Superfici regolari nello spazio

$S \subset R^3$ superficie (differenziabile) regolare

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall\, p \in S\ \exists \omega : D \to R^3$ con $D \subset R^2$ aperto (connesso)

e $\omega(D)$ intorno aperto di p in S

parametrizzazione locale regolare

t.c. 1) ω immersione topologica ($\Rightarrow \omega(D) \cong D$)

2) $\exists$ continue in D tutte le derivate parziali

$\partial^k\omega/\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}\ \forall\, k \geq 0$ (ω differenziabile)

3) $X_1 = \partial\omega/\partial u_1$ e $X_2 = \partial\omega/\partial u_2$ linearm. indipendenti

$$\text{cioè rg}\begin{pmatrix} \partial x/\partial u_1 & \partial x/\partial u_2 \\ \partial y/\partial u_1 & \partial y/\partial u_2 \\ \partial z/\partial u_1 & \partial z/\partial u_2 \end{pmatrix} = 2 \quad (\omega \text{ regolare})$$

Note: 1) X_1 e X_2 dipendono dalla parametrizzazione ω

e in generale non esistono ortonormali né unitari

(non esiste una parametrizzazione "naturale")

2) $S \subset R^3$ superficie regolare $\Leftrightarrow S$ superficie top. "liscia"

$\exists$ piano tangente a S in p, $\forall\, p = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \omega(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in S$

3) $\omega(u_1, u_2) = p + X_1(\bar{u})(u_1 - \bar{u}_1) + X_2(\bar{u})(u_2 - \bar{u}_2) + \varepsilon(u - \bar{u})$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = \bar{x} + \partial x/\partial u_1|_{u=\bar{u}}(u_1 - \bar{u}_1) + \partial x/\partial u_2|_{u=\bar{u}}(u_2 - \bar{u}_2) \\ y = \bar{y} + \partial y/\partial u_1|_{u=\bar{u}}(u_1 - \bar{u}_1) + \partial y/\partial u_2|_{u=\bar{u}}(u_2 - \bar{u}_2) \\ z = \bar{z} + \partial z/\partial u_1|_{u=\bar{u}}(u_1 - \bar{u}_1) + \partial z/\partial u_2|_{u=\bar{u}}(u_2 - \bar{u}_2) \end{cases}$$

(equazione parametrica piano tangente a S in p)

Prop. $S \subset R^3$ superficie regolare

$\iff \forall\, p \in S\ \exists\, A \subset R^3$ intorno aperto di p tale che

$S \cap A = \{(x, y, z) \in A \mid E(x, y, z) = 0\}$ con $E : A \to R$

t.c. 1) E ha tutte le deriv. parz. cont. (E differenziabile)

2) $\nabla E = (\partial E/\partial x, \partial E/\partial y, \partial E/\partial z) \neq 0$ (E regolare)

($E(x, y, z) = 0$ equazione cartesiana locale regolare)

Dim. $\Rightarrow$) $\omega : D \to R^3$ parametriz. locale regolare t.c. $p = \omega(\bar{u})$

$\Omega = (X_1(\bar{u}), X_2(\bar{u}))$ (matrice delle derivate parziali di ω)

$\det \Omega_{xy} \neq 0$ in p ($\det \Omega_{xz} \neq 0$ e $\det \Omega_{yz} \neq 0$ sono analoghi)
$\rightsquigarrow u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$ funzioni differenziabili tali che
$z - z(u_1(x,y), u_2(x,y)) = 0$ equaz. cart. locale regolare
$\Leftarrow$) $\partial E/\partial z \neq 0$ in p ($\partial E/\partial x \neq 0$ e $\partial E/\partial y \neq 0$ sono analoghi)
$\rightsquigarrow \varphi : D \to R$ differenziabile tale che
$\{(x, y, \varphi(x,y))\}$ intorno aperto di p in S
$\rightsquigarrow \omega(u_1, u_2) = (u_1, u_2, \varphi(u_1, u_2))$ param. locale regolare

<u>Note</u>: 1) $\omega : D \to R^3$ parametrizzazione locale regolare
$\Rightarrow (E \circ \omega)(u_1, u_2) = E(x(u_1,u_2), y(u_1,u_2), z(u_1,u_2)) = 0$
$\Rightarrow \partial(E \circ \omega)/\partial u_i = \nabla E(u_1,u_2) \cdot X_i(u_1,u_2) = 0$ per $i = 1, 2$
$\Rightarrow \nabla E(\omega(u_1,u_2))$ vettore normale a S in $p = \omega(u_1,u_2)$
2) $p = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \rightsquigarrow \nabla E(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot (x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z}) = 0$
(equaz. cart. piano tangente a S in p)
3) $S \subset R^3$ superficie regolare $\Leftrightarrow$ loc. grafico di funz. diff.

$S \subset R^3$ superficie regolare

$f : S \to R^n$ funzione <u>differenziabile</u> in $p \in S$
$\overset{\text{def}}{\iff} f \circ \omega : D \to R^n$ diff. $\forall\, \omega : D \to R^3$ param. loc. reg. di S int. a p
(non dipende da $\omega \Rightarrow$ basta che $\exists\, \omega$ t.c. $f \circ \omega : D \to R^n$ diff.)

$f : S \to R^n$ funzione <u>differenziabile</u> $\overset{\text{def}}{\iff} f$ diff. in p per ogni $p \in S$

$V \in T_pS \rightsquigarrow V = v_1\, X_1(p) + v_2\, X_2(p)$ con $v_1, v_2 \in R$ comp. di v
$\rightsquigarrow \partial f/\partial V = v_1\, \partial(f \circ \omega)/\partial u_1 + v_2\, \partial(f \circ \omega)/\partial u_2$
$\partial/\partial V$ <u>derivata direzionale</u> di $f : S \to R^n$ funz. diff.

<u>Note</u>: 1) $\partial f/\partial V$ ben definita (non dipende da ω)

2) $\dfrac{\partial f}{\partial(a\,V + b\,W)} = a\,\dfrac{\partial f}{\partial V} + b\,\dfrac{\partial f}{\partial W} \quad \forall\, a, b \in R \ \ \forall\, V, W \in T_pS$

3) $\dfrac{\partial(a\,f + b\,g)}{\partial V} = a\,\dfrac{\partial f}{\partial V} + b\,\dfrac{\partial g}{\partial V} \quad \forall\, a, b \in R \ \ \forall\, f, g : S \to R^n$

4) $\dfrac{\partial(f \cdot g)}{\partial V} = \dfrac{\partial f}{\partial V} \cdot g(p) + f(p) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial V} \quad \forall\, a, b \in R \ \ \forall\, f, g : S \to R^n$

$S \subset R^3$ superficie regolare <u>orientata</u> (con verso per gli angoli)

$\omega : D \to R^3$ parametriz. locale regolare (con l'orientazione data)

$p = \omega(u) \rightsquigarrow X_1(u) = \partial\omega/\partial u_1 = (\partial x/\partial u_1, \partial y/\partial u_1, \partial z/\partial u_1)$

$X_2(u) = \partial\omega/\partial u_2 = (\partial x/\partial u_2, \partial y/\partial u_2, \partial z/\partial u_2)$

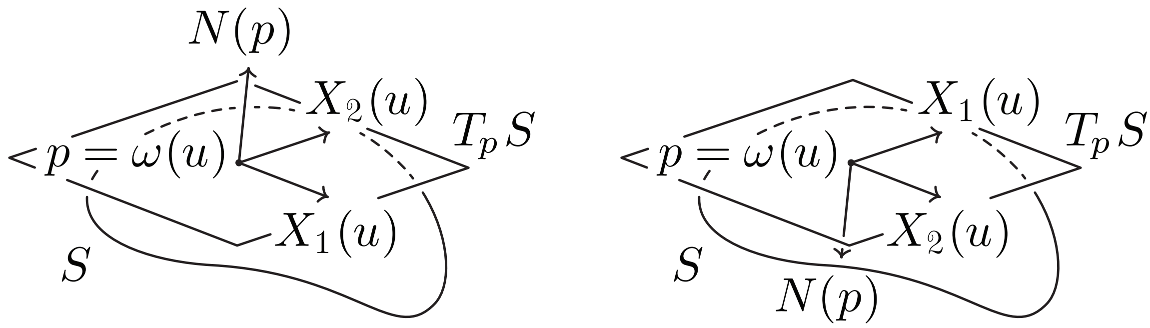
vettori (lin. indip.) applicati in p tangenti a S

$\rightsquigarrow T_pS = \langle X_1(u), X_2(u)\rangle$ spazio vett. appl. in p tang. a S

<u>piano tangente</u> a S in p

$N(p) = X_1(u) \times X_2(u)/\|X_1(u) \times X_2(u)\|$

<u>versore normale</u> a S in p



<u>Note</u>: 1) T_pS univocamente determinato (non dipende da ω)

2) $N(p)$ univocamente determinato (non dipende da ω) orientazione opposta $\rightsquigarrow$ versore normale $N(p)$ opposto

3) $S = \omega(D) \Rightarrow \operatorname{Area} S = \int_D \|X_1(u) \times X_2(u)\|\, du_1 du_2$

<u>Operatore forma e curvature</u>

$S \subset R^3$ superficie regolare orientata

$p \in S \rightsquigarrow L_p : T_pS \to T_pS$ <u>operatore forma</u> di S in p

definito $L_p(V) = -\partial N/\partial V \quad \forall\, V \in T_pS$

<u>Note</u>: 1) L_p ben definito come applicazione, cioè $L_p(V) \in T_pS$

$(N \cdot N = \|N\| = 1 \Rightarrow \partial N/\partial V \cdot N(p) = 0 \Rightarrow L_p(V) \perp N(p))$

