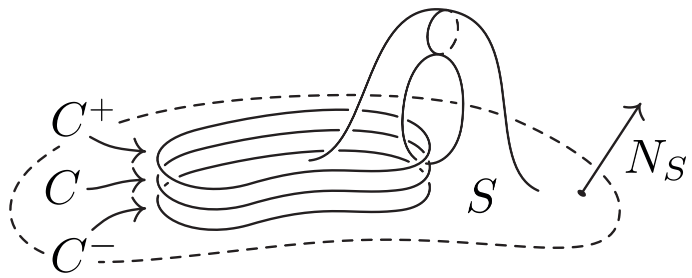
Forme di Seifert

$K \subset R^3$ nodo orientato, $S \subset R^3$ superficie di Seifert per K
$\rightsquigarrow \beta_S : H_1(S) \times H_1(S) \to \mathbb{Z}$ forma di Seifert per K
definita $\beta_S(c_1, c_2) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \ell(C_1^-, C_2^+)\ \forall\, c_1, c_2 \in H_1(S)$
con $C_i \subset S$ curva chiusa semplice t.c. $c_i = [C_i]$
$C_i^\pm = C_i \pm \varepsilon N_S \subset R^3$ curva parallela a C_i

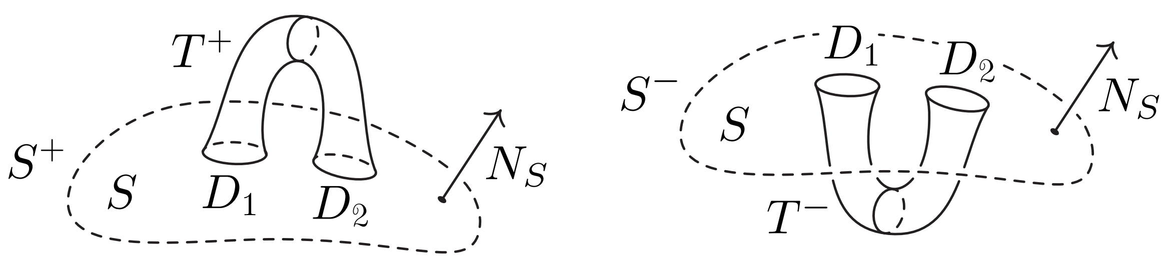


Note: 1) β_S è ben definita
($\forall\, c \in H_1(S)\ \exists\, C \subset S$ curva chiusa semplice t.c. $c = [C]$
non necessariamente connessa
$\ell(C_1^-, C_2^+)$ definito sommando sulle comp. di C_1^- e C_2^+
non dipende da $C_{1,2}$ né da $\varepsilon > 0$ suff. piccolo)
2) β_S è bilineare ($c + c' \in H_1(S) \leftrightsquigarrow C \cup C' \subset S$)

$B = \{b_i\}_{i=1,\dots,2g(S)+n(K)-1}$ base di $H_1(S) \cong \mathbb{Z}^{2g(S)+n(K)-1}$
$\rightsquigarrow M_{S,B} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\beta_S(b_i, b_j))_{i,j}$ matrice di Seifert per K

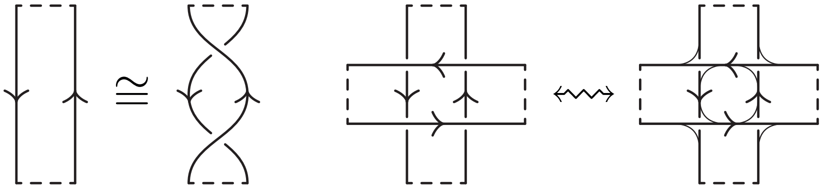
Note: 1) $H_1(S)$ $\mathbb{Z}$-modulo libero $\Rightarrow \exists\, B \subset H_1(S)$ base
2) $B, B' \subset H_1(S)$ basi $\Rightarrow \exists\, M \in \mathrm{GL}(2g(S) + n(K) - 1, \mathbb{Z})$
tale che $M_{S,B'} = M^* M_{S,B} M$

