$M = (M, \mathcal{S})$ $m$-varietà differenziabile

$g = \{g_p$ prodotto scalare su $T_pM\}_{p\in M}$ <u>metrica riemanniana</u> su $M$

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $g_p$ "varia in modo diffenziabile" rispetto al punto $p \in M$

$\iff g(V,W) : p \mapsto g_p(V(p), W(p))$ funzione diff. $\forall\, V, W \in \mathcal{V}M$

$\iff$ in coordinate locali $(x^1, \dots, x^m)$ si ha $g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$
con $g_{ij}$ funzione differenziabile per ogni $i, j = 1, \dots, m$

<u>Note</u>: 1) $G = (g_{ij})_{i,j}$ matrice di $g$ rispetto a $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$
$G^{-1} = (g^{ij})_{i,j}$ matrice inversa (entrambe simmetriche)

2) $BM = \sqcup_{p\in M} \operatorname{Bil} T_pM$ $(m + m^2)$-varietà differenziabile
$((A, \varphi) \in \mathcal{S}$ carta di $M$ con coord. $(x^1, \dots, x^m) \rightsquigarrow$
$(BA, B\varphi)$ carta di $BM$ con coord. $(x^1, \dots, x^m, (g_{ij})_{i,j}))$
$g : M \to BM$ appl. diff. t.c. $g(p) = g_p \in \operatorname{Bil} T_pM\ \forall\, p \in M$

3) $g \leftrightsquigarrow \{\|\cdot\|_p$ norma su $T_pM\}_{p\in M}$
$\leftrightsquigarrow ds^2 = \{ds^2_p = \|\cdot\|^2_p$ forma quadr. associata a $g_p\}_{p\in M}$
<u>elemento di lunghezza quadrato</u>
(quadrato di $ds$ f.d.l. solo se $m = 1$)
$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$ in coord. locali $(x^1, \dots, x^m)$

<u>varietà riemanniana</u> $\overset{\text{def}}{=\!=}$ $(M, g) = (M, g^M) = M_g = M$
metrica riemann. su $M$ var. diff.

<u>Esempi</u>: 1) $R^m = (R^m, ds^2 = \sum_i (dx^i)^2)$ <u>spazio euclideo</u> $(g_{ij} = \delta_{ij})$
(per $m = 2$ in coordinate polari si ha $d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2$)

2) $S^m \subset R^{m+1}$ con la metrica indotta da $R^{m+1}$
(per $m = 2$ in coordinate stereografiche polari
si ha $ds^2 = 4/(1 + \rho^2)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2)$
per ogni $m \geq 2$ in coordinate stereografiche
si ha $ds^2 = 4/(1 + \|x\|^2)^2 \sum_i (dx^i)^2)$

3) $H^m = (\operatorname{Int} R^m_+, ds^2 = 1/(x^m)^2 \sum_i (dx^i)^2)$
<u>spazio iperbolico</u> (semispazio di Poincaré)
$D^m = (\operatorname{Int} B^m \subset R^m, ds^2 = 4/(1 - \|x\|^2)^2 \sum_i (dx^i)^2)$
$= Q^m \subset R^{m+1}_1$ (spazio di Minkowski) in coord. ster.
<u>spazio iperbolico</u> (disco di Poincaré)

(per $m = 2$ in coordinate complesse
$z = x + iy$ su $H^2$ e $w = (z - i)/(z + i)$ su $D^2$ si ha
$ds^2_{H^2} = -4/(z - \bar{z})^2 dz d\bar{z}$ e $ds^2_{D^2} = 4/(1 - w\bar{w})^2 dw d\bar{w}$)

4) $T^m = (T^m, \sum_i (d\vartheta^i)^2)$ <u>toro piatto</u> (localmente euclideo)

5) $M_1 = (M_1, g_1)$ , $M_2 = (M_2, g_2)$ varietà riemanniane
$\rightsquigarrow M_1 \times M_2 = (M_1 \times M_2, g = g_1 \oplus g_2 \leftrightsquigarrow ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2)$
↳ <u>prodotto riemanniano</u>

$M = (M, g)$ varietà riemanniana, $N \subset M$ sottovarietà diff.
$\rightsquigarrow g_{|N} = \{g_{p|T_pN}\}_{p \in N}$ metrica riemanniana su $N$

$(N, g^N) \subset (M, g^M)$ <u>sottovarietà rienniana</u> $\overset{\text{def}}{\iff} g^N = {g^M}_{|N}$

<u>Esempi</u>: 1) $M \subset R^n$ sottovar. diff. con la metrica indotta da $R^n$
2) $H^m, D^m \subset R^m$ non sono sottovarietà riemanniane

<u>Prop</u>. $M$ varietà diff. $\Rightarrow \exists\, g$ metrica riemanniana su $M$

<u>Dim</u>. $\mathcal{A} = \{(A_n, \varphi_n)\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{S}_M$ atlante differenziabile di $M$
$\{f_n\}_{n \geq 1}$ partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{A}$

$$\rightsquigarrow g_n(v, w) \begin{cases} f_n(x) \sum_i v^i w^i & \text{se } v, w \in T_pM \text{ con } p \in A_n \\ 0 & \text{se } v, w \in T_pM \text{ con } p \notin A_n \end{cases}$$

famiglie diff. di forme bilineari simm. t.c. $g_n(v, v) \geq 0$
$\rightsquigarrow g = \sum_n g_n$ $(v \neq 0 \Rightarrow g(v, v) = \sum_n g_n(v, v) > 0)$

<u>Note</u>: 1) $g = \{g_p\}_{p \in M}$ metrica riemanniana su $M$
$\rightsquigarrow T_pM \leftrightarrow T_p^*M$ dualità euclidea per ogni $p \in M$
definita $v \leftrightarrow v^\top$ t.c. $v^\top(w) = g_p(v, w)\ \forall\, w \in T_pM$

2) in coord. locali $v = \sum_i v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ , $w = \sum_i w^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$
$\Rightarrow v^\top(w) = g(v, w) = \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j \Rightarrow v^\top = \sum_j v_j^\top dx^j$

$$\text{con} \begin{cases} v_j^\top = \sum_i g_{ij} v^i & \underline{\text{abbassamento degli indici}} \\ v^i = \sum_j g^{ij} v_j^\top & \underline{\text{innalzamento degli indici}} \end{cases}$$

3) $(p, v) \leftrightarrow (p, v^\top) \rightsquigarrow TM \cong T^*M$ diffeomorfismo canonico
$\mathcal{V}M \leftrightarrow \mathcal{L}M$ (<u>dualità riemanniana</u>)

4) $df \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \nabla f \in \mathcal{V}M$ <u>campo gradiente</u> di $f \in C^\infty(M)$

in coord. locali $df = \sum_j \dfrac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \rightsquigarrow \nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^j} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

in $R^m$ si ha $\nabla f = \sum_{i,j} \delta^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^j} \dfrac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

<u>Prop</u>. $(M,g)$ $m$-varietà riemanniana orientata

$\exists!\ \omega_g \in \mathcal{D}^m M$ <u>forma di volume riemanniana</u>

t.c. $(\omega_g)_p(v_1,\dots,v_m) = 1$ per ogni base ortonormale positiva $(v_1,\dots,v_m)$ di $T_pM$ e ogni $p \in M$

<u>Dim</u>. $(\omega_g)_p(v_1,\dots,v_m) = 1$ per una base ortonorm. pos. di $T_pM$

$\Rightarrow (\omega_g)_p(v_1,\dots,v_m) = 1$ per ogni base ortonorm. pos. di $T_pM$

$\omega \in \mathcal{D}^m M$ forma di volume positiva (rispetto all'orientazione)

$\rightsquigarrow (\omega_g)_p = \omega_p / \omega_p(v_1,\dots,v_m)$ univoc. determ. per ogni $p \in M$

<u>Note</u>: 1) $(x^1,\dots,x^m)$ coordinate locali per $(M,g)$

$\rightsquigarrow (\partial/\partial x^1,\dots,\partial/\partial x^m)$ campo di riferimenti coord.

$\rightsquigarrow (F_1,\dots,F_m)$ campo di rif. ortonorm. (Gram-Schmidt)

$\rightsquigarrow M = (m_i^j = dx^j(F_i))_{i,j}$ matrice di cambiamento di base

$\Rightarrow M^*GM = I$ matrice della metrica rispetto $(F_1,\dots,F_m)$

$\Rightarrow \sqrt{\det G} = 1/\det M$ (funzione diff. <u>densità di volume</u>)

$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m(F_1,\dots,F_m) = \det M$

$\Rightarrow \omega_g = \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$

2) $(M,g) \rightsquigarrow$ misura in ogni dimensione $n \leq m$

t.c. $\operatorname{mis}(C) = \int_C \omega_{g|N}$ per ogni $C \subset N \subset M$

compatto ammis. in $N$ n-sottovar. diff. di $M$

(per esempio lunghezza di curve, area di superfici, volume di regioni nello spazio euclideo $R^3$)

3) $C \subset (M,g)$ curva diff., $\gamma : I \to C$ param. regolare

$\rightsquigarrow \alpha : J \to C$ param. naturale, $s =$ parametro naturale

$\omega_{g|C} = \sqrt{\det G_{|C}}\, dt = \sqrt{g_{11}}\, dt = \|\gamma'(t)\|\, dt = ds$

$\rightsquigarrow ds(v) = ds(v^1 \partial/\partial s) = v^1 = \pm\|v\|_{g|C} \rightsquigarrow ds^2 = \|\cdot\|_g^2$

$\operatorname{Lung}(C) = \int_I \|\gamma'(t)\|_g dt = \int_I \sqrt{\det G_{|C}}\, dt = \int_J ds$

$(M,g)$ varietà riemanniana connessa

$\rightsquigarrow d_g(p,q) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\mathrm{Lung}(C) \mid C$ arco diff. (reg. a tratti) tra $p$ e $q\}$

distanza geodetica indotta da $g$

Note: 1) $C = C_1 \cup \ldots \cup C_k$ tratti reg. $\Rightarrow \mathrm{Lung}(C) \overset{\text{def}}{=} \sum_i \mathrm{Lung}(C_i)$

2) $C$ può avere autointersez. eliminabili riducendo la lung.

