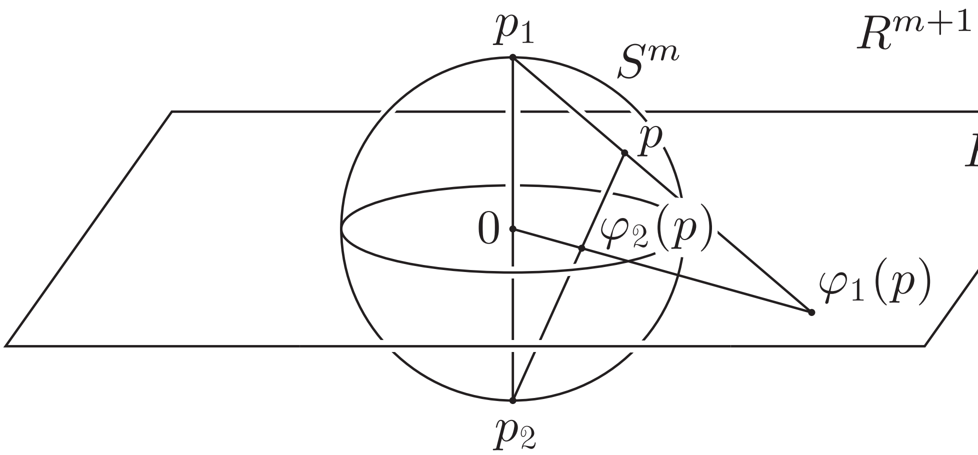
Varietà topologiche

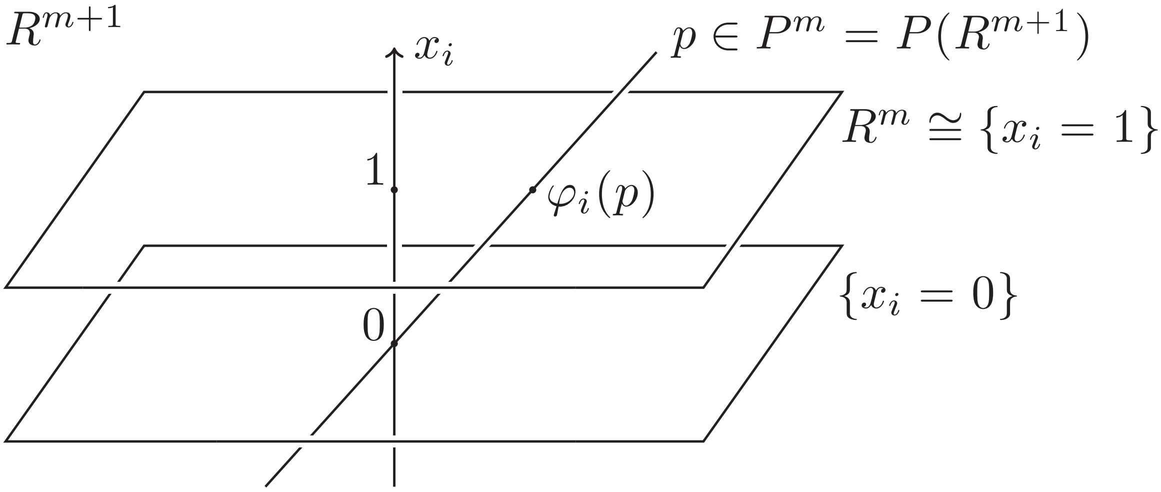
M varietà topologica di dim m (m-varietà topologica)
$\overset{\text{def}}{\iff}$ M spazio top. T_2, II numerabile e localmente euclideo
($\forall\, p \in M \;\exists\, A \subset M$ intorno aperto di p
$\exists\, \varphi : A \to \varphi(A)$ omeo con $\varphi(A)$ aperto in R^m)