Prop. $S, S' \subset R^3$ superfici di Seifert per $K \subset R^3$ nodo orientato
$\Rightarrow S \leftrightsquigarrow S'$ relaz. di equiv. generata da isotopia
e $S \rightsquigarrow S^\pm = S - (D_1 \cup D_2) \cup T^\pm$



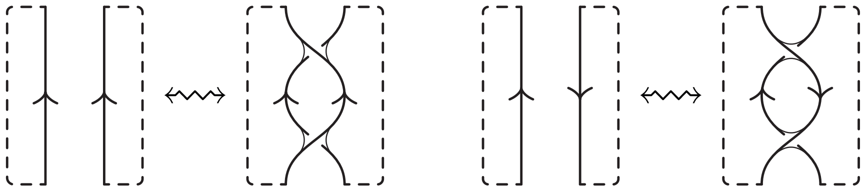
<u>Dim</u>. isotopia $\rightsquigarrow S, S' =$ dischi $\cup$ bande $(S, S' \searrow \vee_{2g+n-1} S^1)$

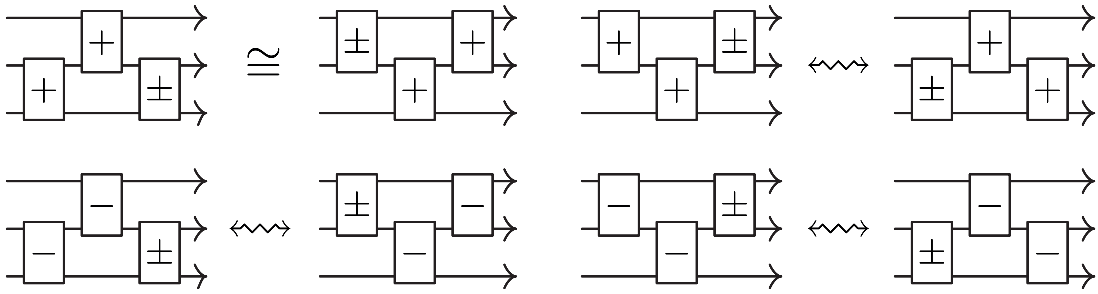
isot. $+ \leftrightsquigarrow\ \rightsquigarrow S, S' =$ sup. di Seifert derivate da diagr. D, D'



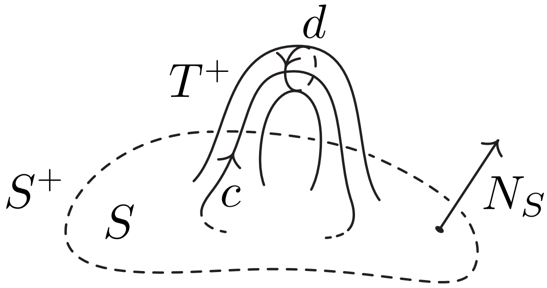
$\Rightarrow$ basta provare che mov. di Reidemeister $\rightsquigarrow$ isotopia $+ \leftrightsquigarrow$

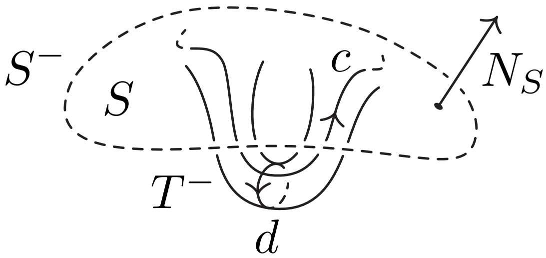
mov. 1 $\rightsquigarrow$ isotopia (banale)

mov. 2 $\rightsquigarrow$ 

mov. 3 $\rightsquigarrow$ 

<u>Nota</u>: B base di $H_1(S) \rightsquigarrow B' = B \cup \{c, d\}$ base di $S' = S^{\pm}$





$$M_{S^+,B'} = \left(\begin{array}{c|cc} M_{S,B} & \xi & 0 \\ \hline * & * & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow M_{S^+,B''} = \left(\begin{array}{c|cc} M_{S,B} & \xi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$M_{S^-,B'} = \left(\begin{array}{c|cc} M_{S,B} & * & 0 \\ \hline \xi & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow M_{S^-,B''} = \left(\begin{array}{c|cc} M_{S,B} & 0 & 0 \\ \hline \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Polinomio di Alexander</u>