2) $L_p \in \operatorname{End} T_pS$, cioè L_p lineare (segue dalla nota 3 sopra)

3) orientazione opposta su $S \rightsquigarrow$ operatore forma L_p opposto

$p \in S \rightsquigarrow K(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \det L_p \longleftarrow$ <u>curvatura di Gauss</u> di S in p

$H(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \dfrac{1}{2} \operatorname{tr} L_p \longleftarrow$ <u>curvatura media</u> di S in p

<u>Note</u>: 1) $K(p)$ indipendente dall'orientazione di S
$H(p)$ dipende dall'orientazione di S (solo per il segno)
2) $K, H : S \to R$ funzioni differenziabili

<u>Prop</u>. $S \subset R^3$ superficie regolare orientata, $p \in S$
$\Rightarrow L_p$ operatore simmetrico su T_pS

<u>Dim</u>. $\omega : D \to R^3$ param. locale regolare di S intorno a p
$\rightsquigarrow \{X_1 = \partial\omega/\partial u_1, X_2 = \partial\omega/\partial u_2\}$ base di T_pS
$N \cdot X_j = 0 \Rightarrow \partial N/\partial X_i \cdot X_j + N \cdot \partial X_j/\partial X_i = 0$
$\Rightarrow L_p(X_i) \cdot X_j = N \cdot \partial^2\omega/\partial u_j \partial u_i$
$N \cdot X_i = 0 \Rightarrow \partial N/\partial X_j \cdot X_i + N \cdot \partial X_i/\partial X_j = 0$
$\Rightarrow L_p(X_j) \cdot X_i = N \cdot \partial^2\omega/\partial u_i \partial u_j$
$\Rightarrow L_p(X_i) \cdot X_j = X_i \cdot L_p(X_j)$ $(\partial^2\omega/\partial u_j \partial u_i = \partial^2\omega/\partial u_i \partial u_j)$
$\Rightarrow L_p(V) \cdot W = V \cdot L_p(W)$ $\forall\, V, W \in T_pS$ (L_p simmetrico)

Teorema spettrale $\rightsquigarrow \{T_1(p), T_2(p)\}$ base ortonomale di T_pS
di autovettori per L_p

$M_{(T_1,T_2)}L_p = \begin{pmatrix} \kappa_1(p) & 0 \\ 0 & \kappa_2(p) \end{pmatrix}$ con $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ autovalori di L_p

$p \in S \rightsquigarrow \kappa_1(p), \kappa_2(p) \longleftarrow$ <u>curvature principali</u> di S in p
$T_1(p), T_2(p) \longleftarrow$ <u>direzioni principali</u> di S in p

<u>Note</u>: 1) $K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)$ e $H(p) = (\kappa_1(p) + \kappa_2(p))/2$
$\Rightarrow \kappa_i(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$
$\rightsquigarrow \kappa_1, \kappa_2 : S \to R$ funzioni continue, diff.. in $\{\kappa_1 \neq \kappa_2\}$
orientazione opposta su $S \rightsquigarrow$ curv. princ. $\kappa_i(p)$ opposte
2) $\kappa_1(p) \neq \kappa_2(p) \Rightarrow T_1(p), T_2(p)$ univocamente determinati
a meno del segno e dell'ordine
$\rightsquigarrow T_1, T_2 : S - \{\kappa_1 = \kappa_2\} \to R^3$ funzioni diff.
3) <u>linea di curvatura</u> di $S \overset{\text{def}}{=\!=} C \subset S$ curva regolare
t.c. $T(p)$ vers. tang. a C in p coincide con $T_i(p)$ $\forall\, p \in S$
$(\kappa_1(p) \neq \kappa_2(p) \Rightarrow \exists\,!$ due linee di curvatura di S per $p)$

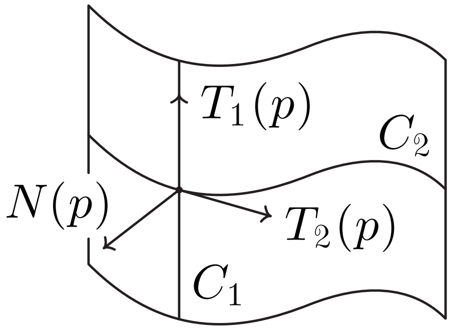
<u>Esempi</u>: 1) S superficie piana $\Rightarrow N$ cost. $\Rightarrow L = 0$ ($\Leftrightarrow K = H = 0$)

S superficie connessa, $L = 0 \Rightarrow N$ cost. $\Rightarrow S$ piana

(N cost. $\Rightarrow \partial(N \cdot X)/\partial V = \partial N/\partial V \cdot X + N \cdot \partial X/\partial V = 0$

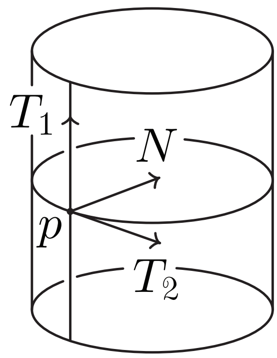
$\Rightarrow N \cdot X =$ cost. con $X \in S$ vettore posizione)

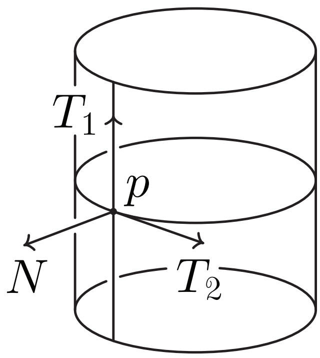
2) S = superficie cilindrica (localmente euclidea)



$\kappa_1(p) = 0\,, \kappa_2(p) = \pm\kappa_{C_2}(p)$

$K(p) = 0\,, H(p) = \pm\kappa_{C_2}(p)/2$

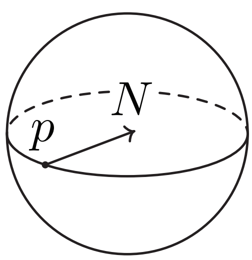


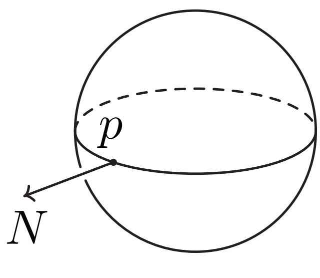


$\kappa_1 = 0\,, \kappa_2 = 1/r$ $\qquad$ $\kappa_1 = 0\,, \kappa_2 = -1/r$

$K = 0\,, H = 1/2r$ $\qquad$ $K = 0\,, H = -1/2r$

3) S = superficie sferica (non localmente euclidea)





$\kappa_1 = \kappa_2 = 1/r$ $\qquad$ $\kappa_1 = \kappa_2 = -1/r$

$K = 1/r^2\,, H = 1/r$ $\qquad$ $K = 1/r^2\,, H = -1/r$

$p \in S \rightsquigarrow g_p : T_pS \times T_pS \to R$ definita $g_p(V, W) = V \cdot W$

<u>prima forma fondamentale</u> di S in p

$\ell_p : T_pS \times T_pS \to R$ definita $\ell_p(V, W) = L_p(V) \cdot W$

<u>seconda forma fondamentale</u> di S in p

Note: 1) g_p = prodotto scalare ristretto a T_pS (intrinseco)

ℓ_p = forma bilin. simm., dipende da $S \subset R^3$ (non intrins.)

2) $\omega : D \to R^3$ parametrizzazione locale regolare

$\leadsto X_i = \partial\omega/\partial u_i$, $X_{ij} = \partial X_i/\partial X_j = \partial^2\omega/\partial u_i \partial u_j$

$g_{ij} = X_i \cdot X_j$, $g = \det(g_{ij})$, $g^{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} g_{\widehat{i}\,\widehat{j}}}{g}$

$N = \dfrac{X_1 \times X_2}{\|X_1 \times X_2\|} = \dfrac{X_1 \times X_2}{\sqrt{g}}$ (infatti $g = \|X_1 \times X_2\|^2$)

$L_i = L(X_i) = \sum_k \ell_i^k X_k = \ell_i^1 X_1 + \ell_i^2 X_2$

$\ell_{ij} = \ell(X_i, X_j) = L_i \cdot X_j = N \cdot X_{ij}$ ($\Rightarrow \ell_{ij} = \sum_k \ell_i^k g_{jk}$)

$K = \det(\ell_i^j) = \det(g^{jk}) \det(\ell_{ik}) = \dfrac{\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2}{g}$

$H = \dfrac{1}{2} \operatorname{tr}(\ell_i^j) = \dfrac{1}{2} \sum_{i,k} \ell_{ik} g^{ik} = \dfrac{\ell_{11}g_{22} + g_{11}\ell_{22} - 2\ell_{12}g_{12}}{2g}$

$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \leadsto T_{1,2}$

Prop. $S_1, S_2 \subset R^3$ superfici regolari orientate, $h \in \operatorname{Isom} R^3$ tale che $S_2 = h(S_1)$ come sup. orient. ($h_| : S_1 \to S_2$ cons. l'orient.)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} g_{h(p)}^{S_2}(h_*(V), h_*(W))) = g_p^{S_1}(V, W) \\ \ell_{h(p)}^{S_2}(h_*(V), h_*(W)) = \pm\, \ell_p^{S_1}(V, W) \end{array}\right\} \forall\, V, W \in T_pS_1 \;\forall\, p \in S_1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} K_{S_2}(h(p)) = K_{S_1}(p) \text{ e } H_{S_2}(h(p)) = \pm\, H_{S_1}(p) \\ \kappa_{1,2}^{S_2}(h(p)) = \pm\, \kappa_{1,2}^{S_1}(p) \text{ e } T_{1,2}^{S_2}(h(p)) = h_*(T_{1,2}^{S_1}(p)) \end{array}\right\} \forall\, p \in S$$

($\pm$ a seconda che h conserva/inverte l'orientaz. di R^3)

Dim. $N_{S_2}(h(p)) = \pm\, h_*(N_{S_1}(p))\ \forall\, p \in S$ (se h cons./inv. l'orient.)