Prop. $(M,g)$ varietà riemanniana connessa

$\Rightarrow d_g$ metrica che genera la topologia di $M$

Dim. $d_g$ metrica ($d_g(p,q) \geq 0$, $d_g(p,p) = 0$, simm. e triang. banali

$d_g(p,q) > 0$ se $p \neq q$ deriva dal seguito)

$(A,\varphi)$ carta speciale centrata in $p \in M$

$\rightsquigarrow \{A_r = \varphi^{-1}(B(0,r))\}_{0<r\leq 1}$ base di intorni di $p$ in $M$

$\ell = \min\{\mathrm{sp}\, G_q \mid q \in \mathrm{Cl}\, A_1\}^{1/2}$, $k = \max\{\mathrm{sp}\, G_q \mid q \in \mathrm{Cl}\, A_1\}^{1/2}$

$\Rightarrow \ell\, \|v\|_{\mathrm{eucl}} \leq \|v\|_g \leq k\, \|v\|_{\mathrm{eucl}}\ \forall\, v \in T_qM\ \forall\, q \in A_1$

$\Rightarrow \ell\, \mathrm{Lung}_{\mathrm{eucl}}(C) \leq \mathrm{Lung}_g(C) \leq k\, \mathrm{Lung}_{\mathrm{eucl}}(C)\ \forall\, C \subset A_1$

$\Rightarrow A_r \subset B_{d_g}(p,kr)\ \forall\, r < 1,\ B_{d_g}(p,\ell r) \subset A_r\ \forall\, r < \min\{1, 1/\ell\}$

$\Rightarrow \forall\, 0 < \varepsilon < \min\{1, 1/\ell\}\ \exists\, \delta = \ell\, \varepsilon > 0$ t.c. $B_{d_g}(p,\delta) \subset A_\varepsilon$

$\forall\, 0 < \varepsilon < \min\{1, k\}\ \exists\, \delta = \varepsilon/k > 0$ t.c. $A_\delta \subset B_{d_g}(p,\varepsilon)$

$f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ applicazione diff. tra varietà riemanniane

appl. isometrica $\overset{\text{def}}{\iff} g^N(T_pf(v), T_pf(w)) = g^M(v,w)\ \forall\, v,w \in T_pM$

$\iff \|T_pf(v)\|_{g^N} = \|v\|_{g^M}\ \forall\, v \in T_pM$

appl. simile $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, s > 0$ (fattore di similitudine) tale che

$g^N(T_pf(v), T_pf(w)) = s^2 g^M(v,w)\ \forall\, v,w \in T_pM$

$\iff \exists\, s > 0$ t.c. $\|T_pf(v)\|_{g^N} = s\|v\|_{g^M}\ \forall\, v \in T_pM$

appl. conforme $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, s(p) > 0$ (funzione diff.) tale che

$g^N(T_pf(v), T_pf(w)) = s(p)^2 g^M(v,w)\ \forall\, v,w \in T_pM$

$\iff \exists\, s(p) > 0$ t.c. $\|T_pf(v)\|_{g^N} = s(p)\|v\|_{g^M}\ \forall\, v \in T_pM$

Note: 1) $f : M \to N$ applicazione isom./simile/conf.

$\Leftrightarrow f^*(ds^2_N) = ds^2_M / s^2 ds^2_M / s(p)^2 ds^2_M$

2) $f$ appl. isom. $\Rightarrow f$ appl. simile $\Rightarrow f$ appl. conf.

$\Rightarrow \ker T_pf = 0\ \forall\, p \in M \Rightarrow f$ regolare con $m \leq n$

3) appl. isom./simili/conf. chiuse per composizione
4) $N \subset M$ sottovar. riemann. $\Leftrightarrow i : N \hookrightarrow M$ isometrica
($i : H^m, D^m \hookrightarrow R^m$ non isometriche ma conformi
$i : T^m \hookrightarrow R^{m+1}$ (toro di rotaz.) imm. reg. non conforme)
5) $f : M \to N$ applicazione isometrica
$\Rightarrow \mathrm{Lung}_{g^N}(f(C)) = \mathrm{Lung}_{g^M}(C)$ per ogni curva $C \subset M$
$\not\Rightarrow d_{g^N}(f(p), f(q)) = d_{g^M}(p, q)$ (esempio $S^m \subset R^{m+1}$)
6) $f : M \to N$ appl. conforme $\Leftrightarrow f$ conserva gli angoli

$f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ appl. diff. tra varietà riemanniane
<u>isometria (locale)</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ diffeo (locale) isometrico
<u>similitudine (locale)</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ diffeo (locale) simile
<u>conformità (locale)</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ diffeo (locale) conforme

<u>Note</u>: 1) $f$ isomet. (loc.) $\Rightarrow f$ simil. (loc.) $\Rightarrow f$ conform. (loc.)
2) isomet./simil./conform. chiuse per compos. e invers.
3) $f : M \to N$ isometria $\Rightarrow d_{g^N}(f(p), f(q)) = d_{g^M}(p, q)$
4) $\varphi_{1,2} : S^m - \{p_{1,2}\} \to R^m$ non isometrie ma conformità
5) $f : M' \to M$ rivest. diff. di $M = (M, g)$ varietà riemann.
$\exists!\ g' = g \circ (Tf \times Tf)$ metrica riemanniana su $M'$
tale che $f : (M', g') \to (M, g)$ isometria locale

$M = (M, g)$ varietà riemanniana
$\rightsquigarrow \mathrm{Isom}\, M \overset{\text{def}}{=\!=} (\{f : M \to M \mid f \text{ isometria}\}, \circ)$
$\cap$ ↖ <u>gruppo delle isometrie di $M$</u>
$\mathrm{Sim}\, M \overset{\text{def}}{=\!=} (\{f : M \to M \mid f \text{ similitudine}\}, \circ)$
$\cap$ ↖ <u>gruppo delle similitudini di $M$</u>
$\mathrm{Conf}\, M \overset{\text{def}}{=\!=} (\{f : M \to M \mid f \text{ conformità}\}, \circ)$
↖ <u>gruppo delle conformità di $M$</u>

<u>Note</u>: 1) $\mathrm{Isom}\, R^m$ coincide con il gruppo delle isometrie euclidee
2) $H \subset \mathrm{Isom}\, M$ propr. disc. su $M = (M, g)$ varietà riemann.
$\exists!\ g' = g \circ ((T\pi)^{-1} \times (T\pi)^{-1})$ metrica riem. su $M' = M/H$
tale che $\pi : (M, g) \to (M', g')$ isometria locale

3) $\pi : R^m \to T^m \cong R^m/\mathbb{Z}^m \rightsquigarrow$ metrica piatta su $T^m$
4) $\pi : S^m \to P^m \cong S^m/\mathbb{Z}_2 \rightsquigarrow$ metrica sferica su $P^m$
5) $\pi : D^2 \to T_g \rightsquigarrow$ metrica iperbolica su $T_g$ per ogni $g > 1$

$M = (M, g)$ varietà riemanniana orientata

$$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{Isom}^+ M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Isom}\, M \cap \mathrm{Diffeo}^+ M \\ \mathrm{Sim}^+ M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Sim}\, M \cap \mathrm{Diffeo}^+ M \\ \mathrm{Conf}^+ M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Conf}\, M \cap \mathrm{Diffeo}^+ M \end{array}\right\} \text{isom./simil./conform. che conservano l'orient.}$$

$M = (M, g)$ varietà riemanniana connessa

<u>omogenea</u> $\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, p, q \in M\ \exists\, f \in \mathrm{Isom}\, M$ t.c. $f(p) = q$
($\mathrm{Isom}\, M$ agisce transitivamente su $M$)

<u>loc. omogenea</u> $\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, p, q \in M\ \exists\, f : A \to B$ isometria t.c. $f(p) = q$
con $A \subset M$ int. ap. di $p$ e $B \subset M$ int. ap. di $q$

<u>Note</u>: 1) $M$ omogenea $\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow$ loc. omogenea (es. $B(0,1) \subset R^m$)
2) omogeneità (locale) invariante per isometrie (locali)