Note: 1) (A, φ) carta locale di M
$\rightsquigarrow (x_1, \dots, x_m)$ coordinate locali su $A \subset M$
2) $\forall\, p \in M \;\exists\, (A, \varphi)$ carta locale speciale intorno a p
tale che: $\varphi(p) = 0$, $\varphi(A) = R^m$, $\mathrm{Cl}\, A \subset M$ compatta
3) M localmente euclideo $\Leftrightarrow M = \cup_{n \geq 1} A_n$
con (A_n, φ_n) carta locale (speciale) $\forall\, n \geq 1$
($\mathcal{A} = \{(A_n, \varphi_n)\}_{n \geq 1}$ atlante (speciale) di M)

Esempi: 1) $M =$ aperto in $R^m \rightsquigarrow \mathcal{A} = \{(M, \mathrm{id}_M)\}$
2) $S^m \subset R^{m+1} \rightsquigarrow \mathcal{A} = \{(A_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ carte stereografiche
($A_i = S^m - \{p_i\}$, $\varphi_i : A_i \to R^m$ proiezione stereografica
definita $\varphi_i(x_1, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, x_m)/(1 \pm x_{m+1})$)



3) $T^m \rightsquigarrow \mathcal{A} = \{$inverse locali di $\pi : R^m \to T^m\}$
4) $P^m = P(R^{m+1}) \rightsquigarrow \mathcal{A} = \{(A_i, \varphi_i)\}_{i=1,\dots,m+1}$ carte affini
($A_i = \{[x_1, \dots, x_{m+1}] \in P^m \mid x_i \neq 0\}$, $\varphi_i : A_i \to R^m$
definita $\varphi_i([x_1, \dots, x_{m+1}]) = (x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{m+1})/x_i$)



Note: 1) M m-varietà top., $N \subset M$ aperto $\Rightarrow N$ m-varietà top.
$(\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}_{|N} = \{(A \cap N, \varphi_{|A\cap N}) \mid (A, \varphi) \in \mathcal{A}\})$

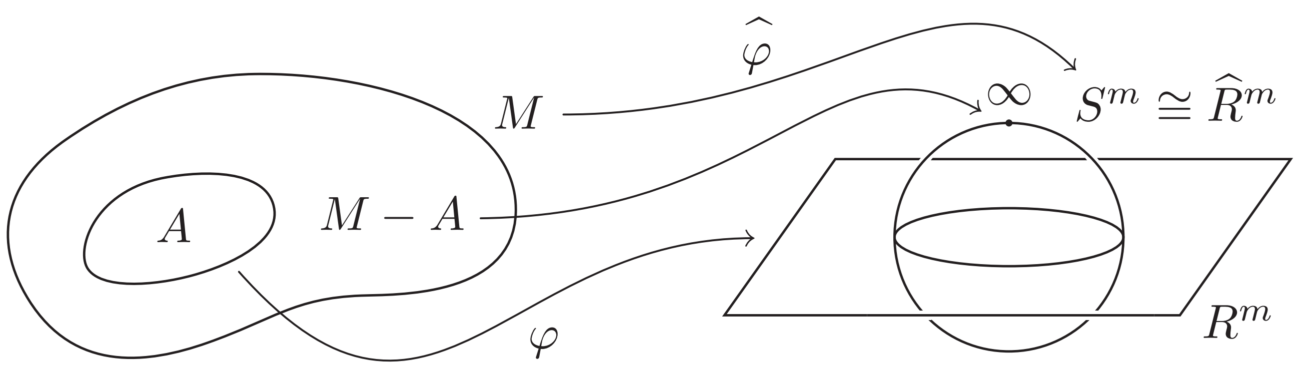
2) M_i m-varietà top. $\forall\, i \Rightarrow M_1 \sqcup \ldots \sqcup M_n$ m-varietà top.
$(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rightsquigarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n)$

3) M_i m_i-varietà top. $\forall\, i \Rightarrow M_1 \times \ldots \times M_n$ $\Sigma_i m_i$-varietà top.
$(\mathcal{A}_i \rightsquigarrow \mathcal{A} = \{(A_1 \times \ldots \times A_n, \varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n) \mid (A_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_i\})$

4) M m-var. top., $p: M \to N$ rivest. finito $\Rightarrow N$ m-var. top.
$(\mathcal{A}_M \rightsquigarrow \mathcal{A}_N = \{(B, \psi = \varphi \circ (p_|)^{-1}) \mid (A_i, \varphi) \in \mathcal{A}_M)\})$