$\Rightarrow L_{h(p)}^{S_2}(h_*(V)) = \pm\, h_*(L_p^{S_1}(V))\ \forall\, V \in T_pS_1\ \forall\, p \in S_1$ (h_* lin.)

Forma canonica

$S \subset R^3$ superficie regolare orientata, $p \in S$

(x, y, z) coord. ortog. t.c. $p = 0$, $T_pS = \langle e_x, e_y \rangle$, $N(p) = e_z$

$\leadsto \{z = f(x, y)\} \subset S$ intorno aperto di p in S

con $f : D \to R$ diff. t.c. $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

$\rightsquigarrow \omega(u_1,u_2) = (u_1,u_2,f(u_1,u_2))$ param. locale regolare t.c.
$X_1(u_1,u_2) = (1,0,f'_x(u_1,u_2))\,, X_2(u_1,u_2) = (0,1,f'_y(u_1,u_2))$

$\rightsquigarrow X_{11}(u_1,u_2) = (0,0,f''_{xx}(u_1,u_2)) \rightsquigarrow \ell_{11}(0,0) = f''_{xx}(0,0)$
$X_{22}(u_1,u_2) = (0,0,f''_{yy}(u_1,u_2)) \rightsquigarrow \ell_{22}(0,0) = f''_{xy}(0,0)$
$X_{12}(u_1,u_2) = (0,0,f''_{xy}(u_1,u_2)) \rightsquigarrow \ell_{12}(0,0) = f''_{xy}(0,0)$

$$\rightsquigarrow M_{(X_1,X_2)}L_p = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{xy}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$$

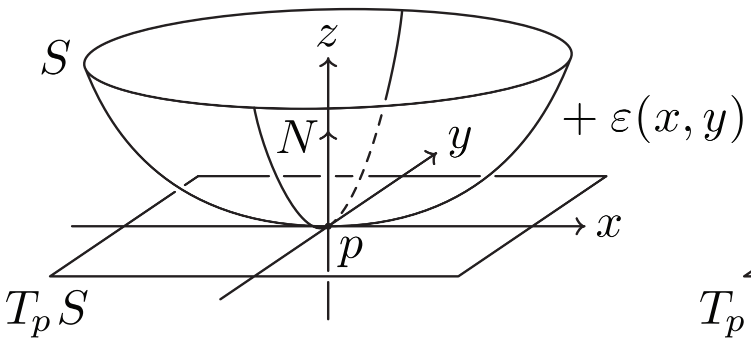
$\rightsquigarrow K(p) = \det H_f(0,0)$ e $H(p) = \operatorname{tr} H_f(0,0)/2$

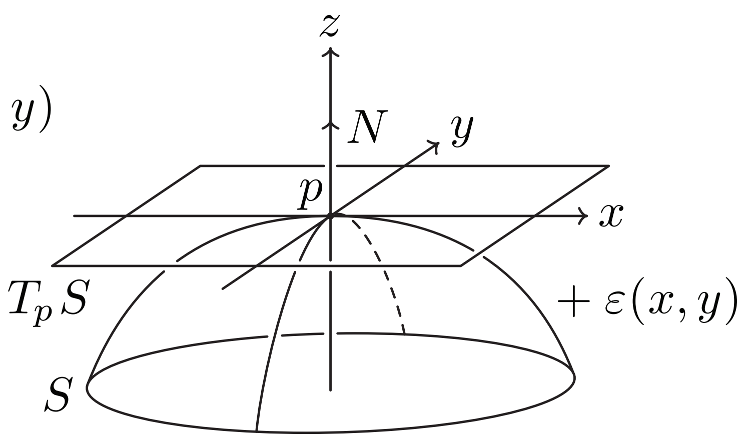
(x,y,z) coord. ortog. t.c. $e_x = T_1(p)\,, e_y = T_2(p)\,, e_z = N(p)$
$\rightsquigarrow f''_{xx}(0,0) = \kappa_1(p)\,, f''_{yy}(0,0) = \kappa_2(p)\,, f''_{xy}(0,0) = 0$

$\rightsquigarrow z = \dfrac{\kappa_1(p)}{2}x^2 + \dfrac{\kappa_2(p)}{2}y^2 + \varepsilon(x,y) \longleftarrow$ <u>forma canonica</u> di S in p

p <u>punto ellittico</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} K(p) > 0$ ($\Leftrightarrow \kappa_1(p), \kappa_2(p) \neq 0$ concordi)

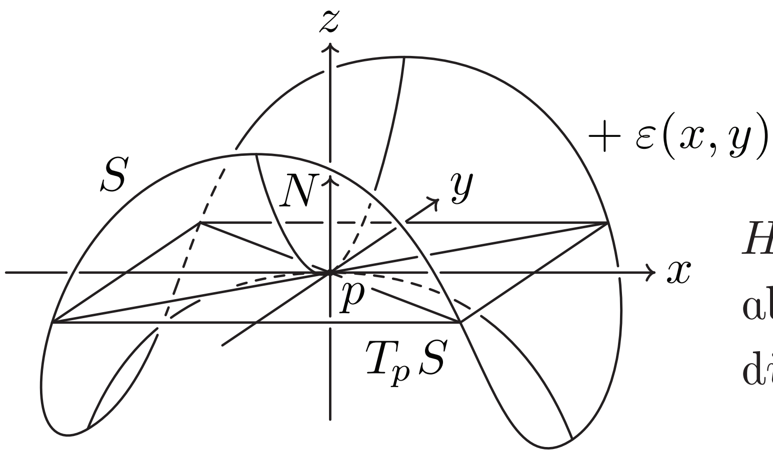
$H(p) > 0$ $H(p) < 0$





p <u>ombelicale</u> se $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$

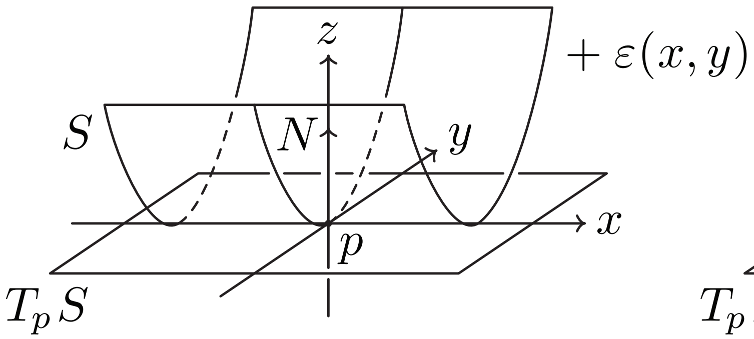
p <u>punto iperbolico</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} K(p) < 0$ ($\Leftrightarrow \kappa_1(p), \kappa_2(p) \neq 0$ discordi)

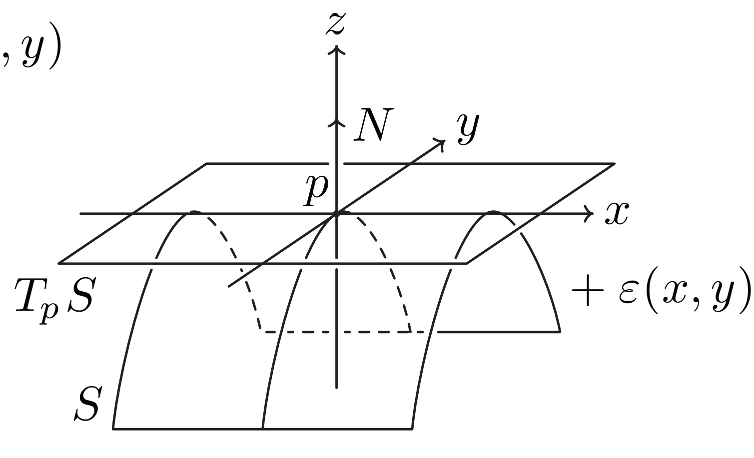


$H(p) = 0$ se $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ opposte altrimenti $H(p) \gtreqless 0$ a seconda di quale $\kappa_i(p)$ prevale

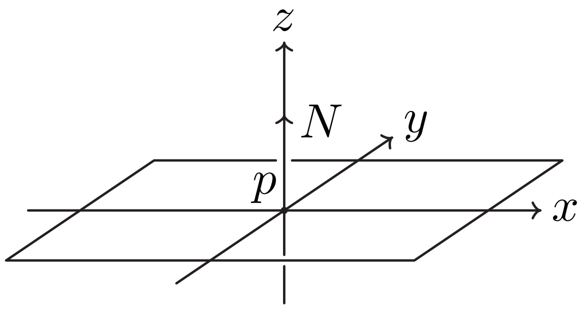
p <u>punto parabolico</u> $\overset{\text{def}}{\iff} K(p) = 0\,, H(p) \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ una sola $\kappa_i(p) = 0$)

$H(p) > 0$ $H(p) < 0$





p <u>punto planare</u> $\overset{\text{def}}{\iff} K(p) = 0\,, H(p) = 0$ ($\Leftrightarrow \kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$)



$S = T_pS + \varepsilon(x,y)$

(nei punti planari e parabolici $\varepsilon(x,y)$ è determin. per la forma di S ma non per $L_p\,, K(p)$ e $H(p)$)