<u>Esempi</u>: 1) $R^m$ omogeneo ($\mathrm{Tra}\, R^m \subset \mathrm{Isom}\, R^m \rightsquigarrow$ azione transitiva)
2) $T^m$ omogeneo (l'azione passa al quoziente $R^m/\mathbb{Z}^m$)
3) $S^m$ omogeneo ($\mathrm{Isom}\, S^m \leftrightarrow \mathrm{O}(m+1) \rightsquigarrow$ azione trans.)
4) $P^m$ omogeneo (l'azione passa al quoziente $S^m/\mathbb{Z}_2$)
5) $H^m, D^m$ omogenei ($\mathrm{Tra}\, R^{m-1} \times \mathrm{id}_R\,, \mathrm{Sim}_0^+ R^m \subset \mathrm{Isom}\, H^m$
$\rightsquigarrow$ azione transitiva su $H^m \cong D^m$)
6) $T_g$ loc. omogeneo per ogni $g > 1$ (loc. isometrico a $D^2$)

## <u>Derivata covariante</u>

<u>Prop</u>. $(M, g)$ varietà riemanniana

$\exists!\, \nabla : \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M$ (<u>connessione di Levi-Civita</u>)
$(V, W) \mapsto \nabla_V W$ <u>derivata covariante</u> di $W$ risp. a $V$

t.c. 1) $\nabla_V W$ $C^\infty(M)$-lineare rispetto a $V$
2) $\nabla_V W$ $R$-lineare rispetto a $W$
3) $\nabla_V (f\, W) = (Vf)\, W + f\, \nabla_V W\ \forall\, V, W \in \mathcal{V}M, f \in C^\infty(M)$
4) $\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]\ \forall\, V, W \in \mathcal{V}M$
5) $Ug(V, W) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W)\ \forall\, U, V, W \in \mathcal{V}M$

Dim. Unicità

$$\left.\begin{aligned} Ug(V,W) &= g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W) \\ Vg(W,U) &= g(\nabla_V W, U) + g(W, \nabla_V U) \\ Wg(U,V) &= g(\nabla_W U, V) + g(U, \nabla_W V) \end{aligned}\right\} \ \forall U, V, W \in \mathcal{V}M$$

$$\Rightarrow 2g(U, \nabla_V W) = Vg(U,W) + Wg(U,V) - Ug(V,W) + g(V,[U,W]) + g(W,[U,V]) + g(U,[V,W])$$

$\Rightarrow \nabla_V W$ univoc. determ. da $(\nabla_V W)^\top(U) = g(U, \nabla_V W)$

Esistenza

$$2\lambda_{V,W}(U) = Vg(U,W) + Wg(U,V) - Ug(V,W) + g(V,[U,W]) + g(W,[U,V]) + g(U,[V,W]))$$

$C^\infty(M)$-lineare rispetto a $U$ e $V$ (ma non $W$)

$\rightsquigarrow \lambda_{V,W} \in \mathcal{L}M \rightsquigarrow \nabla_V W \in \mathcal{V}M$ tale che $(\nabla_V W)^\top = \lambda_{V,W}$

$\nabla$ così definita soddisfa le proprietà $1, \dots, 5$

(1 $\leftrightsquigarrow 2\lambda_{V,W}(U)$ $C^\infty(M)$-lineare di rispetto a $V$

2 $\leftrightsquigarrow 2\lambda_{V,W}(U)$ $R$-lineare di rispetto a $W$

3 $\leftrightsquigarrow 2\lambda_{V,fW}(U) = 2f\lambda_{V,W}(U) + 2(Vf)g(U,W)$

4 $\leftrightsquigarrow 2\lambda_{V,W}(U) - 2\lambda_{W,V}(U) = 2g(U,[V,W])$

5 $\leftrightsquigarrow 2\lambda_{U,V}(W) + 2\lambda_{U,W}(V) = 2Ug(V,W)$)

Prop. $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ appl. diff. tra varietà riemann.

$f$ similitudine $\Rightarrow f_*(\nabla^M_V W) = \nabla^N_{f_*(V)} f_*(W)\ \forall V, W \in \mathcal{V}M$

$f$ simil. locale $\Rightarrow f^*(\nabla^N_V W) = \nabla^M_{f^*(V)} f^*(W)\ \forall V, W \in \mathcal{V}N$

lo stesso vale in particolare per le isometrie (locali)

Dim. l'equazione che definisce $\nabla$ è lineare omogenea nelle $g(\cdot,\cdot)$ quindi resta invariata se si moltiplica ogni $g(\cdot,\cdot)$ per $s^2$

Note: 1) $(F_1, \dots, F_m)$ riferim. locale, $V = \sum_i v^i F_i$, $W = \sum_j w^j F_j$

$$\Rightarrow \nabla_V W = \sum_j \nabla_V(w^j F_j) = \sum_j (Vw^j) F_j + \sum_j w^j \nabla_V F_j$$

deriv. vett. (dip. dal riferim.)

$$= \sum_{i,j} v^i (F_i w^j) F_j + \sum_{i,j} v^i w^j \nabla_{F_i} F_j$$

(dipende solo dal riferim.)

$$\rightsquigarrow \Gamma_{ij} \overset{\text{def}}{=\!=} \nabla_{F_i} F_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} F_k$$

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= F_k^*(\Gamma_{ij})\\ \Gamma_{ijk} &= F_k^\top(\Gamma_{ij})\end{aligned}\right\}$$ <u>simboli di Christoffel</u> di I e II specie

$\Gamma_{ijk} = \sum_h g_{kh}\Gamma_{ij}^h$ con $g_{kh} = g(F_k, F_h)$

$\Gamma_{ij}^k = \sum_h g^{kh}\Gamma_{ijh}$ con $(g^{kh})_{k,h}$ matrice inversa

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk} = (&F_i g_{jk} + F_j g_{ik} - F_k g_{ij}\\ &+ g(F_i,[F_k,F_j]) + g(F_j,[F_k,F_i]) + g(F_k,[F_i,F_j])/2\end{aligned}$$

2) $(x^1,\ldots,x^m)$ coord. locali, $V = \sum_i v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $W = \sum_j w^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$

$$\Rightarrow \nabla_V W = \sum_k \Big(\sum_i v^i \frac{\partial w^k}{\partial x^i} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v^i w^j\Big)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

con $\Gamma_{ijk} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\Big)$

$\Gamma_{ij}^k = \dfrac{1}{2}\sum_h g^{kh}\Big(\dfrac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \dfrac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\Big)$

$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ e $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}\ \forall\, i,j,k$

$(\Gamma_{ij} - \Gamma_{ji} = [\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0\ \forall\, i,j)$

<u>Esempi</u>: 1) $g_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow \Gamma_{ijk} = 0\ \forall\, i,j,k$ ($\nabla$ = deriv. vett. in $R^m$)

2) $g_{ij} = s(x)^2\delta_{ij}$ (metrica <u>conformemente piatta</u>)

$$\Rightarrow \begin{cases}\Gamma_{ijk} = 0\\ \Gamma_{iik} = -s\dfrac{\partial s}{\partial x^k}\\ \Gamma_{ijj} = \Gamma_{iii} = s\dfrac{\partial s}{\partial x^i}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Gamma_{ij}^k = 0\\ \Gamma_{ii}^k = -\dfrac{1}{s}\dfrac{\partial s}{\partial x^k}\\ \Gamma_{ij}^j = \Gamma_{ii}^i = \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial s}{\partial x^i}\end{cases}$$

(dove $i,j,k$ sono tutti distinti)

<u>Note</u>: 1) $(\nabla_V W)_p$ dipende solo da $V_p$ e $W$ in un intorno di $p \in M$

$\rightsquigarrow \nabla_v W$ ben definita $\forall\, v \in T_pM\ \forall\, W$ loc. def. int. a $p \in M$

2) $v = [\gamma] \Rightarrow \nabla_v W$ dipende solo da $W$ lungo $\gamma : I \to M$

$\rightsquigarrow \nabla_v W$ ben def. $\forall\, W = (t \mapsto W_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M \subset TM)_{t\in I}$ diff.

<u>campo di vettori lungo $\gamma$</u>

in coord. locali, $v = \gamma'(0) = \sum_i v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $W(t) = \sum_j w^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$

$$\Rightarrow \nabla_v W = \sum_k \Big(\frac{dw^k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v^i w^j\Big)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

3) $N \subset M = (M, g)$ sottovarietà diff.

$$\left.\begin{array}{l} v \in T_pN \rightsquigarrow \nabla_v W \\ V \in \mathcal{V}N \rightsquigarrow \nabla_V W \end{array}\right\} \forall\, W = (p \mapsto W_p \in T_pM \subset TM)_{p\in N} \text{ diff.}$$

campo di vettori lungo $N$

Prop. $(N, g^N) \subset (M, g^M)$ sottovarietà riemanniana

$\nabla^N_V W = \pi \nabla^M_V W \quad \forall\, V, W \in \mathcal{V}N$

$\nabla^N_v W = \pi_p(\nabla^M_v W) \quad \forall\, v \in T_pN\ \forall\, W \in \mathcal{V}N$

con $\pi_p : T_pM \to T_pN$ proiezione ortogonale e $\pi = \sqcup_{p\in N}\pi_p$

Dim. $\pi\nabla^M : \mathcal{V}N \times \mathcal{V}N \to \mathcal{V}N$ soddisfa le proprietà caratt. di $\nabla^N$

1 e 2) seguono dalla linearità di $\pi_p$

3) $\pi\nabla^M_V(f\,W) = \pi((Vf)\,W + f\,\nabla^M_V W) = (Vf)\,W + f\,\pi\nabla^M_V W)$

4) $\pi\nabla^M_V W - \pi\nabla^M_W V = \pi(\nabla^M_V W - \nabla^M_W V) = \pi[V, W] = [V, W]$

5) $g(\pi\nabla^M_U V, W) + g(V, \pi\nabla^M_U W) = g(\nabla^M_U V, W) + g(V, \nabla^M_U W)$

$M = (M, g)$ varietà riemanniana

$C \subset M$ curva regolare, $\gamma : I \to M$ param. regolare di $C$

$V$ campo di vettori lungo $C$

parallelo (lungo $C$) $\overset{\text{def}}{\iff} \nabla_{\gamma'(t)} V = 0\ \forall\, t \in I$

Note: 1) la definizione non dipende dalla param. (né dall'orient.)