$K \subset R^3$ nodo orientato, $M_{S,B}$ matrice di Seifert per K

$\rightsquigarrow \Delta_K(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \det(t^{1/2} M_{S,B} - t^{-1/2} M^*_{S,B}) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$

$\hookrightarrow$ <u>polinomio di Alexander</u> del nodo orientato K

Prop. $\Delta_K(t)$ *invariante isotopico di* K ben definito
(non dipende dalla sup. di Seifert S e dalla base B)

Dim. $B \rightsquigarrow B' \Rightarrow M_{S,B'} = M^* M_{S,B} M$ con $\det M = \pm 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \det(t^{1/2} M_{S,B'} - t^{-1/2} M^*_{S,B'}) \\
&= \det(t^{1/2} M^* M_{S,B} M - t^{-1/2} M^* M^*_{S,B} M) \\
&= \det(M^*(t^{1/2} M_{S,B} - t^{-1/2} M^*_{S,B}) M) \\
&= \det M^* \det(t^{1/2} M_{S,B} - t^{-1/2} M^*_{S,B}) \det M \\
&= \det(t^{1/2} M_{S,B} - t^{-1/2} M^*_{S,B})
\end{aligned}$$

$$S \rightsquigarrow S^+ \Rightarrow M_{S^+,B''} = \left(\begin{array}{c|cc} M_{S,B} & \xi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \det(t^{1/2} M_{S^+,B''} - t^{-1/2} M^*_{S^+,B''}) \\
&= \det \left(\begin{array}{c|cc} t^{1/2} M_{S,B} - t^{-1/2} M^*_{S,B} & t^{1/2}\xi & 0 \\ \hline -t^{-1/2}\xi^* & 0 & t^{1/2} \\ 0 & -t^{-1/2} & 0 \end{array}\right) \\
&= \det(t^{1/2} M_{S,B} - t^{-1/2} M^*_{S,B})
\end{aligned}$$

$S \rightsquigarrow S^-$ analogo a $S \rightsquigarrow S^+$

invarianza isotopica per costruzione

Note: 1) $\Delta_K(t) = (-1)^{n(K)-1} \Delta_K(t^{-1})$ $\forall\, K$ nodo orientato
($M_{S,B}$ ha ordine pari/dispari se $n(K)$ è dispari/pari)

2) $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ se $n(K)$ dispari (es. connesso)

3) $K \subset R^3$ nodo connesso
$\rightsquigarrow d(K) \overset{\text{def}}{=\!=} \Delta_K(-1) = (-1)^{g(S)} \det(M_{S,B} + M^*_{S,B})$
$\hookrightarrow$ determinante del nodo orientato K
($\Delta_K(1) = \det(M_{S,B} - M^*_{S,B}) = 1$ per K connesso)

4) $K \subset R^3$ nodo connesso $\Rightarrow A(\Delta_K(t)) \leq 2g(K)$
(ogni termine di $t^{1/2} M_{S,B} - t^{-1/2} M^*_{S,B}$ ha ampiezza ≤ 1)

Note: 1) K banale $\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \Delta_K(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } K \text{ connesso} \\ 0 \text{ se } K \text{ non connesso} \end{cases}$

2) $\Delta_{-K}(t) = \Delta_K(t)$ (indipend. dall'orient. per K connesso)
(S sup. di Seifert per $K \rightsquigarrow -S$ sup. di Seifert per $-K$)

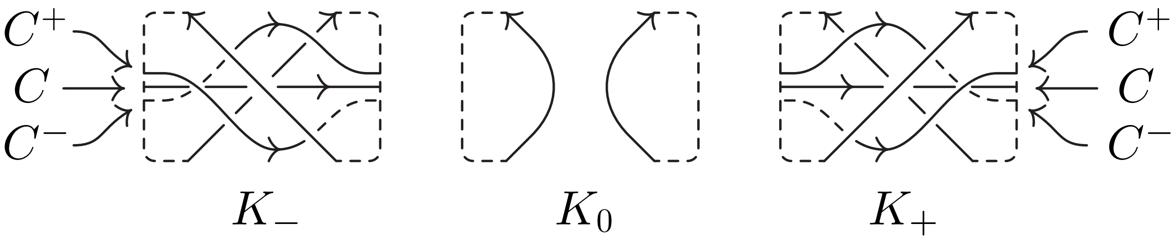
3) $\Delta_{\overline{K}}(t) = (-1)^{n(K)-1}\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$
($M_{S,B}$ matrice di Seifert per K
$\rightsquigarrow M_{\overline{S},\overline{B}} = -M^*_{S,B}$ matrice di Seifert per $\overline{K}$)