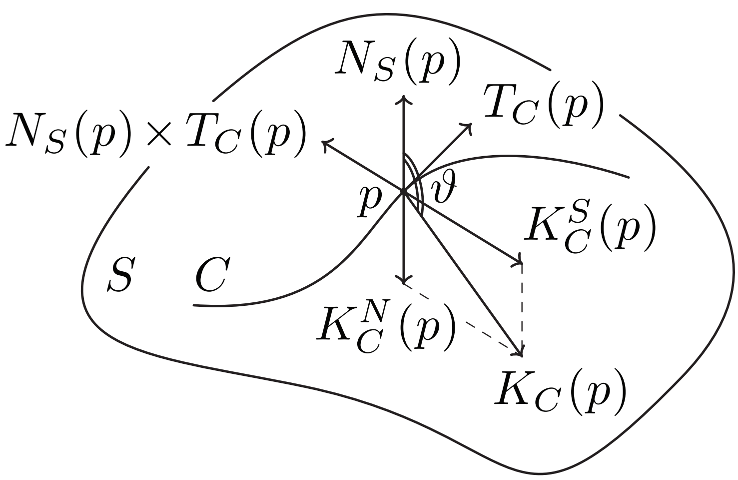
<u>Curve in superfici regolari</u>

$S \subset R^3$ superficie regolare <u>orientata</u>

$C \subset S$ curva regolare <u>orientata</u>, $p \in C$

$\rightsquigarrow K_C^N(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \pi_{N_S(p)}(K_C(p)) \longleftarrow$ <u>vettore curvatura normale</u>

$K_C^S(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \pi_{T_pS}(K_C(p)) \longleftarrow$ <u>vettore curvatura geodetica</u>



$((T_C(p)\,, N_S(p) \times T_C(p))$ base ortonormale positiva di $T_pS)$

$\rightsquigarrow \kappa_C^N(p) \overset{\text{def}}{=} K_C(p) \cdot N_S(p) = \pm\|K_C^N(p)\|$

curvatura normale di $C \subset S$ in p

$\kappa_C^S(p) \overset{\text{def}}{=} K_C(p) \cdot (N_S(p) \times T_C(p)) = \pm\|K_C^S(p)\|$

curvatura geodetica di $C \subset S$ in p

Note: 1) il segno di $\kappa_C^N(p)$ dipende solo dall'orientazione di S

il segno di $\kappa_C^S(p)$ dipende dalle orientazioni di S e C

2) $\kappa_C^N(p) = \kappa_C(p)\cos\vartheta$, $\kappa_C^S(p) = \pm\kappa_C(p)\sin\vartheta$

Teorema di Meusnier

$S \subset R^3$ superficie regolare orientata,

$C \subset S$ curva regolare orientata, $p \in C$

$\Rightarrow \kappa_C^N(p) = \ell(T_C(p), T_C(p))$ dipende solo da $T_C(p)$

Dim. $\kappa_C^N(p) = K_C(p) \cdot N_S(p) = \partial T_C/\partial T_C(p) \cdot N_S(p)$

$= -\,\partial N_S/\partial T_C(p) \cdot T_C(p) = \ell(T_C(p), T_C(p))$

$T \in T_p(S)$ versore tangente a S in p

$\rightsquigarrow \kappa(T) \overset{\text{def}}{=} \ell(T,T)$

curvatura normale di S nella direzione T in p

Note: 1) $\kappa_C(p) = \kappa(T_C(p))/\cos\vartheta$ $(\vartheta \neq \pi/2)$

$\Rightarrow \kappa(T) = \pm$ minima curvatura delle curve $C \subset S$

passanti per p con direzione T $(T_C(p) = T)$

2) $C = S \cap \pi$ sezione piana con $p \in \pi$ piano

$\Rightarrow \kappa_C(p) = |\kappa(T_C(p))|/\sin\varphi$ con $\varphi = \widehat{N_S N_\pi}$

$\Rightarrow \kappa(T) =$ curvatura della sezione piana normale

di S in p nella direzione T, definita

come $C = S \cap \pi$ con $\pi = \langle N_S, T\rangle_{\text{Aff}}$

Teorema di Eulero

$S \subset R^3$ superficie regolare orientata, $T \in T_pS$ versore

$\Rightarrow \kappa(T) = \kappa_1\cos^2\alpha + \kappa_2\sin^2\alpha$ dove $\alpha = \widehat{T_1 T}$

Dim. $\kappa(T) = \ell(T,T) = \ell(\cos\alpha\, T_1 + \sin\alpha\, T_2, \cos\alpha\, T_1 + \sin\alpha\, T_2)$

$= \cos^2\alpha\, \ell(T_1,T_1) + \sin^2\alpha\, \ell(T_2,T_2) = \kappa_1\cos^2\alpha + \kappa_2\sin^2\alpha$

Note: 1) $\kappa_{1,2}(p) = \kappa(T_{1,2})$ curvature normali nelle direz. principali
$= $ min. e max. tra le curvature normali di S in p

2) $T \in T_pS$ direzione asintotica di S in $p \overset{\text{def}}{\iff} \kappa(T) = 0$
$p \in S$ punto ellittico/parabolico/iperbolico/planare
$\Rightarrow$ esistono $0/1/2/\infty$ direzioni asintotiche di S in p

3) $C \subset S$ linea di curvatura $\overset{\text{def}}{\iff} T_C(p) = T_{1,2}(p)\ \forall\, p \in C$
$C \subset S$ linea asintotica $\overset{\text{def}}{\iff} T_C(p)$ direz. asintotica $\forall\, p \in C$

Derivata covariante

$S \subset R^3$ superficie regolare, $V \in T_pS$ vettore tangente
$W : S \to R^3$ funzione differenziabile tale che $W(q) \in T_qS\ \ \forall\, q \in S$
campo di vettori (tangenti) su S

$\nabla^S_V W \overset{\text{def}}{=\!=} \pi_{T_pS}(\partial W/\partial V) \in T_pS \longleftarrow$ derivata covariante in S

Note: 1) $\nabla^S_V W$ ha le stesse proprietà di $\partial W/\partial V$ (linearità di π_{T_pS})

2) $\gamma : I \to S$ diff. (reg.) $\Rightarrow \nabla^S_{\gamma'(t)} W = \pi_{T_{\gamma(t)}S}(W'(t))\ \ \forall\, t \in I$
($\nabla^S_{\gamma'(t)} W$ definita anche se W definita solo su $C = \gamma(I)$)

$\omega : D \to S$ parametrizzazione locale regolare
$\rightsquigarrow \Gamma_{ij}(u_1,u_2) = \nabla^S_{X_i(u_1,u_2)} X_j = \pi_{T_{\omega(u_1,u_2)}S}(X_{ij}(u_1,u_2))$
$\Gamma^k_{ij}(u_1,u_2)$ comp. risp. a $\{X_1,X_2\}$ ($\Gamma_{ij} = \Gamma^1_{ij}X_1 + \Gamma^2_{ij}X_2$)
simboli di Christoffel di I specie

$\Gamma_{ijk}(u_1,u_2)$ proiezioni su $\{X_1,X_2\}$ ($\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij} \cdot X_k$)
simboli di Christoffel di II specie

Note: 1) Γ_{ij} differenziabili $\Rightarrow \Gamma^k_{ij}$ e Γ_{ijk} differenziabili $\forall\, i,j,k$

2) $X_{ij} = X_{ji} \Rightarrow \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} \Rightarrow \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ e $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}\ \ \forall\, i,j,k$

3) $\Gamma_{ijk} = \sum_h g_{hk}\Gamma^h_{ij} \Rightarrow \Gamma^k_{ij} = \sum_h g^{hk}\Gamma_{ijh}\ \ \forall\, i,j,k$

4) $V = \sum_i v_iX_i \in T_pS\,, W = \sum_j w_jX_j$ campo di vettori
$\Rightarrow \nabla^S_V W = \sum_k(\sum_i v_i\,\partial w_k/\partial X_i + \sum_{ij}\Gamma^k_{ij}\,v_i\,w_j)X_k$

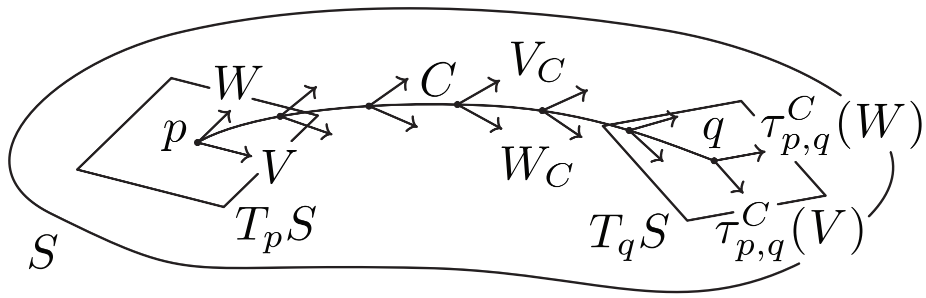
5) $\alpha(s) = \omega(u_1(s),u_2(s))$ parametriz. naturale di $C \subset S$
$\Rightarrow K^S_C(p) = \pi_{T_pS}(K_C(p)) = \pi_{T_pS}(\alpha''(s)) =$
$= \nabla^S_{\alpha'(s)}\alpha' = \sum_k(u''_k(s) + \sum_{ij}\Gamma^k_{ij}u'_i(s)u'_j(s))X_k$

$S \subset R^3$ superficie regolare, $C \subset S$ curva regolare (orientata)
V campo di vettori tangenti a S lungo C <u>parallelo (lungo C)</u>
$\overset{\text{def}}{\iff} \nabla^S_{T_C(p)} V = 0 \ \forall p \in C$ (non dipende dall'orientazione)