2) in coordinate locali

$$\gamma(t) = x(t)\,,\ \gamma'(t) = \textstyle\sum_i \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x^i},\ V(t) = \sum_i v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$$

$$V \text{ parallelo} \Leftrightarrow \frac{dv^k}{dt} = -\textstyle\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \dfrac{dx^i}{dt} v^j\,,\ \ k = 1, \dots, m$$

Prop. $(M, g)$ varietà riem., $C \subset M$ arco di curva regolare tra $p$ e $q$

$v \in T_pM \rightsquigarrow V_C$ unico campo parallelo lungo $C$ t.c. $V_C(p) = v$

$\rightsquigarrow \tau^C_{p,q} : T_pM \to T_qM$ definita $\tau^C_{p,q}(v) = V_C(q)\ \forall\, v \in T_pM$

trasporto parallelo da $p$ a $q$ lungo $C$

Dim. $V_C$ unica soluzione globale del problema di Cauchy locale

$$\frac{dv^k}{dt} = -\textstyle\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \dfrac{dx^i}{dt} v^j\,,\ v^k(0) = \bar{v}^k\,,\ \ k = 1, \dots, m$$

Note: 1) $\tau^C_{p,q}$ applicazione lineare ben definita

2) $\tau^C_{p,q}$ isom. euclidea ($g(V_C, W_C) = g(v,w)$ cost. lungo $C$)
3) $R^m$ (metrica euclidea) $\Rightarrow \tau^C_{p,q} =$ traslazione (indip. da $C$)
4) in generale $\tau^{C_1}_{p,q} \neq \tau^{C_2}_{p,q}$ o equivalentemente $\tau^C_{p,p} \neq \mathrm{id}_{T_pM}$
5) $v = [\gamma] \Rightarrow \nabla_v W = \lim_{t\to 0} \dfrac{(\tau^{\gamma}_{\gamma(0),\gamma(t)})^{-1} W(t) - W(0)}{t}$

Geodetiche

$(M, g)$ varietà riemanniana

$\gamma : I \to M$ applicazione diff. con $I \subset R$
parametrizzazione geodetica $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \nabla_{\gamma'(t)}\gamma' = 0 \ \ \forall t \in I$

Note: 1) $\gamma$ param. geod. $\Rightarrow \|\gamma'(t)\|$ cost. $\Rightarrow \gamma$ costante o regolare
2) $\gamma$ regolare $\Rightarrow$ immers. locale ($\not\Rightarrow$ immers. glob. o period.)
3) $\gamma : I \to M$ param. geodetica, $k \neq 0$
$\Rightarrow \delta : I/k \to M$ definita $\delta(t) = \gamma(kt)$ param. geodetica
4) in coordinate locali, $\gamma(t) = x(t)$, $\gamma'(t) = \sum_i \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$,
$\gamma$ param. geod. $\Leftrightarrow \dfrac{d^2x^k}{dt^2} = -\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dx^j}{dt}$, $k = 1, \ldots, m$
equazione delle geodetiche

$C \subset M$ "curva" geodetica in $(M, g)$
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $C$ ammette param. geodetica ($\exists\, \gamma$ param. geod. t.c. $C = \gamma(I)$)
$\Longleftrightarrow$ ogni param. di $C$ a velocità costante è una param. geodetica
$\Longleftrightarrow$ ogni param. naturale di $C$ è una param. geodetica

Nota: $\gamma : I \to M$ parametrizzazione geodetica
$\Leftrightarrow C = \gamma(I) \subset M$ geodica e $\|\gamma'(t)\|$ costante

Prop. $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ isometria/similitudine (locale)
$\gamma : I \to M$ param. geod. $\Leftrightarrow f \circ \gamma : I \to N$ param. geod.
$C \subset M$ geodetica $\Leftrightarrow f(C) \subset N$ geodetica

Dim. segue dall'invarianza di $\nabla$ per similitudini locali

Prop. $(M, g)$ varietà riemanniana, $p \in M$, $v \in T_pM$
$\exists!\, \gamma_v : I_v \to M$ param. geodetica massimale t.c. $v = [\gamma_v]$

Dim. $\gamma_v$ unica soluzione globale del problema di Cauchy locale

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^k}{dt^2} = -\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dx^j}{dt} \\ x^k(0)=\bar{x}^k\ ,\ \dfrac{dx^k}{dt}(0)=\bar{v}^k \end{cases} \quad k=1,\dots,m$$

Note: 1) $v \in T_pM \rightsquigarrow C_v = \gamma_v(I_v)$ geodetica massimale

2) $\underbrace{\gamma_{kv}(t) = \gamma_v(kt)}_{\text{omogeneità delle geodetiche}}$ e $I_{kv} = I_v/k\ \forall\, k \in R$

3) $C_{kv} = C_v\ \forall\, k \neq 0$ (per ogni punto e direzione esiste unica "curva" geodetica massimale)

Prop. $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ isometria/similitudine (locale) $\Rightarrow f \circ \gamma_v = \gamma_{T_pf(v)}$ e $f(C_v) = C_{T_pf(v)}\ \forall\, v \in T_pM$

Dim. segue dalla prop. precedente e dalle note

Nota: $(N, g^N) \subset (M, g^M)$ sottovarietà riemann.

$\gamma : I \to N \subset M$ geodetica in $M \not\Leftarrow\!\Rightarrow \gamma$ geodetica in $N$

($i : N \hookrightarrow M$ appl. isom. non basta se $\dim N < \dim M$)

$p \in M \rightsquigarrow e_p : D_p \to M$ applicazione esponenziale di $(M, g)$ in $p$ definita $e_p(v) = \gamma_v(1)\ \forall\, v \in D_p \subset T_pM$ int. aperto di 0

Note: 1) $T_0e_p \cong \mathrm{id}_{T_pM} : T_0(T_pM) \cong T_pM \to T_pM \Rightarrow e_p$ regolare in 0

$(T_0e_p(v) = T_0e_p([t \mapsto tv]) = [t \mapsto e_p(tv) = \gamma_v(t)] = [\gamma_v] = v)$

2) $e_{p|}: D_p \cap \langle v\rangle \to C_v \subset M$ appl. isom. ($e_p$ radialmente isom.)

($v \in T_pM$ versore $\rightsquigarrow t \mapsto tv$ param. naturale di $\langle v\rangle$

$t \mapsto e_p(tv) = \gamma_v(t)$ param. nat. di $C_v$)

3) $e_p$ isometria locale $\Leftrightarrow M$ localmente euclidea intorno a $p$

4) $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ isometria/similitudine (locale)

$p \in M \rightsquigarrow$ diag. comm. (prop. preced. $\Rightarrow f \circ e_p = e_{f(p)} \circ T_pf_|$)

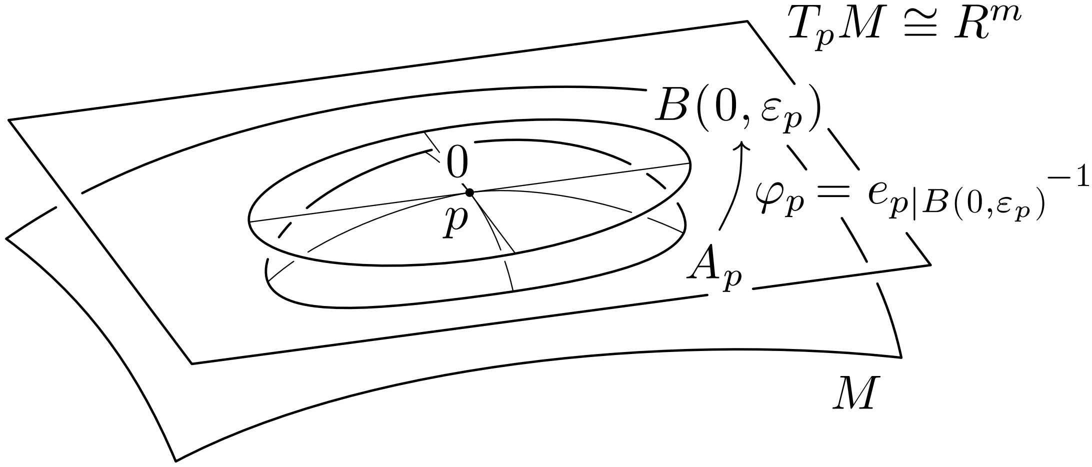
$$\begin{array}{ccc} D_p & \xrightarrow{T_pf_|} & D_{f(p)} \\ {\scriptstyle e_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e_{f(p)}} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

