^{-1}}(q,z) = q^{-1}(q+z-1)T_B(q,z)\ \forall\, B \in \mathcal{B}_n$

3) $T_{B_1B_2}(q,z) = T_{B_2B_1}(q,z)\ \forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}_n$

Dim. 1) $$\begin{aligned} T_{Bb_n}(q,z) &= \mathrm{Tr}_{n+1,z}(\rho_{n+1,q}(Bb_n)) = \mathrm{Tr}_{n+1,z}(\rho_{n,q}(B)t_n) \\ &= z\,\mathrm{Tr}_{n,z}(\rho_{n,q}(B)) = z\,T_B(q,z) \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} T_{Bb_n^{-1}}(q,z) &= \mathrm{Tr}_{n+1,z}(\rho_{n+1,q}(Bb_n^{-1})) = \mathrm{Tr}_{n+1,z}(\rho_{n,q}(B)t_n^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}_{n+1,z}(\rho_{n,q}(B)(q^{-1}t_n - q^{-1} + 1)) \\ &= (q^{-1}z - q^{-1} + 1)\mathrm{Tr}_{n+1,z}(\rho_{n,q}(B)) \\ &= q^{-1}(q+z-1)T_B(q,z)) \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} T_{B_1B_2}(q,z) &= \mathrm{Tr}_{n,z}(\rho_{n,q}(B_1)\rho_{n,q}(B_2)) \\ &= \mathrm{Tr}_{n,z}(\rho_{n,q}(B_2)\rho_{n,q}(B_1)) = T_{B_2B_1}(q,z) \end{aligned}$$

$K \subset R^3$ nodo orientato, $K \cong \widehat{B}$ con $B \in \mathcal{B}_{n(B)}$

$\rightsquigarrow U_K(q,z) \overset{\text{def}}{=\!=} c_B(q,z)\,T_B(q,z)$

con $c_B(q,z) = z^{\frac{1-n(B)-e(B)}{2}}(q^{-1}(q+z-1))^{\frac{1-n(B)+e(B)}{2}}$

Note: 1) $U_K(q,z) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}, z^{\pm 1/2}]$ ben definito (non dipende da B)
invariante isotopico del nodo orientato K
(segue dal teorema di Markov e dalla prop. sopra)

2) K banale $\not\Leftarrow\!\!\!\Rightarrow U_K(q,z) = (qz^{-1}(q+z-1)^{-1})^{(n(K)-1)/2}$
$(e(1_{\mathcal{B}_{n(K)}}) = 0\,,\ n(1_{\mathcal{B}_{n(K)}}) = n(K)\,,\ \mathrm{Tr}_{n,z}\rho_{n,q}(1_{\mathcal{B}_{n(K)}}) = 1)$

Prop. $a^{-1}U_{K_+}(q,z) - a\,U_{K_-}(q,z) = b\,U_{K_0}(q,z)$
con $a = z^{-1/2}(q+z-1)^{1/2}\,,\ b = q^{-1/2} - q^{1/2}$

Dim. possiamo supporre $K_0 \cong \widehat{B}$ e $K_\pm = \widehat{B}_\pm$ con $B_\pm = Bb^{\pm 1}_{n(B)-1}$

$$c_{B_\pm}(q,z) = z^{\mp 1/2}(q^{-1}(q+z-1))^{\pm 1/2}c_B(q,z)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a^{\mp 1}\,U_{K_\pm}(q,z) &= z^{\pm 1/2}(q+z-1)^{\mp 1/2}\,c_{B_\pm}(q,z)\,T_{B_\pm}(q,z)\\ &= q^{\mp 1/2}c_B(q,z)\,\mathrm{Tr}_{n(B),z}(\rho_{n(B),q}(Bb^{\pm 1}_{n(B)-1}))\\ &= c_B(q,z)\,\mathrm{Tr}_{n(B),z}(q^{\mp 1/2}t^{\pm 1}_{n(B)-1}\rho_{n(B),q}(B))\end{aligned}$$

$$q^{-1/2}t_i - q^{1/2}t_i^{-1} = q^{-1/2}t_i - q^{1/2}(q^{-1}t_i - q^{-1} + 1) = q^{-1/2} - q^{1/2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a^{-1}U_{K_+}(q,z) - a\,U_{K_-}(q,z) &= b\,c_B(q,z)\,\mathrm{Tr}_{n(B),z}(\rho_{n(B),q}(B))\\ &= b\,c_B(q,z)\,T_B(q,z) = b\,U_{K_0}(q,z)\end{aligned}$$