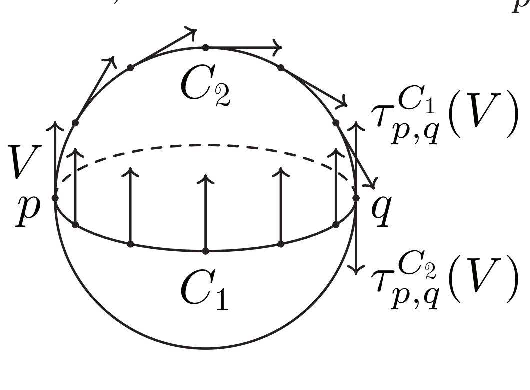
<u>Note</u>: 1) $\gamma : I \to C$ param. regolare di $C \rightsquigarrow V(t) = V(\gamma(t))$
V parallelo $\Leftrightarrow V'(t) \cdot X_{1,2}(\gamma(t)) = 0$ per ogni $t \in I$
2) $\gamma(t) = \omega(u_1(t), u_2(t))$, $V(t) = \sum_i v_i(t) X_i(\gamma(t))$
$\rightsquigarrow V$ parallelo $\Leftrightarrow \nabla^S_{\gamma'(t)} V = 0$ per ogni $\in I$
$\Leftrightarrow v'_k(t) = -\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} u'_i(t) v_j(t)$ per $k = 1, 2$
3) S superficie piana $\rightsquigarrow V$ parallelo $\Leftrightarrow V$ costante

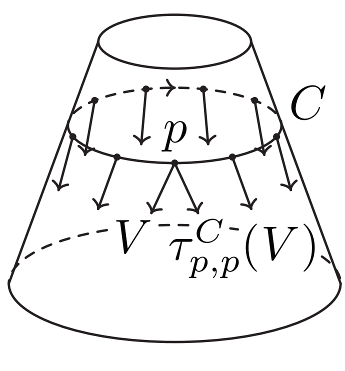
<u>Prop</u>. $S \subset R^3$ sup. regolare, $C \subset S$ arco di curva regolare tra p e q
$V \in T_p S \rightsquigarrow V_C$ unico campo parallelo lungo C t.c. $V_C(p) = V$
$\rightsquigarrow \tau^C_{p,q} : T_p S \to T_q S$ definita $\tau^C_{p,q}(V) = V_C(q) \ \forall V \in T_p S$
<u>trasporto parallelo</u> da p a q lungo C

<u>Dim</u>. $\gamma : I \to S$ param. reg. di C t.c. $\gamma(0) = p \rightsquigarrow V_C$ unica soluz. del problema di Cauchy: $V'(t) \cdot X_{1,2}(\gamma(t)) = 0$, $V(0) = V$



<u>Note</u>: 1) $\tau^C_{p,q}$ applicazione lineare ben definita
2) $\tau^C_{p,q}$ isometria euclidea ($V_C \cdot W_C = V \cdot W$ cost. lungo C)
3) S superficie piana $\Rightarrow \tau^C_{p,q} =$ traslazione (indipend. da C)
4) in generale $\tau^{C_1}_{p,q} \neq \tau^{C_2}_{p,q}$ o equivalentemente $\tau^C_{p,p} \neq \mathrm{id}_{T_p S}$
($C = \mathrm{Fr}\, D$, $D \subset S$ disco $\Rightarrow \tau^C_{p,p} \leftrightsquigarrow$ curv. di Gauss in D)





5) $\gamma : I \to S$ differenziabile (regolare)

V campo di vettori tangenti a S lungo $C = \gamma(I)$

$\Rightarrow \nabla_{\gamma'(t)} V = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{(\tau^{\gamma}_{\gamma(t),\gamma(t+\varepsilon)})^{-1} V(\gamma(t+\varepsilon)) - V(\gamma(t))}{\varepsilon}$

Geodetiche

$S \subset R^3$ superficie regolare

$C \subset S$ linea geodetica $\stackrel{\text{def}}{=\!=}$ "curva" loc. reg. t.c. $\kappa^S_C(p) = 0 \ \forall p \in C$

$(\kappa_C(p) = |\kappa(T_C(p))| = \text{min. curv.} \ \forall p \in C)$

$\gamma : I \to S$ parametriz. geodetica di $C \stackrel{\text{def}}{\iff} v(t) = \|\gamma'(t)\| = \text{cost.}$

Note: 1) $C \subset S$ rettilinea $\not\Longleftarrow\!\!\Rightarrow$ geodetica

2) $C \subset S$ geodetica $\Leftrightarrow K_C(p) \cdot X_{1,2}(p) = 0 \ \ \forall p \in C$

3) $\gamma : I \to S$ param. geodetica $\Leftrightarrow \gamma''(t) \cdot X_{1,2}(\gamma(t)) = 0 \ \ \forall t \in I$

$\Leftrightarrow \nabla^S_{\gamma'(t)} \gamma' = 0 \ \ \forall t \in I$ ($\gamma'(t)$ è parallelo lungo $C = \gamma(I)$)

4) $\gamma(t) = \omega(u_1(t), u_2(t))$ param. geodetica in $S = \omega(D)$

$\Leftrightarrow u''_k(t) = -\sum_{ij} \Gamma^k_{ij} u'_i(t) u'_j(t)$ per $k = 1, 2$

equazioni delle geodetiche di S

Prop. $S \subset R^3$ superficie regolare, $p \in S$, $V \in T_p(S)$

$\rightsquigarrow \gamma_V : I_V \to S$ unica parametrizzazione geodetica massimale t.c. $\gamma_V(0) = p$ e $\gamma'_V(0) = V$

$\rightsquigarrow C_V = \gamma_V(I_V)$ linea geod. se $V \neq 0$ ($= \{p\}$ se $V = 0$)

Dim. γ_V è l'unica soluzione massimale del problema di Cauchy:

$\gamma''_V(t) \cdot X_{1,2}(\gamma_V(t)) = 0$, $\gamma_V(0) = p$, $\gamma'_V(0) = V$

Note: 1) γ_V è regolare se $V \neq 0$ e naturale se $\|V\| = 1$

2) $\forall a \neq 0 \Rightarrow I_{aV} = I_V / a$ e $\gamma_{aV}(t) = \gamma_V(at) \ \ \forall t \in I_{aV}$

$\Rightarrow C_{aV} = C_V$ (unica linea geod. con dir. V in p)

$p \in S \rightsquigarrow e_p : D_pS \to S$ applicazione esponenziale di S in p

appl. diff. t.c. $e_p(V) = \gamma_V(1)$ con $0 \in D_pS \subset T_pS \cong R^2$ ap.

regolare in un int. di 0 ($V \in T_0 D_pS \rightsquigarrow e_{p*}(V) = \gamma'_V(0) = V$)

S superficie completa $\stackrel{\text{def}}{\iff} I_V = R \ \ \forall V \in T_pS \ \ \forall p \in S$

$\iff D_p = T_pS \ \ \forall p \in S$

Isometrie tra superfici

$f : S_1 \to S_2$ applicazione tra superfici regolari $S_1, S_2 \subset R^3$
differenziabile $\overset{\text{def}}{\iff} \iota \circ f \circ \omega : D \to R^3$ differenziabile
$\forall\, \omega : D \to R^3$ parametriz. loc. reg. di S_1
$\iff \forall\, p \in S_1\ \exists \omega$ intorno a p t.c. $\iota \circ f \circ \omega$ diff.
regolare $\overset{\text{def}}{\iff} \iota \circ f \circ \omega$ regolare $\forall\, \omega$ parametriz. loc. reg. di S_1
$\iff \forall\, p \in S_1\ \exists \omega$ intorno a p t.c. $\iota \circ f \circ \omega$ regolare

$p \in S_1 \rightsquigarrow f_* : T_p S_1 \to T_{f(p)} S_2$ applicazione tangente a f in p
tale che $f_*(\gamma'(t)) = (f \circ \gamma)'(t)\ \forall\, \gamma : I \to S_1$ diff.

Note: 1) f_* è lineare t.c. $X^{\omega}_{1,2} \mapsto X^{f\circ\omega}_{1,2}\ \forall\, \omega$ parametriz. loc. reg. di S_1
2) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ per ogni $f : S_1 \to S_2$ e $g : S_2 \to S_3$ diff.
3) $f = h_|$ con $h \in \operatorname{Aff} R^3 \Rightarrow f_* \leftrightsquigarrow h_*$ (a meno di traslazioni)

$i : S_1 \to S_2$ isometria (intrinseca) tra superfici regolari $S_1, S_2 \subset R^3$
$\overset{\text{def}}{\iff} i$ omeomorfismo differenziabile regolare
t.c. $i_* : T_p S_1 \to T_{i(p)} S_2$ isometria euclidea $\forall\, p \in S_1$
$(\Leftrightarrow \operatorname{Lung}(i(C)) = \operatorname{Lung}(C)\ \forall\, C \subset S_1$ curva regolare)

Nota: i isometria $\Leftrightarrow \omega_1 : D \to S_1$ parametriz. locale regolare $\rightsquigarrow$
$\omega_2 = i \circ \omega_1 : D \to S_2$ parametriz. locale regolare
t.c. $g^{\omega_1}_{ij}(u_1, u_2) = g^{\omega_2}_{ij}(u_1, u_2)\ \forall\, i, j\ \forall\, (u_1, u_2) \in D$

Prop. ∇^S univoc. determ. dalla I forma fond. di S (cioè dalle g_{ij})
$i : S_1 \to S_2$ isometria (intrinseca) $\Rightarrow \nabla^{S_2}_{i_*(V)} i_*(W) = i_*(\nabla^{S_1}_V W)$

Dim. $\omega : D \to S$ param. loc. reg. $\rightsquigarrow X_i, X_{ij}, g_{ij}$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = X_{ij} \cdot X_k + X_j \cdot X_{ik} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\Big)$$

Corol. $i : S_1 \to S_2$ isometria tra sup. regolari orientate $S_1, S_2 \subset R^3$
$C_1 \subset S_1$, $C_2 = i(C_1) \subset S_2$ curve regolari orientate $\Rightarrow$
$\kappa^{S_2}_{C_2}(i(p)) = \pm\, \kappa^{S_1}_{C_1}(p)$ ($\pm$ a seconda che i cons./inv. l'orient.)