$p \in M \rightsquigarrow \varepsilon_p > 0$ t.c. $e_{p|B(0,\varepsilon_p)} : B(0,\varepsilon_p) \to A_p = e_p(B(0,\varepsilon_p))$ diffeo

$\rightsquigarrow (A_p, \varphi_p)$ con $\varphi_p = {e_{p|B(0,\varepsilon_p)}}^{-1} : A_p \to B(0,\varepsilon_p) \subset T_pM \cong R^m$

carta locale con coordinate normali

(*indotte da un rif. ortonorm. di* $T_pM$)




Prop. $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ isom./simil. (locale), $\bar p \in M$ connessa

$f$ è univoc. determ. da $\bar q = f(\bar p) \in N$ e $T_{\bar p} f : T_{\bar p}M \to T_{\bar q}N$

Dim. $f_1, f_2 : M \to N$ simil. locali t.c. $f_1(\bar p) = f_2(\bar p)$ e $T_{\bar p} f_1 = T_{\bar p} f_2$

$E = \{p \in M \mid f_1(p) = f_2(p) \text{ e } T_p f_1 = T_p f_2\} \neq \varnothing \ (\bar p \in E)$

$E$ chiuso (insieme di coincidenza di funzioni continue)

$E$ aperto $(p \in E \Rightarrow A_p \cap T_p f_{1,2}^{-1}(D_{f_{1,2}(p)}) \subset E)$

$\Rightarrow E = M \Rightarrow f_1 = f_2$

$M = (M, g)$ varietà riemanniana connessa

$p \in M \rightsquigarrow \operatorname{Isom}_p M = \{f \in \operatorname{Isom} M \mid f(p) = p\} \subset \operatorname{Isom} M$

sottogruppo di isotropia di $p$

Note: 1) $\operatorname{Isom}_p M \hookrightarrow \operatorname{Isom}_0 T_pM \cong \mathrm{O}(m)$

(prop. precedente $\Rightarrow f \mapsto T_p f$ monomorfismo)

2) $M$ orient. $\rightsquigarrow \operatorname{Isom}_p^+ M = \operatorname{Isom}_p M \cap \operatorname{Isom}^+ M$

$\operatorname{Isom}_p^+ M \hookrightarrow \operatorname{Isom}_0^+ T_pM \cong \mathrm{SO}(m)$

$M = (M, g)$ varietà riemanniana connessa

isotropa in $p \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, v, w \in T_pM\ \exists\, f \in \operatorname{Isom}_p M$ t.c. $T_p f(v) \upuparrows w$

($\operatorname{Isom}_p M$ agisce trans. sui versori di $T_pM$)

loc. isotropa in $p \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, v, w \in T_pM\ \exists\, f : A \to B$ isometria tra int. aperti di $p$ t.c. $f(p) = p$ e $T_p f(v) \upuparrows w$

(localmente) isotropa $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (localmente) isotropa in ogni $p \in M$

Note: 1) $M$ isotropa $\not\Leftarrow\Rightarrow$ localmente isotropa (es. $B(0,1) \subset R^m$)
2) isotropia (locale) invariante per isometrie (locali)
3) $M$ (localmente) omogenea
(localmente) isotropa in $\bar{p} \Rightarrow$ (localmente) isotropa

Prop. $M = (M, g)$ varietà riemanniana connessa
(localmente) isotropa $\not\Leftarrow\Rightarrow$ (localmente) omogenea

Dim. $\Rightarrow$) $\forall\, p, q \in M\ \exists\, C \subset M$ arco geodetico a tratti tra $p$ e $q$
($p \sim q$ se $\exists\, C \rightsquigarrow A_p \subset [p]\ \forall\, p \in M \Rightarrow$ relaz. d'equiv. aperta)
$\Rightarrow$ basta provare che per ogni $C$ arco geod. tra $p$ e $q$
esiste $h$ isometria (locale) tale che $h(p) = q$
$M$ isotropa $\rightsquigarrow \gamma_v : I \to M$ param. geodetica di $C$
tale che $p = \gamma_v(-t)$ e $q = \gamma_v(t)$
$\rightsquigarrow h \in \mathrm{Isom}_{\gamma_v(0)} M$ t.c. $T_{\gamma_v(0)} h(v) = -v$
$\Rightarrow h(p) = h(\gamma_v(-t)) = \gamma_{-v}(-t) = \gamma_v(t) = q$
$M$ loc. isotropa $\rightsquigarrow$ si può porre $A = B = e_p(B(0, \rho_p))$
con $p \mapsto \rho_p$ funzione continua
$\rightsquigarrow C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ suddiv. di $C$ t.c.
$\mathrm{Lung}(C_i) = \mathrm{Lung}(C)/n < \min_{p \in C} \rho_p$
$\rightsquigarrow h = h_n \circ \ldots \circ h_1$ con ogni $h_i$ definito
come sopra su $C_i$ (invece che su $C$)
$\not\Leftarrow$) $S^1 \times R$ è omogenea ma non isotropa
$S^2 \times R$ è omogenea ma non localmente isotropa

Esempi: 1) $R^m$ isotropo, $T^m$ localmente isotropo per ogni $m \geq 1$
($\mathrm{Isom}_p\, R^m \cong \mathrm{O}(m) \rightsquigarrow$ azione trans. sui rif. ortonorm.)
2) $S^m, P^m$ isotropi per ogni $m \geq 1$
($\mathrm{Isom}_p\, S^m \cong \mathrm{O}(m) \rightsquigarrow$ azione trans. sui rif. ortonorm.)
3) $H^m, D^m$ isotropi per ogni $m \geq 1$, $T_g$ localmente isotropi
($\mathrm{Isom}\, R^{m-1} \times \{\mathrm{id}_{H^1}\}$, invers. sferiche $\subset \mathrm{Isom}\, H^m$
$\rightsquigarrow$ azione trans. sui versori $\rightsquigarrow$ sui riferim. ortonorm.)

Prop. $M = (M, g)$ varietà riemanniana, $H \subset \operatorname{Isom} M$ sottogruppo
$N$ comp. connessa di $\operatorname{Fix} H \overset{\text{def}}{=\!=} \{p \in M \mid h(p) = p \ \forall\, h \in H\}$
$\Rightarrow N$ sottovar. riemann. chiusa di $M$ totalmente geodetica
t.c. 1) $TN = \operatorname{Fix} TH_{|N} \overset{\text{def}}{=\!=} \{v \in TM \,|\, Th(v) = v \ \forall\, h \in H\}_{|N}$
2) $\nabla_v^N W = \nabla_v^M W \ \ \forall\, v \in T_pN \ \forall\, p \in N \ \forall\, W \in \mathcal{V}N$
3) $\gamma_v^N = \gamma_v^M$ e $C_v^N = C_v^M \ \ \forall\, v \in T_pN \ \forall\, p \in N$

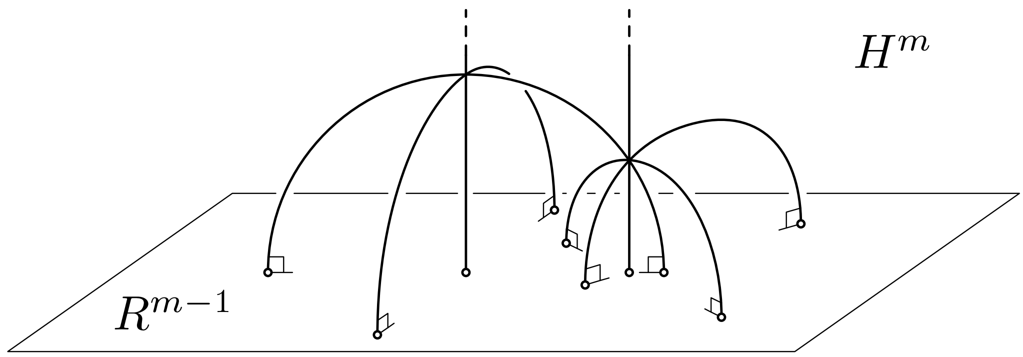
Dim. $p \in N \rightsquigarrow F_p = \operatorname{Fix} TH \cap T_pM \subset T_pM$ sottospazio vett.
$\Rightarrow A_p \cap N = \varphi_p^{-1}(B(0, \varepsilon_p) \cap F_p)$
$(q \in A_p \cap N \Leftrightarrow e_p(T_ph(\varphi_p(q))) = h(q) = q \ \forall\, h \in H$
$\Leftrightarrow T_ph(\varphi_p(q)) = \varphi_p(q) \ \forall\, h \in H$
$\Leftrightarrow \varphi_p(q) \in B(0, \varepsilon_p) \cap F_p)$
$\Rightarrow N \subset M$ sottovar. diff. $\rightsquigarrow$ sottovar. riemanniana
($\dim N$ localmente costante $\Rightarrow$ costante in $N$)
$TN \subset \operatorname{Fix} TH_{|N}$ $(v \in TN \Rightarrow v = [\gamma]$ con $\gamma \subset N \Rightarrow$
$Th(v) = [h \circ \gamma] = [\gamma] = v \ \forall\, h \in H)$
$\operatorname{Fix} TH_{|N} \subset TN$ $(v \in \operatorname{Fix} TH_{|N} \Rightarrow Th(v) = v \ \forall\, h \in H \Rightarrow$
$h \circ \gamma_v^M = \gamma_v^M \ \forall\, h \in H \Rightarrow \gamma_v^M \subset N \Rightarrow v \in TN)$
$v \in T_pN, W \in \mathcal{V}N \Rightarrow T_ph(\nabla_v^M W) = \nabla_v^M W \ \forall\, h \in H$
$\Rightarrow \nabla_v^M W \in \operatorname{Fix} TH_{|N} = TN$
$\Rightarrow \nabla_v^N W = \pi_p(\nabla_v^M W) = \nabla_v^M W$
$v \in T_pN \Rightarrow h \circ \gamma_v^M = \gamma_{T_ph(v)}^M = \gamma_v^M \ \forall\, h \in H$
$\Rightarrow \gamma_v^M \subset N \Rightarrow \gamma_v^M = \gamma_v^N \Rightarrow C_v^M = C_v^N$