4) $\Delta_{K_1 \sqcup K_2}(t) = 0$
(M_{S_i,B_i} matrice di Seifert per K_i
$\rightsquigarrow M_{S_1 \cup T \cup S_2, B_1 \cup B_2 \cup \{d\}} = M_{S_1,B_1} \oplus M_{S_2,B_2} \oplus 0$
matrice di Seifert per $K_1 \sqcup K_2$)

5) $\Delta_{K_1 \# K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t)\Delta_{K_2}(t)$
(M_{S_i,B_i} matrice di Seifert per K_i
$\rightsquigarrow M_{S_1 \#_{\mathrm{Bd}} S_2, B_1 \cup B_2} = M_{S_1,B_1} \oplus M_{S_2,B_2}$
matrice di Seifert per $K_1 \# K_2$)

<u>Prop</u>. $\Delta_K(t)$ è univocamente determinato da $\Delta_{S^1}(t) = 1$
e $\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta_{K_0}(t)$
<u>equaz. caratteristica</u> del polinomio di Alexander

<u>Dim</u>. S sup. di Seifert per $K_0 \rightsquigarrow S_\pm$ sup. di Seifert per $K_\pm$
B base di $H_1(S) \rightsquigarrow B_\pm = B \cup \{c = [C]\}$ base di $H_1(S_\pm)$



$\beta_{S_-}(c,c) = k \;\Rightarrow\; \beta_{S_+}(c,c) = k-1$

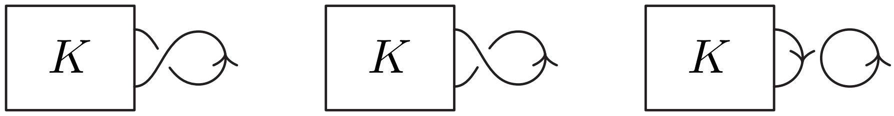
$$\Rightarrow M_{S_-,B_-} = \left(\begin{array}{c|c} M_{S,B} & \xi \\ \hline \eta & k \end{array}\right),\quad M_{S_+,B_+} = \left(\begin{array}{c|c} M_{S,B} & \xi \\ \hline \eta & k-1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_{K_-}(t) = \det\left(\begin{array}{c|c} t^{1/2}M_{S,B} - t^{-1/2}M^*_{S,B} & t^{1/2}\xi - t^{-1/2}\eta^* \\ \hline t^{1/2}\eta - t^{-1/2}\xi^* & (t^{1/2} - t^{-1/2})k \end{array}\right)$$

$$\Delta_{K_+}(t) = \det\left(\begin{array}{c|c} t^{1/2}M_{S,B} - t^{-1/2}M^*_{S,B} & t^{1/2}\xi - t^{-1/2}\eta^* \\ \hline t^{1/2}\eta - t^{-1/2}\xi^* & (t^{1/2} - t^{-1/2})(k-1) \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = \det\left(\begin{array}{c|c} t^{1/2}M_{S,B} - t^{-1/2}M^*_{S,B} & 0 \\ \hline t^{1/2}\eta - t^{-1/2}\xi^* & t^{-1/2} - t^{1/2} \end{array}\right)$$
$$= (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta_{K_0}(t)$$

equaz. caratteristica $\Rightarrow \Delta_{\widehat{K}}(t) = 0 \ \forall\, K$ nodo orientato



$K_+ \cong K \qquad K_- \cong K \qquad K_0 \cong \widehat{K}$

$\Rightarrow \Delta_K(t) = 0$ per ogni K nodo banale non connesso

$\rightsquigarrow \Delta_K(t)$ (doppia induz. su $c(D)$ e $u(D)$, D diagr. di K)