Dim. $\kappa_C^S(p) = K_C(p)\cdot(N_S(p)\times T_C(p)) = K_C^S(p)\cdot(N_S(p)\times T_C(p))$
$K_{C_2}^{S_2}(i(p)) = \nabla^{S_2}_{T_{C_2}(i(p))}T_{C_2} = i_*(\nabla^{S_1}_{T_{C_1}(p)}T_{C_1}) = i_*(K_{C_1}^{S_1}(p))$
$N_{S_2}(i(p))\times T_{C_2}(i(p)) = \pm\, i_*(N_{S_1}(p)\times T_{C_1}(p))$

Corol. $i : S_1 \to S_2$ isometria tra superfici regolari $S_1, S_2 \subset R^3$
$C_2 = i(C_1) \subset S_2$ linea geodetica $\Leftrightarrow C_1 \subset S_1$ linea geodetica
$\gamma_2 = i\circ\gamma_1 : I \to S_2$ param. geod. $\Leftrightarrow \gamma_1 : I \to S_1$ param. geod.

Dim. $C_2 \subset S_2$ geodetica $\Leftrightarrow \kappa_{C_2}^{S_2} = 0 \Leftrightarrow \kappa_{C_1}^{S_1} = 0 \Leftrightarrow C_1 \subset S_1$ geodetica
γ_2 geod. in $S_2 \Leftrightarrow \nabla^{S_2}_{\gamma_2'(t)}\gamma_2' = 0 \Leftrightarrow \nabla^{S_1}_{\gamma_1'(t)}\gamma_1' = 0 \Leftrightarrow \gamma_1$ geod. in S_1

Teorema "egregium" di Gauss

K_S (curv. di Gauss) univoc. determ. dalla I forma fond. di S
$i : S_1 \to S_2$ isometria (intrinseca) $\Rightarrow K_{S_2}(i(p)) = K_{S_1}(p)\ \forall\, p\in S_1$

Dim. $\omega : D \to S$ param. loc. reg. $\rightsquigarrow X_i, X_{ij}, g_{ij}, N, L_i, \ell_i^j, \ell_{ij}$

$$\begin{cases} \partial X_j/\partial X_i = \nabla^S_{X_i}X_j + \ell_{ij}N \\ \partial N/\partial X_i = -\sum_j \ell_i^j X_j \end{cases} \quad \underline{\text{equaz. di Gauss-Weingarten}}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial^2 X_k}{\partial X_i\partial X_j} = \frac{\partial(\nabla^S_{X_j}X_k)}{\partial X_i} + \frac{\partial\ell_{jk}}{\partial X_i}N - \ell_{jk}L_i$$

$\pi_{T_pS}(\partial^2X_k/\partial X_i\partial X_j) = \pi_{T_pS}(\partial^2X_k/\partial X_j\partial X_i)$
$\rightsquigarrow \nabla^S_{X_i}\nabla^S_{X_j}X_k - \nabla^S_{X_j}\nabla^S_{X_i}X_k = \ell_{jk}L_i - \ell_{ik}L_j = \sum_h(\ell_{jk}\ell_i^h - \ell_{ik}\ell_j^h)X_h$
$\rightsquigarrow R_{ijkh} \overset{\text{def}}{=\!=} (\nabla^S_{X_i}\nabla^S_{X_j}X_k - \nabla^S_{X_j}\nabla^S_{X_i}X_k)\cdot X_h = \ell_{jk}\ell_{ih} - \ell_{ik}\ell_{jh}$
$\Rightarrow K = (\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}^2)/g = -R_{1212}/g$ dipende solo da (g_{ij})

Note: 1) $K = -R_{1212}/g \Rightarrow K$ intrinseca e $-R_{1212}/g$ indip. da ω
2) $i : S_1 \to S_2$ isometria (intrinseca) $\not\Rightarrow H_{S_2}(i(p)) = H_{S_1}(p)$

Lemma. $S \subset R^3$ superficie reg. orientata, $C \subset S$ curva geodetica
$\rightsquigarrow N_C(p) = \pm\, N_S(p)\,, B_C(p) = T_C(p)\times N_C(p) \in T_pS\ \ \forall\, p\in C$
$\Rightarrow \partial T_C/\partial T_C(p) = \pm\,\ell(T_C(p), T_C(p))N_C(p)$
$\partial B_C/\partial T_C(p) = \pm\,\ell(T_C(p), B_C(p))N_C(p)$

Dim. $\partial T_C/\partial T_C(p) = \kappa_C(p)N_C(p) = \pm\,\kappa(T_C(p))N_C(p)$
$T_C\cdot B_C = 0\,, B_C\cdot B_C = 1 \Rightarrow \partial B_C/\partial T_C(p) \parallel N_C(p)$
$N_C\cdot B_C = 0 \Rightarrow \partial B_C/\partial T_C(p)\cdot N_C(p) = \pm\,\ell(T_C(p), B_C(p))$

Teorema fondamentale

$S_1, S_2 \subset R^3$ superfici regolari orientate connesse, sono equiv.:

1) $\exists\, h \in \mathrm{Isom}\, R^3$ tale che $S_2 = h(S_1)$ (come superf. orientate)

2) $\exists\, i : S_1 \to S_2$ isometria (intrinseca) che conversa l'orient.
t.c. $L^{S_2}_{i(p)}(i_*(V)) = \pm\, i_*(L^{S_1}_p(V))\ \ \forall V \in T_p S_1$

3) $\exists\, f : S_1 \to S_2$ omeo diff. regolare che conserva l'orient.
t.c. $\omega_1 : D \to R^3$, $\omega_2 = f \circ \omega_1 : D \to R^3$ param. loc. reg. di $S_{1,2}$
$\Rightarrow g^{\omega_1}_{ij}(u) = g^{\omega_2}_{ij}(u)$ e $\ell^{\omega_1}_{ij}(u) = \pm\, \ell^{\omega_2}_{ij}(u)\ \ \forall u \in D$

Dim. 1) $\Rightarrow$ 2) $i = h_{|S_1} : S_1 \to S_2$

2) $\Rightarrow$ 3) $f = i$ (isometria $\Leftrightarrow g^{\omega_1}_{ij}(u) = g^{\omega_2}_{ij}(u)$)

3) $\Rightarrow$ 1) $\ell^{\omega_1}_{ij}(u) = \ell^{\omega_2}_{ij}(u)$ (a meno di riflessioni di R^3)

$\bar p \in S_1 \rightsquigarrow h \in \mathrm{Isom}^+ R^3$ tale che

$$h(\bar p) = f(\bar p) \text{ e } h_{*|} = f_* : T_{\bar p} S_1 \to T_{f(\bar p)} S_2$$

$E = \{p \in S_1 \mid h(p) = f(p) \text{ e } h_{*|} = f_* : T_p S_1 \to T_{f(p)} S_2\}$

E chiuso in S_1 (per la continuità)

E aperto in S_1 (lemma: $p \in E \Rightarrow e_p(D_p) \subset E$)

$\Rightarrow E = S_1 \Rightarrow h(S_1) = S_2$

Nota: nei punti 2 e 3 ha il segno $+ \Leftrightarrow h \in \mathrm{Isom}^+ R^3$

Superfici di rotazione

$S \subset R^3$ superficie (regolare) di rotazione
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S generata da una curva $G \subset R^3$ (generatrice)
che ruota intorno a una retta $a \subset R^3$ (asse di rotazione)

$C \subset S$ meridiano $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $C = S \cap \sigma$ con σ semipiano uscente da a
parallelo $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ C circonf. generata dalla rotazione di $p \in G$

Note: 1) si può assumere come generatrice G ogni meridiano di S

2) meridiani e paralleli sono linee di curvatura di S
($C = S \cap \sigma \Rightarrow \partial N_S / \partial T_C(p) \subset \sigma \Rightarrow \parallel T_C(p)\ \ \forall p \in C$)

3) $C \subset S$ meridiano $\Rightarrow C$ curva geodetica di S

4) $C \subset S$ parallelo: C curva geodetica $\Leftrightarrow T_p S \parallel$ asse $\forall p \in C$
C linea asintotica $\Leftrightarrow T_p S \perp$ asse $\forall p \in C$

Asse di rotazione = asse z

$\rightsquigarrow \omega(u,v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, z(u))$ param. regolare di S
con $\alpha(u) = (r(u), z(u))$ param. naturale del meridiano $S \cap \pi_{xz}$

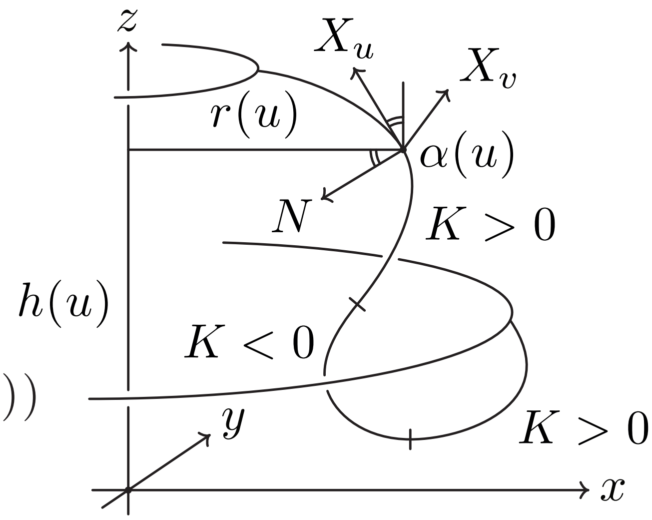
$\rightsquigarrow X_u(u,v) = (r'(u)\cos v, r'(u)\sin v, z'(u))$
$X_v(u,v) = (-\,r(u)\sin v, r(u)\cos v, 0)$
$N(u,v) = (-\,z'(u)\cos v, -\,z'(u)\sin v, r'(u))$