Note: 1) la prop. vale anche per $h \in \operatorname{Isom} M \rightsquigarrow \operatorname{Fix} h = \operatorname{Fix} \langle h \rangle$
2) $N \subset M$ sottovar. chiusa connessa totalmente geodetica
$\Rightarrow N$ massimale univoc. determinata da $T_{\bar{p}}N$ con $\bar{p} \in N$
3) $N = \cap_i N_i \subset M$ sottovarietà riemanniane
$N_i \subset M$ tot. geod. (2 e 3 nella prop.) $\Rightarrow N$ tot. geod.
$(\gamma_v^M \subset N_i \Rightarrow \gamma_v^M \subset N,\ \nabla_v^M W \in T_pN_i \Rightarrow \nabla_v^M W \in T_pN)$
4) $f : M \to N$ isometria/similitudine (locale) $\Rightarrow$
sottovar. tot. geod. di $M \leftrightsquigarrow$ sottovar. tot. geod. di $N$
5) $C \subset M$ curva totalmente geodetica $\Leftrightarrow C$ geodetica di $M$

Esempi: 1) $R^m \rightsquigarrow$ sottovar. tot. geod. massimali = sottosp. affini
$\rightsquigarrow$ geodetiche massimali = rette
($L \subset R^m$ sottosp. aff. $\rightsquigarrow \sigma_L \in \mathrm{Isom}\, R^m$ t.c. $L = \mathrm{Fix}\, \sigma_L$)

2) $S^m \rightsquigarrow$ sottovar. tot. geod. massimali $= S^m \cap L$
con $L \subset R^{m+1}$ sottospazio vettoriale
$\rightsquigarrow$ geodetiche massimali = circonf. massime
($S^m \cap L = \mathrm{Fix}\, \sigma_{L|S^m}$ con $\sigma_{L|S^m} \in \mathrm{Isom}\, S^m$)

3) $H^m \rightsquigarrow$ sottovar. tot. geod. massimali
= semispazi e semisfere $\perp R^{m-1}$ (verticali)
$\rightsquigarrow$ geod. mass. = semirette e semicirc. $\perp R^{m-1}$
($L \subset R^{m-1}$ sottosp. aff. $\Rightarrow L \times H^1 = \mathrm{Fix}(\sigma_L \times \mathrm{id}_R)$
$S \subset H^m$ $(m-1)$-sfera $\Rightarrow S = \mathrm{Fix}(\sigma_S =$ inver. sferica))




4) $D^m \rightsquigarrow$ sottovar. tot. geod. massimali
= dischi e calotte sferiche $\perp S^{m-1}$
$\rightsquigarrow$ geod. mass. = diametri e archi di circ. $\perp S^{m-1}$
($L \subset R^m$ sottosp. vett. $\Rightarrow D^m \cap L = \mathrm{Fix}\, \sigma_{L|D^m}$)

Lemma di Gauss

$(A_p, \varphi_p)$ carta locale con coordinate normali $(x^1, \ldots, x^m)$
e coordinate normali sferiche associate $(\rho, \vartheta^1, \ldots, \vartheta^{m-1})$
$\Rightarrow g_{im}(0, \ldots, 0, x^m) = 0 \ \forall\, x^m > 0 \ \forall\, i = 1, \ldots, m-1$
$\Rightarrow g_{\rho\vartheta^i}(\rho, \vartheta^1, \ldots, \vartheta^{m-1}) = 0 \ \forall\, \rho > 0 \ \forall\, i = 1, \ldots, m-1$

Dim. Prima implicazione
per ogni $x$ si ha $\Gamma_{\rho\rho} = 0$, $g_{\rho\rho} = 1$ e $\dfrac{\partial}{\partial\rho} = \sum_i \dfrac{x^i}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

per ogni $x = (0, \ldots, 0, x^m)$ con $x^m > 0$ e $i = 1, \ldots, m-1$

si ha $\Gamma_{mm} = \Gamma_{\rho\rho} = 0 \Rightarrow \Gamma_{mmi} = 0$

$$\frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial x^i} = 0 \Rightarrow g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \rho}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \textstyle\sum_{j,k} g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{x^j}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{x^k}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^k}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \textstyle\sum_j g\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{x^j}{\rho}\Big) \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{x^j}{\rho} \Gamma_{ij}\,, \frac{x^m}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^m}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow g\Big(\frac{x^m}{\rho} \Gamma_{im} + \textstyle\sum_j \frac{\delta^{ij}\rho - x^i x^j/\rho}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial x^j}\,, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow g\Big(x^m \Gamma_{im} + \frac{\partial}{\partial x^i}\,, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big) = 0 \Rightarrow \Gamma_{imm} = -\frac{g_{im}}{x^m}$$

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial x^m} = \Gamma_{mim} + \Gamma_{mmi} = \Gamma_{imm} = -\frac{g_{im}}{x^m} \Rightarrow g_{im} = \frac{c}{x^m}$$

$$\lim_{x^m \to 0} g_{im} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow g_{im} = 0$$

Seconda implicazione

segue dall'arbitrarietà del riferimento ortonormale in $T_pM$
e da $\partial/\partial\vartheta^i = \rho\, \partial/\partial x^i$ nei punti $(0, \ldots, 0, x^m)$ con $x^m > 0$

Prop. $(M, g)$ varietà riemanniana, $p \in M$

$\rightsquigarrow A_p = e_p(B(0, \varepsilon_p)) \subset M$ intorno aperto di $p$ in $M$ t.c.
$\forall\, q \in A_p\ \exists!\, C_{pq} \subset M$ tra $p$ e $q$ t.c. $\mathrm{Lung}(C_{pq}) = d_g(p, q)$
inoltre $C_{pq}$ unico arco geod. tra $p$ e $q$ in $A_p$

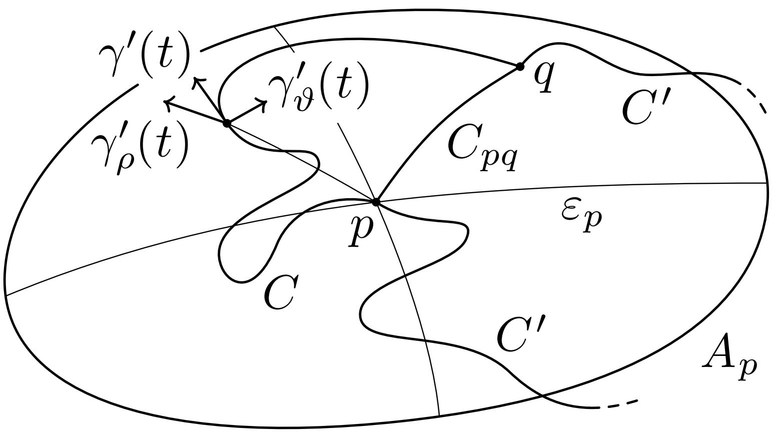
$\rightsquigarrow B_p = e_p(B(0, \delta_p)) \subset A_p$ = intorno aperto di $p$ in $M$ t.c.
$\forall\, q, q' \in B_p\ \exists!\, C_{qq'} \subset M$ tra $q$ e $q'$ t.c. $\mathrm{Lung}(C_{qq'}) = d_g(q, q')$
inoltre $C_{qq'}$ unico arco geod. tra $q$ e $q'$ in $A_p$

Dim. $q \in A_p \Rightarrow q = e_p(v)$ con $v \in B(0, \varepsilon_p)$
$\rightsquigarrow C_{pq} = \gamma_v([0, 1])$ arco geodetico da $p$ a $q$
tale che $\mathrm{Lung}(C_{pq}) = \|v\| = \rho(q) < \varepsilon_p$

$\gamma : [a, b] \to C \subset A_p$ arco regolare (a tratti) da $p$ a $q$

$$\Rightarrow \mathrm{Lung}(C) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\|\gamma'_\rho(t)\|^2 + \|\gamma'_\vartheta(t)\|^2} dt$$
$$\geq \int_a^b |\rho'(t)| dt \geq \int_a^b \rho'(t) dt = \rho(b) - \rho(a) = \rho(q)$$

inoltre vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow \gamma'_\vartheta(t) = 0$ e $\rho'(t) > 0\ \forall\, t \in [a,b]$
$\Leftrightarrow C = C_{pq}$ e $\rho(t)$ monotona