5) M m-var. top., $p: N \to M$ rivest. numer. $\Rightarrow N$ m-var. top.
$(\mathcal{A}_M \rightsquigarrow \mathcal{A}_N = \{(A_i, \psi = p_| \circ \varphi) \mid (B, \varphi) \in \mathcal{A}_M)\})$

M m-varietà topologica, (A, φ) carta locale speciale
$\rightsquigarrow \widehat{\varphi} : M \to S^m \cong \widehat{R}^m$ continua t.c. $\widehat{\varphi}_{|A} = \varphi$ e $\widehat{\varphi}(M - A) = \infty$



Prop. M m-varietà top. compatta (vale per ogni varietà top.)
$\Rightarrow \exists\, M \hookrightarrow R^n$ immersione con $n \geq m$

Dim. $\mathcal{A} = \{(A_1, \varphi_1), \ldots, (A_k, \varphi_k)\}$ atlante speciale finito $\rightsquigarrow$
$\widehat{\varphi}_1 \times \ldots \times \widehat{\varphi}_k : M \to S^m \times \ldots \times S^m \subset R^{(m+1)k}$ immersione

Prop. M m-varietà topologica $\Rightarrow$ M metrizzabile

Dim. $\mathcal{A} = \{(A_n, \varphi_n)\}_{n\geq 1}$ atlante speciale numerabile
$\rightsquigarrow d(p,q) = \Sigma_n d(\widehat{\varphi}_n(p), \widehat{\varphi}_n(q))/2^n$ metrica per M
(d continua $\Rightarrow B(p,\varepsilon) \subset M$ aperto $\forall\, p \in M$ $\forall\, \varepsilon > 0$
$p \in A \subset M \Rightarrow \exists\, n\ \exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $B(\widehat{\varphi}_n(p), 2^n\varepsilon) \subset \widehat{\varphi}_n(A \cap A_n)$
$\Rightarrow B(p,\varepsilon) \subset A$ $(d(p,q) < \varepsilon \Rightarrow d(\widehat{\varphi}_n(p), \widehat{\varphi}_n(q)) < 2^n\varepsilon)$

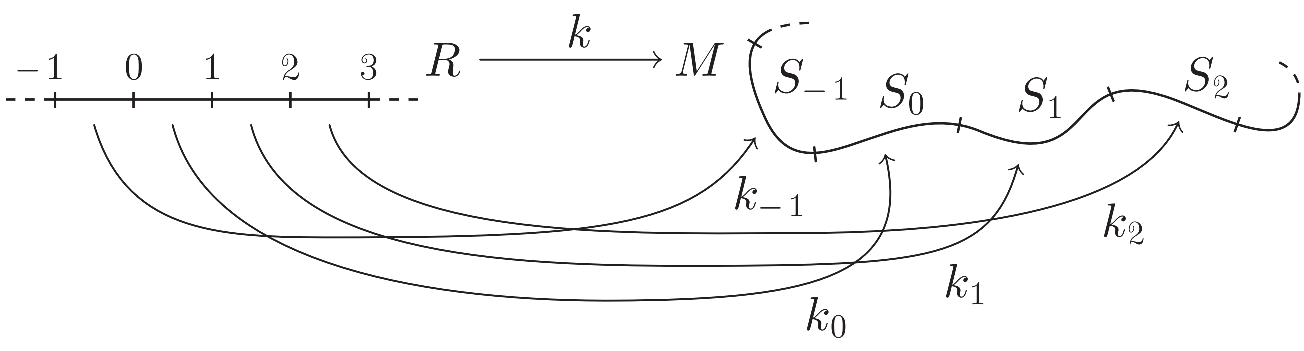
Classificazione delle 1-varietà top. (curve topologiche)

Lemma. M curva topologica $\Rightarrow$
$\exists\, \mathcal{S} = \{S_n\}_{n\geq 1}$ ric. num. loc. finito di M (segmentazione)
t.c. 1) S_n "segmento" $\forall\, n$ ($\exists\, h_n : [0,1] \to S_n$ omeo)
2) $S_{n_1} \cap S_{n_2} = \varnothing$ o "estremo" comune $\forall\, n_1 \neq n_2$