<u>Note</u>: 1) equaz. caratteristica $\rightsquigarrow$ algoritmo per calcolare $\Delta_K(t)$

2) $\Delta_K(t) = p(t^{-1/2} - t^{1/2})$ con p polinomio a coeff. in $\mathbb{Z}$ (doppia induzione su $c(D)$ e $u(D)$, D diagr. di K)

<u>Polinomio di Conway</u>

$K \subset R^3$ nodo orientato

$\rightsquigarrow \nabla_K(y) \in \mathbb{Z}[y]$ unico polinomio t.c. $\nabla_K(t^{-1/2} - t^{1/2}) = \Delta_K(t)$

<u>polinomio di Conway</u> del nodo orientato K

<u>Note</u>: 1) $\nabla_K(y)$ invariante isotopico del nodo orientato K

2) $\nabla_K(y)$ è univocamente determinato da $\nabla_{S^1}(y) = 1$ e $\nabla_{K_+}(y) - \nabla_{K_-}(y) = y\nabla_{K_0}(y)$

<u>equazione caratteristica</u> del polinomio di Conway

3) $\nabla_K(y) = W_K(1, y)$ (equaz. caratteristiche)

4) $\nabla_K(y)$ contiene solo termini di grado $\equiv_2 n(K) - 1$ (equaz. caratteristica e $n(K_+) = n(K_-) = n(K_0) \pm 1$)

5) $\operatorname{gr} \nabla_K(y) = A(\Delta_K(t)) \leq 2g(K)$

$K \cong 5_1 \Rightarrow \nabla_K(y) = y^4 + 3y^2 + 1 \Rightarrow g(K) = 2$

6) equaz. caratteristica $\rightsquigarrow$ algoritmo per calcolare $\nabla_K(y)$

<u>Note</u>: 1) K banale $\not\Longleftarrow\!\!\Rightarrow \nabla_K(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } K \text{ connesso} \\ 0 \text{ se } K \text{ non connesso} \end{cases}$

2) $\nabla_{-K}(y) = \nabla_K(y)$ (indipend. dall'orient. per K connesso)

3) $\nabla_{\overline{K}}(y) = \nabla_K(-y) = (-1)^{n(K)-1}\nabla_K(y)$

4) $\nabla_{K_1 \sqcup K_2}(y) = 0$

5) $\nabla_{K_1 \# K_2}(y) = \nabla_{K_1}(y)\nabla_{K_2}(y)$

$K \subset R^3$ nodo orientato

$\rightsquigarrow a_i(K) \in \mathbb{Z}$ con $i \geq 1$ definiti da $\nabla_K(y) = \sum_i a_i(K) y^i$

coefficienti del polinomio di Conway

<u>Prop</u>. $a_i(K)$ *invarianti isotopici del nodo orientato* K

t.c. 1) $a_i(K) = 0$ se $i \equiv_2 n(K)$ o $i < n(K) - 1$

2) $a_0(K) = 1$ se K connesso, $= 0$ altrimenti

3) $a_1(K) = \ell(K_1, K_2)$ se $K = K_1 \cup K_2$ con $K_{1,2}$ connessi

4) $a_2(K) = a(K)$ (invar. di Arf-Casson) se K connesso

<u>Dim</u>. equaz. caratteristica $\leftrightsquigarrow a_0(K_+) - a_0(K_-) = 0$

$$a_i(K_+) - a_i(K_-) = a_{i-1}(K_0) \ \forall\, i \geq 1$$

1) nota sopra sui gradi dei termini di $\nabla_K(y)$ per $i \equiv_2 n(K)$
incroci comp. diverse $\rightsquigarrow$ induz. su $n(K)$ per $i < n(K) - 1$

2) $a_0(K) = a_0(n(K)$-nodo banale) (inversione incroci)

3) incrocio tra K_1 e $K_2 \rightsquigarrow K = K_\pm$ e K_0 connesso
$\Rightarrow a_1(K_+) - a_1(K_-) = a_0(K_0) = 1 = \ell(K_+) - \ell(K_-)$

4) $K_\pm$ connessi $\Rightarrow K_0 = K_1 \cup K_2$ con $K_{1,2}$ connessi
$\Rightarrow a_2(K_+) - a_2(K_-) = a_1(K_0) = \ell(K_1, K_2)$