$\rightsquigarrow \kappa_{\mathrm{mer}}(u) = r'(u)z''(u) - r''(u)z'(u)$
$\kappa_{\mathrm{par}}(u) = z'(u)/r(u)$
$K(u) = -\,r''(u)/r(u)$

$\rightsquigarrow$ equazione delle geodetiche:

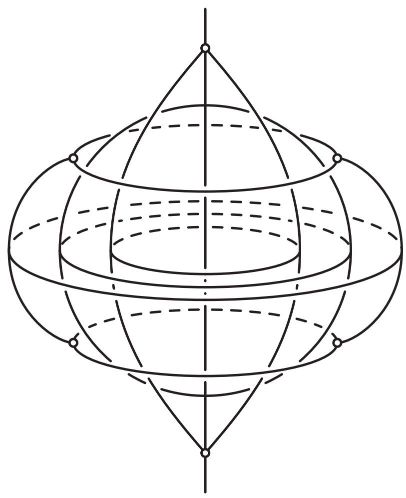
$$\begin{cases} u''(t) = r(u(t))r'(u(t))v'(t)^2 \\ v''(t) = -2r'(u(t))u'(t)v'(t)/r(u(t)) \end{cases}$$

$\Rightarrow r(t)\cos\vartheta(t) = \text{cost.}$
con $\vartheta(t) = \widehat{X_v T}(t)$ — <u>equazione di Clairaut</u>

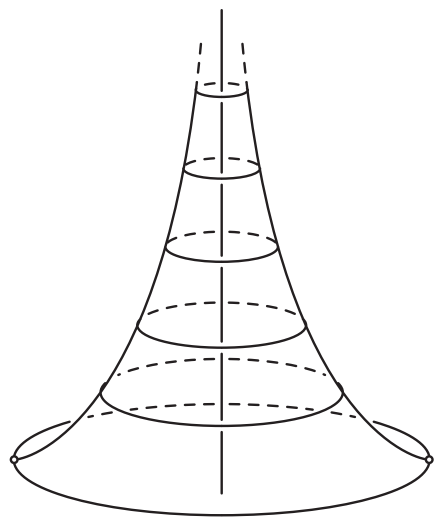


<u>Note</u>: 1) le superfici di rotazione con $K = c$ (costante) si ottengono risolvendo le equazioni differenziali $r''(u) = -\,c\,r(u)$ e $z'(u) = \sqrt{1 - r'(u)^2}$

2) equaz. di Clairaut $\rightsquigarrow$ proprietà qualitative delle geodetiche nelle superf. di rotaz. (per esempio il toro)



$K > 0$



$K < 0$ (<u>pseudosfera</u>)

Superfici rigate

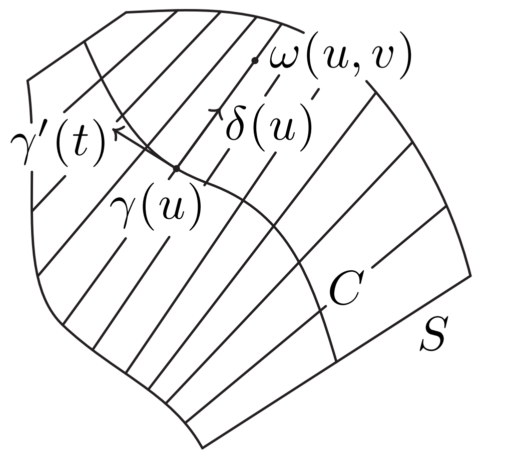
$S \subset R^3$ superficie (regolare) rigata
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $S = \cup_{p\in C} R_p$ con R_p intervallo di retta (generatrice) uscente da $p \in C \subset R^3$ curva regolare (direttrice)

Note: 1) si può scegliere C in modo che $T_pC \perp R_p \ \forall\, p \in C$
2) $K \leq 0$ (le generatrici sono geodetiche asintotiche)
$K = 0 \Leftrightarrow$ le generatrici sono anche linee di curvatura
$\Leftrightarrow N$ è costante lungo le generatrici
3) $H = \kappa(T)/2$ con $T =$ dir. ortogonale alle generatrici
$(H(p) = (\kappa(T_a) + \kappa(T_b))/2) \ \forall \{T_a, T_b\}$ base orton. di T_pS)
$H = 0 \Leftrightarrow$ le direttrici $\perp$ alle generatrici sono asintotiche

Esempi: 1) superfici piane, cilindriche, coniche (loc. euclidee)
2) $S \subset TC$ con $C \subset R^3$ curva reg. (rigata delle tangenti)
$\alpha : I \to R^3$ parametrizzazione naturale di C
$\rightsquigarrow \omega(u,v) = \alpha(u) + v\, T_C(u)$ param. regolare di S
$\rightsquigarrow X_u(u,v) = T_C(u) + v\, \kappa_C(u) N_C(u)\,,\ X_v(u,v) = T_C(u)$
$g_{uu}(u,v) = 1 + v^2 \kappa_C(u)^2\,,\ g_{uv}(u,v) = g_{vv}(u,v) = 1$
$\Rightarrow S$ loc. euclidea (g dipende solo da κ_C quindi
S isom. a $S' \subset TC$ con $C \subset R^2$)
3) $S = \{(v\cos 2\pi u, v \sin 2\pi u, pu) \mid (u,v) \in R^2\}$ (elicoide)
$= \cup_{r\geq 0}$ elica di raggio r e passo p intorno all'asse z
superf. non loc. euclidea $\left(K = -\dfrac{4\pi^2 p^2}{(4\pi^2 v^2 + p^2)^2}\,,\ H = 0\right)$

$\omega(u,v) = \gamma(u) + v\,\delta(u)$ param. reg. di S
con $\gamma : I \to R^3$ param. reg. di C direttrice
e $\delta : I \to R^3 - \{0\}$ direz. delle generatrici

$$\rightsquigarrow K(u,v) = -\frac{(\gamma'(u) \times \delta(u) \cdot \delta'(u))^2}{g^2}$$



<u>Prop</u>. S superficie rigata t.c. $K = 0$ (<u>rigata sviluppabile</u>)
$\Rightarrow S = \mathrm{Cl}(S_{\mathrm{cil}} \cup S_{\mathrm{con}} \cup S_{\tan})$ con S_{cil}, S_{con} e $S_{\tan}$ unioni aperte di generatrici di S tali che ogni componente connessa è rispettivamente cilindrica, conica, tangente.

<u>Dim</u>. $\omega(u,v) = \gamma(u) + v\,\delta(u)$ parametrizzazione regolare di S
t.c. $\{\gamma'(u), \delta(u)\}$ base ortonormale di $T_{\gamma(u)}S \ \ \forall\, u \in I$
$K = 0 \Rightarrow \gamma'(u) \times \delta(u) \cdot \delta'(u) = 0 \ \ \forall\, u \in I$
$\Rightarrow \delta'(u) = f(u)\gamma'(u) \ \ \forall\, u \in I$
$A_{\tan} = \{u \in I \mid f(u) \neq 0, f'(u) \neq 0\} \rightsquigarrow S_{\tan} = \bigcup_{u \in A_{\tan}} R_{\gamma(u)}$
$A_{\mathrm{con}} = \mathrm{Int}\{u \in I \mid f(u) \neq 0, f'(u) = 0\} \rightsquigarrow S_{\mathrm{con}} = \bigcup_{u \in A_{\mathrm{con}}} R_{\gamma(u)}$
$A_{\mathrm{cil}} = \mathrm{Int}\{u \in I \mid f(u) = 0\} \rightsquigarrow S_{\mathrm{cil}} = \bigcup_{u \in A_{\mathrm{cil}}} R_{\gamma(u)}$
$u \in A_{\tan} \cup A_{\mathrm{con}} \rightsquigarrow \beta(u) = \gamma(u) - \delta(u)/f(u)$
$\beta'(u) = f'(u)/f(u)^2\,\delta(u)$
$u \in A_{\tan} \Rightarrow \beta'(u) \neq 0 \Rightarrow \beta$ param. reg. di C t.c. loc. $S_{\tan} \subset TC$
$u \in A_{\mathrm{con}} \Rightarrow \beta'(u) = 0 \Rightarrow \beta$ loc. cost. in $A_{\mathrm{con}} \Rightarrow S_{\mathrm{con}}$ loc. conica
$u \in A_{\mathrm{cil}} \Rightarrow \delta'(u) = 0 \Rightarrow \delta$ loc. cost. in $A_{\mathrm{cil}} \Rightarrow S_{\mathrm{cil}}$ loc. cilindrica

<u>Note</u>: 1) la decomposizione $S = \mathrm{Cl}(S_{\mathrm{cil}} \cup S_{\mathrm{con}} \cup S_{\tan})$
è unica intorno ai punti parabolici di S
ma dipende da ω intorno ai punti planari di S

2) ω come nella dimostrazione

$$\rightsquigarrow H(u,v) = \frac{\kappa_C^N(u)}{2(1 + v\,f(u))} = \frac{H(u,0)}{1 + v\,f(u)}$$