Dim. $\mathcal{A} = \{(A_n, \varphi_n)\}_{n\geq 1}$ atlante speciale numerabile
tale che $M = \cup_{n\geq 1} C_n$ con $C_n = \varphi_n^{-1}([-1,1])$
$\rightsquigarrow \{S_n\}_{n\geq 1}$ t.c. 1), 2) e 3) $C_1 \cup \ldots \cup C_n \subset S_1 \cup \ldots \cup S_{m_n}$
(induzione a partire da $m_1 = 1$ e $S_1 = C_1$
$S_1, \ldots, S_{m_{n-1}} \rightsquigarrow S_{m_{n-1}+1}, \ldots, S_{m_n}$
$= \mathrm{Cl}_{C_n}$componenti connesse
di $C_n - (S_1 \cup \ldots \cup S_{m_{n-1}})$)

Prop. M curva topologica connessa $\Leftrightarrow$ $M \cong R^1$ o S^1

Dim. ogni "vertice" di $\mathcal{S}$ è estremo di due "segmenti"
$\rightsquigarrow \mathcal{S} = \{S_{n_i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ rinumerazione t.c. $S_{n_i} \cap S_{n_{i+1}} \neq \varnothing$
$k_i : [i, i+1] \to S_{n_i}$ omeo t.c. $k_i(i+1) = k_{i+1}(i)$
$\rightsquigarrow k = \cup_i k_i : R \to M$ omeomorfismo se M non compatto
rivestimento se M compatto

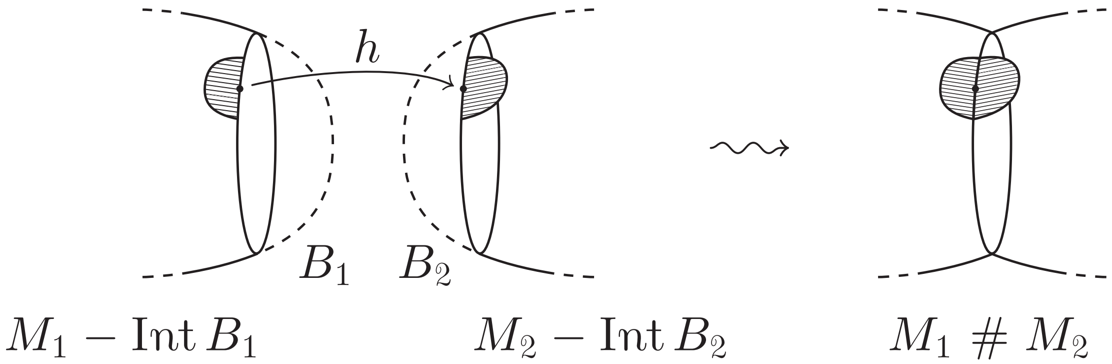


Classificazione delle 2-varietà top. (superfici topologiche)

M_1, M_2 superfici topologiche connesse

$\rightsquigarrow M_1 \# M_2 \overset{\text{def}}{=\!=} (M_1 - \operatorname{Int} B_1) \sqcup (M_2 - \operatorname{Int} B_2)/p \sim h(p)$

con $B_1, B_2 \cong B^2$ e $h : \operatorname{Fr} B_1 \to \operatorname{Fr} B_2$ omeo



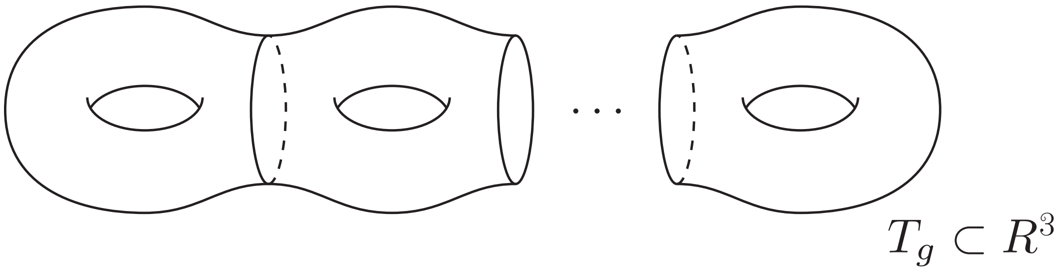
Note: 1) $M_1 \# M_2$ è una sup. top. connessa (somma connessa)