<u>Nodi a fetta e segnature</u>

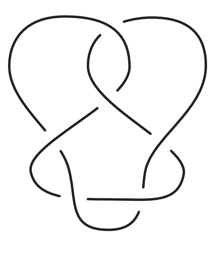
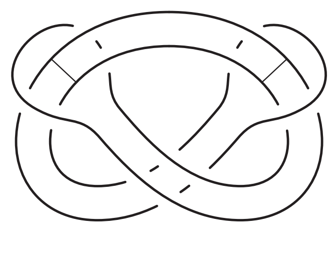
$K \subset R^3$ nodo connesso

<u>nodo a fetta</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, D \subset R^4_+$ disco liscio t.c. $D \cap R^3 = \operatorname{Bd} D \cong K$

$\Longleftrightarrow \exists\, D$ come sopra t.c. $\pi_{4|D} : D \to R$ funz. di Morse

<u>nodo a nastro</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, D$ come sopra t.c. $\pi_{4|D}$ no ha min loc in $\operatorname{Int} D$

$\Longleftrightarrow \exists\, D$ come sopra t.c. $\pi(D) \subset R^3$ ha come sing. un numero finito di autointers. a nastro

6_1  $\cong$ 

Note: 1) $K \subset R^3$ nodo a nastro $\Rightarrow$ nodo a fetta

2) Congettura (Fox 1962): vale l'implicazione inversa dimostrata per i nodi razionali (Lisca 2007)

3) $K \subset R^3$ nodo connesso non banale
$\Rightarrow K \# \overline{K}$ nodo a nastro non banale

$K \subset R^3$ nodo orientato, $M_{S,B}$ matrice di Seifert per K
$\omega \in \mathbb{C}$ tale che $\omega \neq 1$ e $|\omega| = 1$ (cioè $\omega^{-1} = \bar{\omega}$)
$\rightsquigarrow \sigma_\omega(K) \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{sgn}((1-\omega)M_{S,B} + (1-\bar{\omega})M^*_{S,B}) \in \mathbb{Z}$
$\hookrightarrow$ ω-segnatura del nodo orientato K

Nota: $(1-\omega)M_{S,B} + (1-\bar{\omega})M^*_{S,B}$ matrice hermitiana
$\rightsquigarrow \operatorname{sgn}((1-\omega)M_{S,B} + (1-\bar{\omega})M^*_{S,B})$ (teor. di Sylvester)
($\overset{\text{def}}{=\!=}$ # autovalori positivi − # autovalori negativi)

Prop. $\sigma_\omega(K)$ invariante isotopico di K ben definito
(dipende solo da K e ω, non dipende da S e B)

Dim. analoga a quella per $\Delta_K(t)$ con $(1-\omega^{\pm 1})$ al posto di $t^{\pm 1/2}$
tenendo conto che $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 0 & 1-\omega \\ 1-\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} = 0$

Note: 1) $\sigma(K) \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma_{-1}(K) = \operatorname{sgn}(M_{S,B} + M^*_{S,B})$
$\hookrightarrow$ segnatura del nodo orientato K

2) $(1-\omega)M_{S,B} + (1-\bar{\omega})M^*_{S,B} =$
$= (\omega^{-1/2} - \omega^{1/2})(\omega^{1/2}M_{S,B} - \omega^{-1/2}M^*_{S,B})$
$\Rightarrow$ matrice singolare se e solo se $\Delta_K(\omega) = 0$
$\Rightarrow \sigma_\omega(K)$ localmente costante per $\Delta_K(\omega) \neq 0$

3) $\sigma_\omega(-K) = \sigma_\omega(K)$ (indip. dall'orient. per K connesso)

4) $\sigma_\omega(\overline{K}) = -\sigma_\omega(K)$ (K simmetrico $\Rightarrow \sigma_\omega(K) = 0$)

5) $\sigma_\omega(K_1 \sqcup K_2) = \sigma_\omega(K_1) + \sigma_\omega(K_2)$

6) $\sigma_\omega(K_1 \# K_2) = \sigma_\omega(K_1) + \sigma_\omega(K_2)$

Lemma. $K \subset R^3$ nodo a fetta, S sup. di Seifert per K
$\exists\, B$ base di $H_1(S)$ t.c. $M_{S,B} = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & 0 \end{array}\right)$ con blocchi $g \times g$