$\gamma : [a,b] \to C' \not\subset A_p$ arco reg. (a tratti) $\Rightarrow \mathrm{Lung}(C') \geq \varepsilon_p$
si può assumere che la funzione $p \mapsto \varepsilon_p$ sia continua
$\Rightarrow \exists\, \delta_p < \varepsilon_p/4$ t.c. $\varepsilon_q > \varepsilon_p/2$ per ogni $q \in B_p = e_p(B(0,\delta_p))$
$\forall\, q, q' \in B_p$ si ha $d_g(q,q') \leq d_g(q,p) + d_g(p,q') < \varepsilon_p/2 < \varepsilon_q$
$\Rightarrow q' \in A_q \rightsquigarrow C_{qq'} \subset e_q(B(0,\varepsilon_p/2)) \subset A_p$

Nota: $B_p = B_{d_g}(p,\delta_p) \subset A_p = B_{d_g}(p,\varepsilon_p)\ \forall\, p \in M$

Corol. $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ diffeo tra varietà riemann. connesse
isom. riemann. $\Leftrightarrow$ isom. tra spazi metrici $(M, d_{g^M})$ e $(N, d_{g^N})$

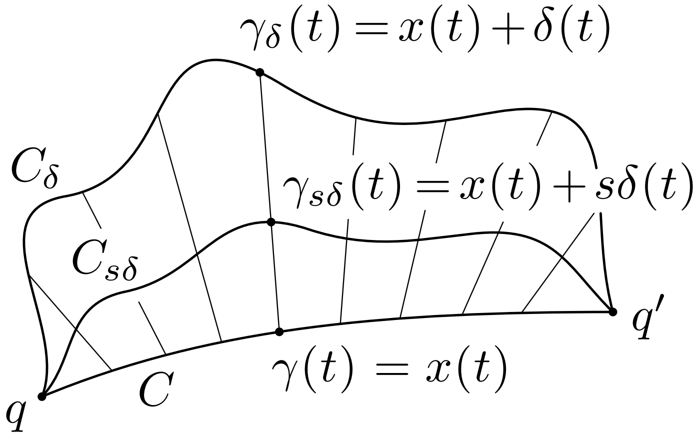
Dim. $\Rightarrow$) già visto ($f$ conserva le lunghezze delle curve)
$\Leftarrow$) $v \in T_pM$ , $w = T_pf(v) \in T_qN$ con $q = f(p)$ , $0 < t < \varepsilon_p/\|v\|$
$\Rightarrow \|v\| = \mathrm{Lung}(\gamma_v([0,t]))/t = d_{g^M}(p, \gamma_v(t))/t$
$= d_{g^N}(q, f(\gamma_v(t)))/t \leq \mathrm{Lung}(f(\gamma_v([0,t])))/t$
$\Rightarrow \|w\| = \lim_{t\to 0} \mathrm{Lung}(f(\gamma_v([0,t])))/t \Rightarrow \|v\| \leq \|w\|$
stesso ragionamento su $f^{-1} \Rightarrow \|w\| \leq \|v\| \Rightarrow \|w\| = \|v\|$

Corol. $(M,g)$ varietà riemann., $C \subset M$ curva regolare (a tratti)
$C$ geodetica $\Leftrightarrow$ minimizza localmente la lunghezza
$(\forall\, p \in C\ \exists\, C_{qq'} \subset C$ t.c. $p \in \mathrm{Int}\, C_{qq'}$ e $\mathrm{Lung}(C_{qq'}) = d_g(q,q'))$

Dim. $p \in C \rightsquigarrow C' \subset C \cap B_p$ arco di estremi $q$ e $q'$ t.c. $p \in \mathrm{Int}\, C'$
$C'$ arco geod. $\Leftrightarrow C' = C_{qq'} \Leftrightarrow \mathrm{Lung}(C') = d_g(q,q')$
$C$ geodetica $\Leftrightarrow$ $C$ loc. geodetica $\Leftrightarrow$ $C$ loc. lunghezza minima

Note: 1) $\gamma : [a,b] \to C$ param. di $C \subset (A,\varphi)$ arco tra $q$ e $q'$
in coordinate locali $\gamma(t) = x(t) = (x^1(t),\dots,x^m(t))$
$C$ ha lunghezza mininima tra gli archi tra $q$ e $q'$ in $A$
$\Leftrightarrow \int_a^b \|x'(t)\|_{x(t)}dt \le \int_a^b \|x'(t)+\delta'(t)\|_{x(t)+\delta(t)}dt$
$\forall\,\delta : [a,b] \to R^m$ diff. suff. piccola t.c. $\delta(a) = \delta(b) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\int_a^b \|x'(t) + s\,\delta'(t)\|_{x(t)+s\,\delta(t)}\,dt\,\Big|_{s=0} = 0 \ \ \forall\,\delta$$




2) in generale, data $\ell : TA \to R$ (funzione lagrangiana),
in coordinate locali $(x,v) \mapsto \ell(x,v)$, trovare $C$ tra $q$ e $q'$
t.c. $\int_a^b \ell(x(t),x'(t))dt$ minimo (curva di minima azione)

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\int_a^b \ell(x(t)+s\,\delta(t)\,,\,x'(t)+s\,\delta'(t))\,dt\,\Big|_{s=0} = 0 \ \ \forall\,\delta$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \frac{d}{ds}\,\ell(x(t)+s\,\delta(t)\,,\,x'(t)+s\,\delta'(t))\,\Big|_{s=0} dt = 0 \ \ \forall\,\delta$$

$$\Leftrightarrow \sum_k \int_a^b \Big(\frac{\partial \ell}{\partial x^k}(x(t),x'(t))\delta^k(t) + \frac{\partial \ell}{\partial v^k}(x(t),x'(t))\delta^{k\prime}(t)\Big)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_k \int_a^b \Big(\frac{\partial \ell}{\partial x^k}(x(t),x'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial v^k}(x(t),x'(t))\Big)\delta^k(t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \Big(\frac{\partial \ell}{\partial x^k}(x(t),x'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial v^k}(x(t),x'(t))\Big)\delta^k(t)dt = 0 \ \ \forall\,k$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial v^k}(x(t),x'(t)) = \frac{\partial \ell}{\partial x^k}(x(t),x'(t))\,,\ k = 1,\dots,m$$

equazione di Eulero-Lagrange

3) nel nostro caso $\ell(x,v) = \|v\|_x = \sqrt{\Sigma_{i,j}\, g_{ij}(x) v^i v^j}$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\frac{1}{\|x'(t)\|}\sum_i g_{ik}\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{2\|x'(t)\|}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \quad \forall\, k$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\sum_i g_{ik}\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \quad \forall\, k \quad \text{se } \|x'(t)\| \text{ cost.}$$

equazione delle geodetiche

$$\Big(\sum_i g_{ik}\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{i,j}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Big)$$

4) lo stessa equaz. si ottiene con $\ell(x,v) = \|v\|_x^2 = ds^2(x,v)$ senza assumere $\|x'(t)\|$ costante (segue dall'equazione)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial ds^2}{\partial v^k}(x(t),x'(t)) = \frac{\partial ds^2}{\partial x^k}(x(t),x'(t))\,,\ k = 1,\dots,m$$

Esempi: 1) $R^m \rightsquigarrow ds^2(x(t),v(t)) = \sum_i (v^i(t))^2$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\Big(2\frac{dx^k}{dt}\Big) = 0 \Leftrightarrow \frac{dx^k}{dt} = c_k \Leftrightarrow x^k = c_k t + d_k \quad \forall\, k$$

$\Rightarrow$ geodetiche = rette param. a velocità costante

2) $ds^2 = s(x)^2 ds^2_{\text{eucl.}}$ (metrica conformemente piatta)

$$\rightsquigarrow ds^2(x(t),v(t)) = s(x(t))^2\sum_i (v^i(t))^2$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\Big(2s^2\frac{dx^k}{dt}\Big) = 2s\frac{\partial s}{\partial x^k}\sum_i\Big(\frac{dx^i}{dt}\Big)^2$$

$$\rightsquigarrow \frac{d^2x^k}{dt^2} = \frac{1}{s}\sum_i\Big(\frac{\partial s}{\partial x^k}\Big(\frac{dx^i}{dt}\Big)^2 - 2\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\Big) \quad \forall\, k$$

3) $s(x)$ dipendente solo da $x^m$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x^k}{dt^2} = -\dfrac{2}{s}\dfrac{\partial s}{\partial x^m}\dfrac{dx^k}{dt}\dfrac{dx^m}{dt} & k < m \\[2ex] \dfrac{d^2x^m}{dt^2} = \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial s}{\partial x^m}\sum_i(-1)^{\delta_{im}}\Big(\dfrac{dx^i}{dt}\Big)^2 \end{cases}$$

4) $H^m \rightsquigarrow s(x) = 1/x^m$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x^k}{dt^2} = \dfrac{2}{x^m}\dfrac{dx^k}{dt}\dfrac{dx^m}{dt} & k < m \\[2ex] \dfrac{d^2x^m}{dt^2} = \dfrac{1}{x^m}\Big(\Big(\dfrac{dx^m}{dt}\Big)^2 - \Big(\dfrac{dx^1}{dt}\Big)^2 - \dots - \Big(\dfrac{dx^{m-1}}{dt}\Big)^2\Big) \end{cases}$$