t. di Schönflies $\Rightarrow M_1 \# M_2$ ben definita a meno di omeo

2) $\#$ commutativa e associativa, S^2 = elemento neutro

Esempi: $T_g \overset{\text{def}}{=\!=} T^2 \# \ldots \# T^2$ sup. orientabile di genere g (≥ 0)

$P_g \overset{\text{def}}{=\!=} P^2 \# \ldots \# P^2$ sup. non orient. di genere g (≥ 1)



Lemma. M superficie topologica $\Rightarrow$

$\exists\, \mathcal{P} = \{P_n\}_{n \geq 1}$ ric. num. loc. finito di M (poligonazione)

t.c. 1) P_n "poligono" $\forall\, n$ ($\exists\, h_n : D_n \to P_n$ omeo con

$D_n \subset R^2$ poligono convesso)

2) $P_{n_1} \cap P_{n_2} = \varnothing$ o "vertice" o "lato" $\forall\, n_1 \neq n_2$

Lemma. M superficie topologica connessa compatta

$\Leftrightarrow M \cong D/\!\sim$ con $D \subset R^2$ poligono convesso e $\sim$ relazione d'equiv. che identif. i lati di D a coppie

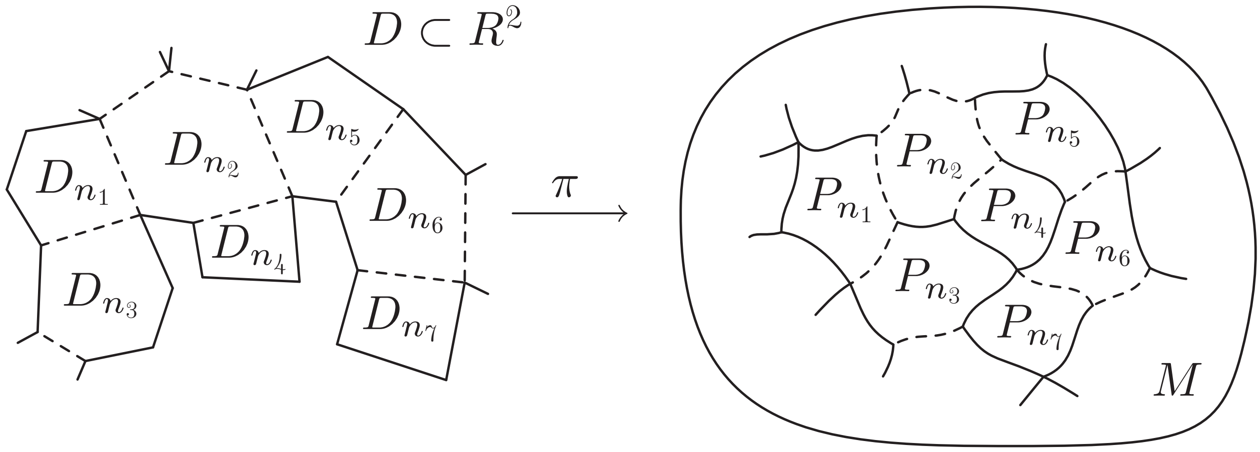
<u>Dim</u>. $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ poligonazione finita di M

ogni "segmento" di $\mathcal{P}$ è "lato" di due "poligoni"

$\rightsquigarrow \mathcal{P} = \{P_{n_1}, \ldots, P_{n_k}\}$ rinumerazione t.c.