Dim. $D \subset R^4_+$ disco liscio t.c. $D \cap R^3 = \operatorname{Bd} D = K$ (a meno di $\cong$)
$\rightsquigarrow M \subset R^4_+$ 3-varietà liscia t.c. $\operatorname{Bd} M = S \cup D \cong T_g$
$\rightsquigarrow i_* : H_1(S) \cong H_1(\operatorname{Bd} M) \to H_1(M)$ con $\operatorname{rg}(\ker i_*) \geq g$
$\rightsquigarrow B = \{b_1, \dots, b_{2g}\}$ base di $H_1(S)$ t.c. $\{b_g, \dots, b_{2g}\} \subset \ker i_*$
$c_1, c_2 \in \ker i_* \rightsquigarrow C_1, C_2 \subset S$ curve t.c. $c_i = [C_i]$
$\rightsquigarrow S_1, S_2 \subset M$ superfici lisce t.c. $C_i = \operatorname{Bd}(S_i)$
$\Rightarrow C_i^\pm = \operatorname{Bd} S_i^\pm$, $S_i^\pm \subset M^\pm \subset R^4_+$ sottovar. par.
$\Rightarrow \beta_{S,B}(c_1, c_2) = \ell(C_1^-, C_2^+) = \#(S_1^- \cap S_2^+) = 0$
$(M^- \cap M^+ = \varnothing \Rightarrow S_1^- \cap S_2^+ = \varnothing)$

Prop. $K \subset R^3$ nodo a fetta
$\Rightarrow \Delta_K(t) = p(t)p(t^{-1})$ con $p(t) \in \mathbb{Z}[t]$ $(\Rightarrow d(K) = p(-1)^2)$
$\sigma_\omega(K) = 0\ \ \forall\, \omega \in S^1 - \{1\} \subset \mathbb{C}$ tale che $\Delta_K(\omega) \neq 0$

Dim. $M_{S,B}$ come nel lemma

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta_K(t) &= (-1)^g \det(t^{1/2}Q - t^{-1/2}R^*) \det(t^{1/2}R - t^{-1/2}Q^*) \\ &= (-1)^{2g} \det(t^{1/2}Q - t^{-1/2}R^*) \det(t^{-1/2}Q - t^{1/2}R^*) \\ &= \det(t\,Q - R^*) \det(t^{-1}Q - R^*)\end{aligned}$$

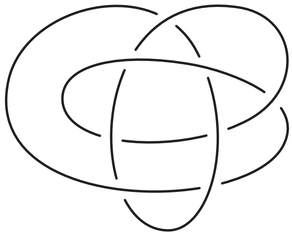
$$A = (1-\omega)M_{S,B} + (1-\overline{\omega})M^*_{S,B} = (\overline{\omega} - 1)(\omega M_{S,B} - M^*_{S,B})$$

$$\Rightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} S^* + \overline{S} & \overline{T} \\ \hline T^* & 0 \end{array}\right) \text{ con } T \text{ invertibile se } \Delta_K(\omega) \neq 0$$

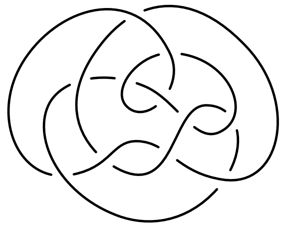
$$M = \left(\begin{array}{c|c} -I_g & 0 \\ \hline \overline{T}^{-1}\overline{S} & \overline{T}^{-1} \end{array}\right) \rightsquigarrow \overline{M}^* A M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_g \\ \hline -I_g & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(A) = \operatorname{sgn}(\overline{M}^* A M) = 0$$

Note: 1) $\sigma(T) = 2 \Rightarrow T$ non è un nodo a fetta
2) $\sigma(E) = 0$, $d(E) = 5 \Rightarrow E$ non è un nodo a fetta
3) solo 4 su 35 nodi primi K con $c(K) \leq 8$ sono a fetta



8_{20} nodo a fetta



11_{34} nodo a fetta?