$\Rightarrow$ ogni generatrice è tutta a punti planari o parabolici
$\Rightarrow S = \mathrm{Cl}(S_{\mathrm{pla}} \cup S_{\mathrm{par}})$ con S_{pla} e S_{par} unioni aperte di generatrici di S t.c. ogni componente di S_{pla} è planare e ogni punto di S_{par} è parabolico

3) $S'_{\mathrm{cil}} = S_{\mathrm{cil}} \cap S_{\mathrm{par}}$, $S'_{\mathrm{con}} = S_{\mathrm{con}} \cap S_{\mathrm{par}}$, $S'_{\tan} = S_{\tan} \cap S_{\mathrm{par}}$
$\rightsquigarrow S = \mathrm{Cl}(S_{\mathrm{pla}} \cup S'_{\mathrm{cil}} \cup S'_{\mathrm{con}} \cup S'_{\tan})$ decomposizione univocamente determinata (non dipende da ω)

Superfici a curvatura costante

Teorema. $S \subset R^3$ superficie regolare connessa e completa
con curvatura di Gauss costante K, allora:
$K = 0 \Rightarrow S$ piano o cilindro (Massey, ∼1960)
$K > 0 \Rightarrow S$ sfera di raggio $1/\sqrt{K}$ (Liebmann, ∼1900)
$K < 0$ impossibile (Hilbert, ∼1900)

Dim. solo per $K = 0$
$S = \mathrm{Cl}(S_{\mathrm{pla}} \cup S_{\mathrm{par}})$ con S_{pla} e S_{par} aperti in S
$p \in S_{\mathrm{par}} \rightsquigarrow R_p$ linea di curvatura uscente da p per $\kappa = 0$
N costante lungo $R_p \Rightarrow R_p \subset T_pS$ $(N \cdot X = \mathrm{cost.})$
$\Rightarrow R_p$ interv. rett. $(K = 0 \Rightarrow e_p : D_p \to S$ isom.)
$\Rightarrow R_p$ retta (per la completezza)
$\Rightarrow S$ superficie rigata
S compl. $\Rightarrow$ componenti di S_{par} cilindriche $(S_{\mathrm{par}} = S'_{\mathrm{cil}})$
componenti di S_{pla} delimitate da rette parallele
$\Rightarrow S$ piano o cilindro

Superfici tubolari

$C \subset R^3$ curva regolare, $r > 0$
$\rightsquigarrow T_r \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{p \in R^3 \mid d(p, C) = r\}$ superficie tubolare intorno a C

Nota: κ_C limitata e $r < \varepsilon$ suffic. piccolo $\Rightarrow T_r$ sup. regolare $\cong C \times S^1$

$\alpha : I \to C$ param. naturale di C
$\rightsquigarrow \omega_r(u, v) = \alpha(u) + r(\cos v\, N_C(u) + \sin v\, B_C(u))$ param. reg. di T_r

$\rightsquigarrow N_r(u, v) = \cos v\, N(u) + \sin v\, B(u)$
$g_r(u, v) = r^2(1 - r\,\kappa_C(u) \cos v)^2$

$$\rightsquigarrow K_r(u, v) = -\frac{\kappa_C(u) \cos v}{r(1 - r\,\kappa_C(u) \cos v)}$$

Note: 1) ω_r regolare se $r < 1/\kappa_C(p)\ \ \forall\, p \in C$
2) $N_r(u, v)$ non dip. da $r \Rightarrow K_r(u, v)\sqrt{g_r(u, v)}$ not dip. da r
3) $\int_{T_r} K_r dS = 0\,,\ \int_{T_r} K_r^+ dS = 2 \int_C \kappa_C ds$ con $K_r^+ = \max\{K_r, 0\}$

<u>Teorema di Fenchel</u>

$C \subset R^3$ curva di Jordan regolare $\Rightarrow \int_C \kappa(s)ds \geq 2\pi$

inoltre: $\int_C \kappa(s)ds = 2\pi \Leftrightarrow C$ curva piana con $I(C)$ convesso

<u>Dim</u>. $T_r^+ = \{p \in T_r \mid K_r(p) \geq 0\} \rightsquigarrow 2\int_C \kappa_C ds = \int_{T_r} K_r^+ dS = \int_{T_r^+} K_r dS$

$N(T_r^+) = S^2 \Rightarrow \int_{T_r^+} K_r dS \geq \text{Area}\, S^2 = 4\pi \Rightarrow \int_C \kappa_C ds \geq 2\pi$

inoltre: $\int_C \kappa(s)ds = 2\pi \Leftrightarrow N_{|T_r^+}$ iniettiva q.o. $\Leftrightarrow C$ curva piana

quindi si applica il teorema di Fenchel nel piano

<u>Nota</u>: $\int_C \kappa(s)ds \geq 4\pi$ se C è un nodo non banale

<u>Superfici parallele</u>

$S \subset R^3$ superficie regolare orientata, $r \in R$

$\rightsquigarrow S_r \overset{\text{def}}{=\!=} \{p + r\, N(p) \mid p \in S\}$ <u>superficie parallela</u> a S

<u>Nota</u>: curvature di S sono limitate e $|r| < \varepsilon$ suffic. piccolo

$\Rightarrow S_r$ regolare e $\varphi_r : S \to S_r$ def. $\varphi_r(p) = p + r\, N(p)$ diffeo

$\omega : D \to R^3$ param. regolare di S

$\rightsquigarrow \omega_r(u,v) = \omega(u,v) + r\, N(u,v)$ param. regolare di S_r

$\rightsquigarrow X^r_{u,v}(u,v) = X_{u,v}(u,v) - r\, L_{u,v}(u,v)\,,\ N_r(u,v) = N(u,v)$

$g_r(u,v) = (1 - 2r\, H(u,v) + r^2 K(u,v))^2\, g(u,v)$

$$\rightsquigarrow K_r(u,v) = \frac{K(u,v)}{1 - 2r\, H(u,v) + r^2 K(u,v)}$$

$$H_r(u,v) = \frac{H(u,v) - r\, K(u,v)}{1 - 2r\, H(u,v) + r^2 K(u,v)}$$

<u>Note</u>: 1) ω_r e φ_r regolari se $1 - 2r\, H(u,v) + r^2 K(u,v) \neq 0$

cioè $|r| < 1/\max\{|\kappa_1(p)|, |\kappa_2(p)|\}\ \ \forall p \in S$

2) $K_r(u,v)\sqrt{g_r(u,v)} = K(u,v)\sqrt{g(u,v)} \Rightarrow \int K_r dS_r = \int K dS$

3) lo stesso risultato si può ottenere da $N_r(u,v) = N(u,v)$

tenendo conto che $\int K dS =$ area orient. della sup. sferica

descritta da $N : S \to S^2$ (<u>applicazione di Gauss</u>)

Superfici minime

$S \subset R^3$ superficie (regolare) minima
$\overset{\text{def}}{\iff}$ S è localmente di area minima (rispetto alle sue deform. loc.)
cioè: $\forall\, p \in S\ \exists V \subset S$ intorno aperto di p t.c. $\mathrm{Area}\, S \leq \mathrm{Area}\, S'$
per ogni superficie regolare $S' \cong S$ con $S - V \subset S'$

Prop. $S \subset R^3$ superficie minima $\Leftrightarrow H(p) = 0$ per ogni $p \in S$

Dim. $\omega : D \to R^3$ param. regolare di S, $\varepsilon : D \to R$ funzione diff.
$\rightsquigarrow \omega_t(u,v) = \omega(u,v) + t\,\varepsilon(u,v)\,N(u,v)$ con $t \in R$
param. regolare di S_t se $|t|$ è suffic. piccolo
$\rightsquigarrow X_u^t = X_u - t\,\varepsilon\, L_u + t\,\partial\varepsilon/\partial u\, N$
$X_v^t = X_v - t\,\varepsilon\, L_v + t\,\partial\varepsilon/\partial v\, N$
$\rightsquigarrow g_{uu}^t = g_{uu} - 2t\,\varepsilon\,\ell_{uu} + t^2\,(\dots)$
$g_{uv}^t = g_{uv} - 2t\,\varepsilon\,\ell_{uv} + t^2\,(\dots)$
$g_{vv}^t = g_{vv} - 2t\,\varepsilon\,\ell_{vv} + t^2\,(\dots)$
$\rightsquigarrow g^t = g - 4t\,\varepsilon\, H g + t^2\,(\dots)$

$A(t) = \mathrm{Area}\, S_t = \int_D \sqrt{g^t(u,v)}\,dudv$ funzione diff.

$$A'(0) = \frac{d}{dt}\int_D \sqrt{g^t(u,v)}\,dudv\Big|_{t=0} = \int_D \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g^t(u,v)}\Big|_{t=0} dudv$$
$$= -2\int_D \varepsilon(u,v)\,H(u,v)\sqrt{g(u,v)}\,dudv = -2\int_S \varepsilon H\, dS$$

$\Rightarrow$) $\mathrm{Area}\, S$ minima $\Rightarrow A'(0) = 0$ per ogni $\varepsilon(u,v)$
$\Rightarrow H(u,v) = 0$ per ogni $(u,v) \in D$

$\Leftarrow$) basta considerare le deformazioni locali ω_t
$H = 0 \Rightarrow A'(0) = 0$ per quanto visto sopra
inoltre si ha $A''(0) \geq 0$ quindi $\mathrm{Area}\, S$ minima

Esempi: 1) $S = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ (catenoide)
unica sup. min. di rot. (conn. e compl.) a meno di sim.
2) $S = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x \sin z = y \cos z\}$ (elicoide)
unica sup. min. rigata (conn. e compl.) a meno di sim.