$P_{n_i} \cap (P_{n_1} \cup \ldots \cup P_{n_{i-1}}) \supset S_i =$ "lato" $\leftrightsquigarrow L_i \subset D_{n_i}$

$\rightsquigarrow D \cong D_{n_1} \sqcup_{L_2} D_{n_2} \sqcup_{L_3} D_{n_3} \sqcup_{L_4} \ldots \sqcup_{L_k} D_{n_k}$

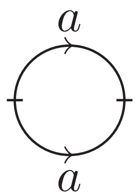


<u>Prop</u>. M superficie topologica connessa compatta

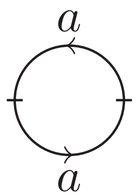
$\Leftrightarrow M \cong T_g$ con $g \geq 0$ o $M \cong P_g$ con $g \geq 1$

<u>Dim</u>. $M \cong D/\!\sim$ + induz. su $n = \#$ "lati" di $D \Rightarrow M \cong T_g \# P_{g'}$

$n = 2)$

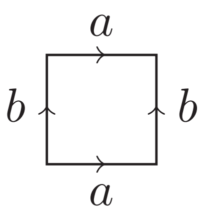


$\cong S^2 (\cong T_0)$



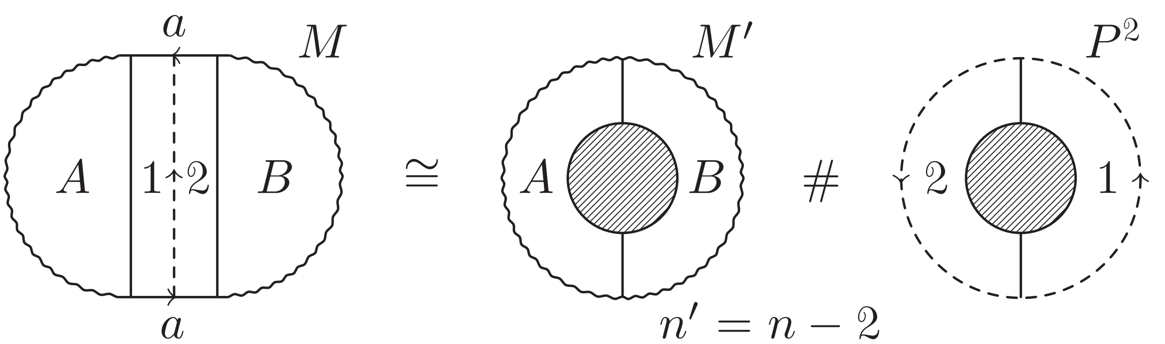
$\cong P^2 (\cong P_1)$

$n = 4)$

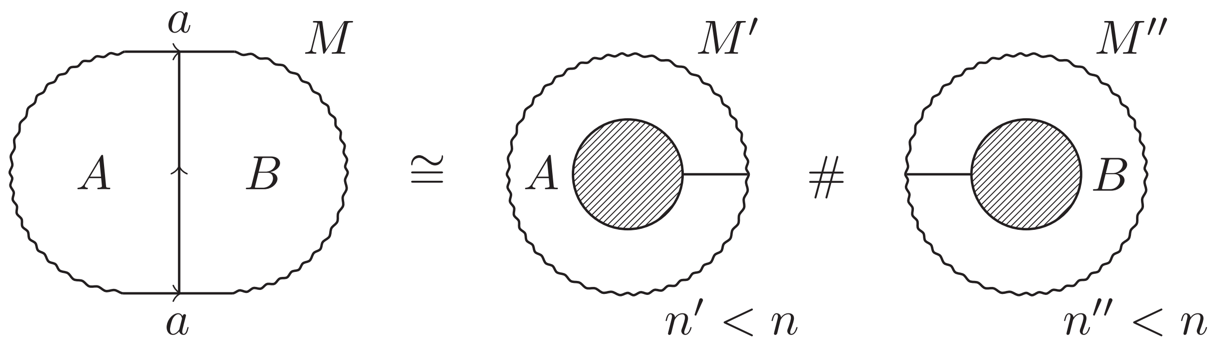


$\cong T^2 (\cong T_1)$ (gli altri casi sono in $n \geq 4$)