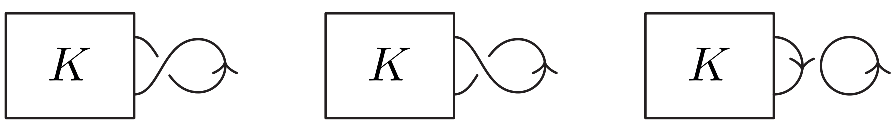
Polinomio di Jones

$K \subset R^3$ nodo orientato

$\rightsquigarrow W_K(x,y) = U_K(q,z)$ con $x = z^{-1/2}(q+z-1)^{1/2}$, $y = q^{-1/2} - q^{1/2}$
polinomio di Jones in due variabili del nodo orientato K

Prop. $W_K(x,y)$ è univocamente determinato da $W_{S^1}(x,y) = 1$
e $x^{-1}W_{K_+}(x,y) - x\,W_{K_-}(x,y) = y\,W_{K_0}(x,y)$
equaz. caratteristica del polinomio di Jones in due var.

Dim. prop. sopra + sostituzione $\rightsquigarrow$ equazione caratteristica
equaz. caratteristica $\Rightarrow W_{\widehat{K}}(x,y) = (x^{-1} - x)y^{-1}W_K(x,y)$



$K_+ \cong K$ $K_- \cong K$ $K_0 \cong \widehat{K}$

$W_{S^1}(x,y) = 1 \Rightarrow W_K(x,y) = ((x^{-1} - x)y^{-1})^{n(K)-1}\ \forall\, K$ banale
$\rightsquigarrow W_K(x,y)$ (doppia induz. su $c(D)$ e $u(D)$, D diagr. di K)

<u>Note</u>: 1) $W_K(x,y) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ invar. isotop. del nodo orient. K t.c. $V_K(x) = W_K(x, x^{1/2} - x^{-1/2})$ (equaz. caratteristiche)

2) $W_K(x,y)$ contiene solo termini di grado (totale) pari e di grado $\equiv_2 n(K) - 1$ separatamente rispetto a x e y (equaz. caratteristica e $n(K_+) = n(K_-) = n(K_0) \pm 1$)

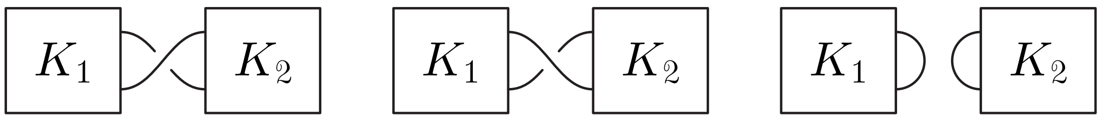
3) equaz. caratteristica $\rightsquigarrow$ algoritmo per calcolare $W_K(x,y)$

<u>Note</u>: 1) $W_{-K}(x,y) = W_K(x,y)$ $((-K)_{\pm,0} = -(K_{\pm,0}))$
$\Rightarrow W_K(x,y)$ non dipende dall'orient. per K connesso

2) $W_{\overline{K}}(x,y) = W_K(x^{-1}, -y)$ $(\overline{K}_{\pm,0} = \overline{K_{\mp,0}})$

3) $W_{K_1 \sqcup K_2}(x,y) = (x^{-1} - x) y^{-1} W_{K_1}(x,y) W_{K_2}(x,y)$
$(K_1 \sqcup \text{banale} \rightsquigarrow K_1 \sqcup K_2$ con $(K_1 \sqcup K_2)^{\pm,0} = K_1 \sqcup K_2^{\pm,0})$

4) $W_{K_1 \# K_2}(x,y) = W_{K_1}(x,y) W_{K_2}(x,y)$
$(W_{K_1 \# K_2}(x,y) = (x^{-1} - x)^{-1} y \, W_{K_1 \sqcup K_2}(x,y))$



$K_+ \cong K_1 \# K_2$ $\quad$ $K_- \cong K_1 \# K_2$ $\quad$ $K_0 \cong K_1 \sqcup K_2$