5) $s(x)$ dipendente solo da $\rho^2 \Rightarrow \partial s/\partial x^i = 2x^i ds/d\rho^2$

$$\rightsquigarrow \frac{d^2x^k}{dt^2} = \frac{2}{s}\frac{ds}{d\rho^2}\sum_i\Big(x^k\Big(\frac{dx^i}{dt}\Big)^2 - 2x^i\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\Big) \quad \forall\, k$$

6) $S^m, D^m \rightsquigarrow s(\rho^2) = 2/(1 \pm \rho^2)$

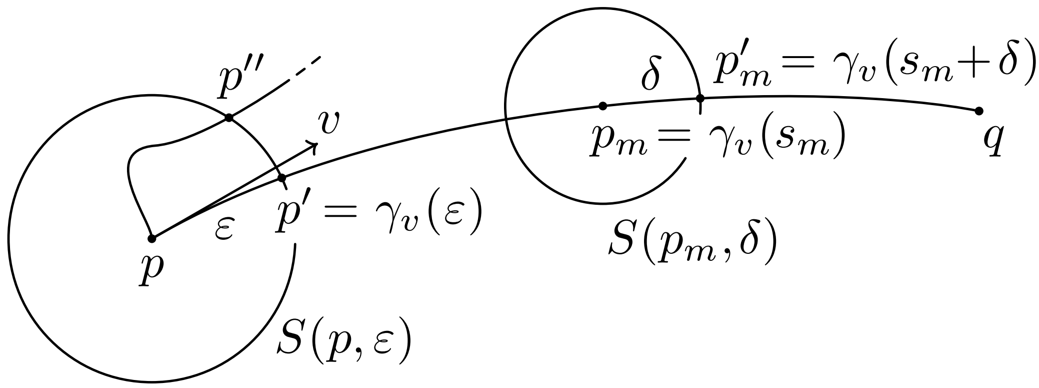
$$\rightsquigarrow \frac{d^2x^k}{dt^2} = \mp\frac{2}{1\pm\rho^2}\sum_i\Big(x^k\Big(\frac{dx^i}{dt}\Big)^2 - 2x^i\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\Big) \quad \forall\, k$$

$(M, g)$ varietà riemann. <u>geodeticamente completa</u>
$\overset{\text{def}}{\iff}$ ogni geodetica si può prolungare all'infinito nei due versi
$\iff I_v = R \;\; \forall\, v \in T_pM \;\; \forall\, p \in M \iff D_p = T_pM \;\; \forall\, p \in M$

<u>Esempi</u>: 1) $R^m$, $S^m$, $H^m$, $D^m$ geodeticamente completi
2) $B(0,1) \subset R^m$ e $R^m$ con la met. sferica non geod. compl.

<u>Prop</u>. $(M, g)$ varietà riemann. geodeticamente completa connessa
$\forall\, p, q \in M \;\exists\, C_{pq}$ arco geod. tra $p$ e $q$ t.c. $\mathrm{Lung}(C_{pq}) = d_g(p, q)$

<u>Dim</u>. $S(p,\varepsilon) = e_p(\varepsilon S^{m-1}) \cong S^{m-1}$ con $\varepsilon < \min\{\varepsilon_p, d_g(p,q)\}$
$\rightsquigarrow p' \in S(p,\varepsilon)$ tale che $d_g(p', q)$ minima in $S(p,\varepsilon)$
$\rightsquigarrow v \in T_pM$ unico versore t.c. $C_{pp'} = \gamma_v([0,\varepsilon])$




$T = \{s \in [0, d_g(p,q)] \mid d_g(\gamma_v(s), q) = d_g(p,q) - s\} \neq \varnothing$
$\rightsquigarrow s_m = \sup T = \max T$ ($T$ definito da un'equaz. continua)
$d_g(p', q) = d_g(p,q) - \varepsilon \Rightarrow [0,\varepsilon] \subset T \Rightarrow s_m \geq \varepsilon$
$(d_g(p,q) \leq d_g(p,p') + d_g(p',q) = \varepsilon + d_g(p',q)$
$C$ arco tra $p$ e $q \Rightarrow \mathrm{Lung}(C) \geq \varepsilon + d_g(p'',q) \geq \varepsilon + d_g(p',q))$
basta provare che $s_m = d_g(p,q)$ $(\rightsquigarrow C_{pq} = \gamma_v([0, s_m]))$

$s_m < d_g(p,q) \rightsquigarrow p_m = \gamma_v(s_m)$ t.c. $d_g(p_m,q) = d_g(p,q) - s_m$
$\rightsquigarrow \delta < \min\{\varepsilon_{p_m}, d_g(p,p_m), d_g(p_m,q)\}$
$\rightsquigarrow p'_m \in S(p_m,\delta)$ t.c. $d_g(p'_m,q)$ min. in $S(p_m,\delta)$
$\Rightarrow d_g(p'_m,q) = d_g(p_m,q) - \delta$ (come sopra per $p'$)
$\Rightarrow p'_m = \gamma_v(s_m+\delta)$
$(\mathrm{Lung}(C_{pp_m} \cup C_{p_m p'_m}) = s_m + \delta = d_g(p,q) - d_g(p'_m,q) \leq d_g(p,p'_m)$
$\Rightarrow C_{pp_m} \cup C_{p_m p'_m}$ arco geodetico $\Rightarrow C_{pp_m} \cup C_{p_m p'_m} = C_{pp'_m})$
$\Rightarrow d_g(p'_m,q) = d_g(p,q) - s_m - \delta \Rightarrow s_m + \delta \in T$ (assurdo)

<u>Teorema di Hopf-Rinow</u>
$(M,g)$ *varietà riemanniana connessa*
*geodeticamente completa* $\Leftrightarrow$ $(M,d_g)$ *spazio metrico completo*

<u>Dim</u>. $\Rightarrow)$ $M$ geodeticamente completa connessa
$\Rightarrow \mathrm{Cl}\, B_{d_g}(p,r) = e_p(\mathrm{Cl}\, B(0,r))$ (prop. precedente)
$\Rightarrow \mathrm{Cl}\, B_{d_g}(p,r)$ compatta $\forall\, p \in M$, $\forall\, r > 0$
$\Rightarrow (M,d_g)$ spazio metrico completo
$\Leftarrow)$ basta provare che $I_v$ è illimitato sup. $(I_{-v} = -I_v)$
per ogni $v \in T_pM$ versore $(I_{kv} = I_v/k\ \forall\, k > 0)$
$s = \sup I_v \in R \rightsquigarrow (s_n = s - 2^{-n})_{n \geq n_0} \subset I_v$
$\Rightarrow (q_n = \gamma_v(s_n))_{n\geq 1}$ succ. di Cauchy $\Rightarrow q_n \to q \in M$
$n \geq \bar{n} \Rightarrow q_n \in B_q \Rightarrow d_g(q_n,q_{n+1}) = 2^{-n-1}$
$d_g(q_n,q) = \lim_{m\to\infty} d_g(q_n,q_m) = 2^{-n}$
$\Rightarrow C_{q_n q_{n+1}} \cup C_{q_{n+1} q} = C_{q_n q} \subset C_w$ con $w \in T_qM$
versore t.c. $\gamma_v(t) = \gamma_w(t-s)\ \forall\, t \in [s_n, s_{n+1}]$
$\Rightarrow \gamma_v$ prolungabile oltre $s$ (ponendo $\gamma_v(t) = \gamma_w(t-s)$)

<u>Corol</u>. $(M,g)$ *varietà riemann. omogenea* $\Rightarrow$ *geod. completa*

<u>Dim</u>. omogeneità $\rightsquigarrow \varepsilon_p = \varepsilon$ indipendente da $p \in M$
$\Rightarrow \mathrm{Cl}\, B_{d_g}(p,\delta)$ compatta $\forall\, p \in M\ \forall\, \delta \leq \varepsilon$
$\Rightarrow (M,d_g)$ spazio metrico completo

<u>Corol</u>. $(M,g)$ *varietà riemann. compatta* $\Rightarrow$ *geod. completa*

<u>Dim</u>. $M$ spazio top. compatto $\Rightarrow (M,d_g)$ spazio met. completo

Corol. $M = (M, g)$ varietà riemann. geod. completa
$N \subset M$ sottovar. riemann. chiusa $\not\Longleftarrow\!\!\Rightarrow$ geod. completa

Dim. $(M, d_g)$ spazio met. compl. $\Rightarrow$ $(N, d_{g_{|N}})$ spazio met. compl.
($(p_n)_{n\geq 1}$ successione di Cauchy in $(N, d_{g_{|N}})$
$\Rightarrow$ $(p_n)_{n\geq 1}$ succ. di Cauchy in $(M, d_g)$ poiché $d_g \leq d_{g_{|N}}$
$\Rightarrow$ $p_n \to p \in M$ $\Rightarrow$ $p_n \to p \in N$ poiché $N \subset M$ chiuso)
$N = \{(x, \sin 1/(1-x^2)) \mid |x| < 1\} \subset R^2$
sottovar. riemann. geod. completa non chiusa

Nota: $C = (C, g)$ curva riemanniana connessa di ($\dim C = 1$)

$$\Rightarrow C \cong \begin{cases} R\,,\ \frac{\ell}{2\pi} S^1 & \text{(se completa)} \\ ]0, \infty[\ ,\ ]0, \ell[ & \text{(se non completa)} \end{cases}$$