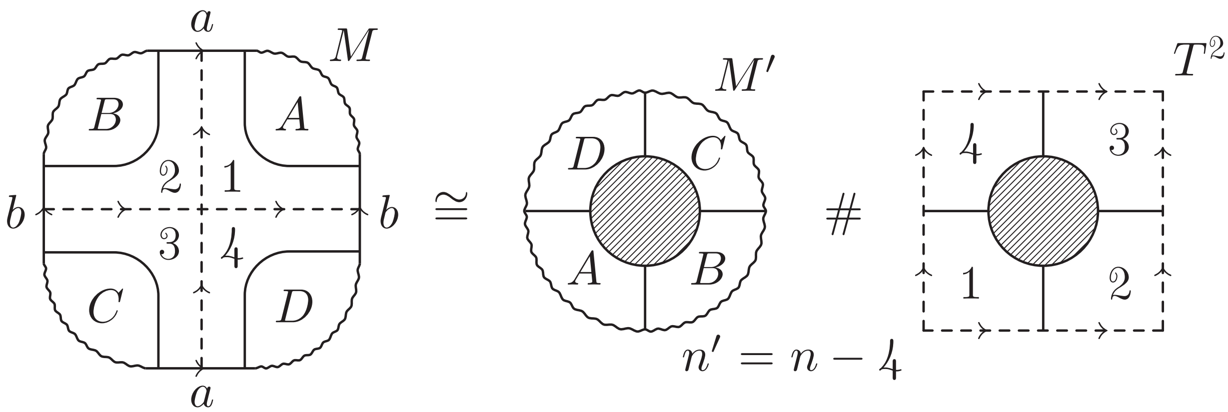
$n \geq 4)$ I caso: $\exists$ lati che si identificano con orient. concordi



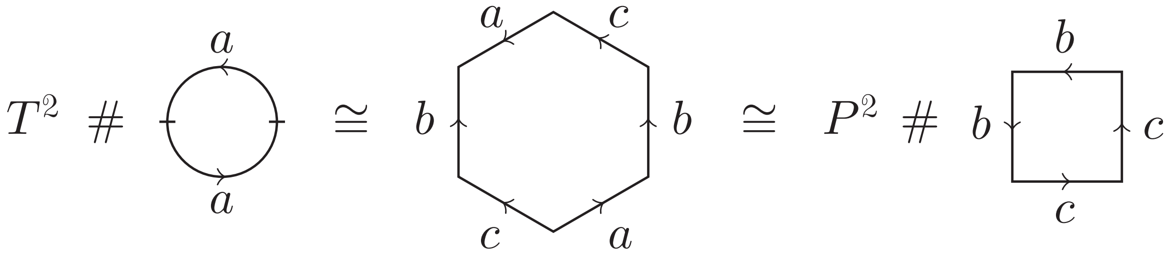
II caso: lati in A non si identificano con lati in B



III caso:

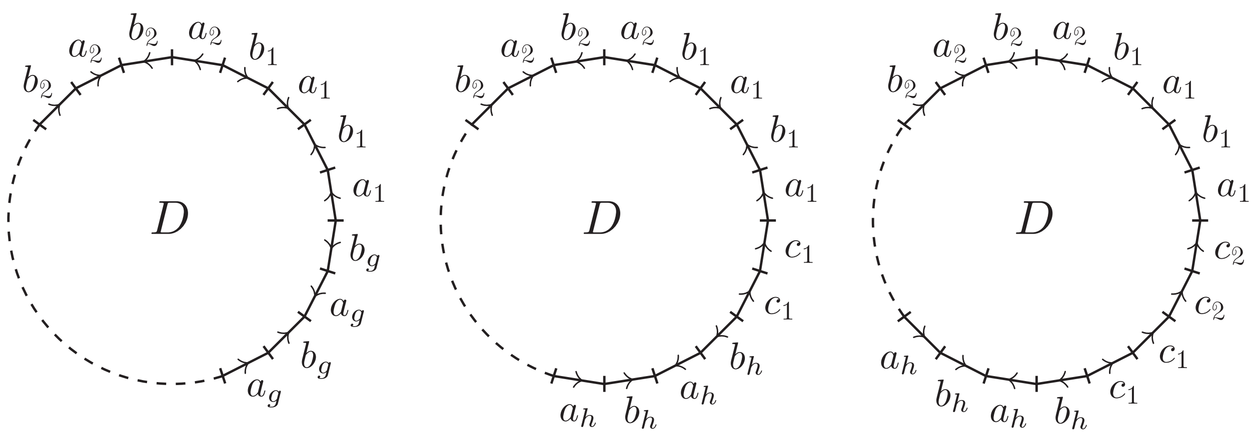


Resta da provare che: $T^2 \# P^2 \cong P^2 \# P^2 \# P^2$



Nota: dim. $\rightsquigarrow$ rappresentazione canonica delle superfici

$$P_g \cong \begin{cases} T_h \# P^2 \text{ con } h = (g-1)/2 \text{ se } g \text{ dispari} \\ T_h \# P^2 \# P^2 \text{ con } h = (g-2)/2 \text{ se } g \text{ pari} \end{cases}$$



T_g $\qquad$ P_g con g disp. $\qquad$ P_g con g pari

Prop. $\pi_1(T_g) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2]...[a_g, b_g] \rangle$

$$\pi_1(P_g) \cong \begin{cases} \langle a_1, b_1, ..., a_h, b_h, c_1 \mid [a_1, b_1]...[a_g, b_g]c_1^2 \rangle & \text{se } g \text{ dispari} \\ \langle a_1, b_1, ..., a_h, b_h, c_1, c_2 \mid [a_1, b_1]...[a_g, b_g]c_1^2 c_2^2 \rangle & \text{se } g \text{ pari} \end{cases}$$

$H_1(T_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}\ \forall g \geq 0$ e $H_1(P_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2\ \forall g \geq 1$

Dim. applicazione del teorema di Seifert-Van Kampen
con: $X_1 = (\mathrm{Int}\, D)/\sim\ \cong \mathrm{Int}\, D$ semplicemente connesso
$X_2 = (D - \{p\})/\sim\ \simeq (\mathrm{Fr}\, D)/\sim\ \cong \vee_n S^1$ e $X_1 \cap X_2 \simeq S^1$

Prop. Le superfici T_g con $g \geq 0$ e P_g con $g \geq 1$
sono a due a due non omeomorfe

Dim. gli H_1 sono a due a due non isomorfi

Nota: in questo caso passando da π_1 ad H_1 si conservano
abbastanza informazioni per distinguere le superfici

M superficie topologica compatta, $\mathcal{P}$ poligonazione di M
$\chi(M) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \#\{\text{poligoni di } \mathcal{P}\} - \#\{\text{lati di } \mathcal{P}\} + \#\{\text{vertici di } \mathcal{P}\}$
caratteristica di Eulero-Poincaré di M

Note: 1) $\chi(M)$ è ben definita, cioè non dipende da $\mathcal{P}$
($\mathcal{P}'$ suddivisione di $\mathcal{P} \Rightarrow \chi_{\mathcal{P}'}(M) = \chi_{\mathcal{P}}(M)$,
$\forall \mathcal{P}\ \exists \mathcal{P}'$ suddivisione comune a $\mathcal{P}''$
t.c. $\mathcal{P}'' \rightsquigarrow$ rappresentazione canonica)
2) $\chi(S^2) = 2,\ \chi(P^2) = 1,\ \chi(T^2) = 0$
3) $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$
$\hookrightarrow \chi(T_g) = 2 - 2g\ \ \forall g \geq 0$ e $\chi(P_g) = 2 - g\ \ \forall g \geq 1$
4) $\chi(M)$ è invariante per omeo, quindi distingue tra loro
le superfici orientabili e le superfici non orientabili
(M orientabile $\Rightarrow \exists M \hookrightarrow R^3 \Rightarrow \nexists\ \mathrm{Mb} \hookrightarrow M$
M non orientabile $\Rightarrow M \cong M' \# P^2 \Rightarrow \exists\ \mathrm{Mb} \hookrightarrow M$)

Conclusione: M, M' superfici topologiche connesse compatte
$M \cong M' \Leftrightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(M') \Leftrightarrow H_1(M) \cong H_1(M')$
$\Leftrightarrow \chi(M) = \chi(M')$ e M, M' orien./non orien.