Metriche riemanniane

$S \subset R^3$ superficie regolare

$g = \{g_p = \text{ prod. scalare su } T_pS\}_{p\in S}$ metrica riemanniana su S

$\overset{\text{def}}{\iff}$ g_p "varia in modo diffenziabile" rispetto al punto $p \in S$

$\iff$ $g_p(V(p), W(p))$ funzione diff. $\forall\, V, W$ campi di vettori su S

$\iff$ $\forall\, \omega : D \to R^3$ param. loc. reg. di S con param. $x = (x_1, x_2)$

$(\rightsquigarrow X_i = \partial\omega/\partial x_i$ campi vett. t.c. $T_{\omega(x)}S = \langle X_1(x), X_2(x)\rangle)$

$g_{ij} : D \to R$ definite $g_{ij}(x) = g_{\omega(x)}(X_i(x), X_j(x))$ sono diff.

(basta che $\forall\, p \in S\ \exists\, \omega$ param. intorno a p t.c. g_{ij} sono diff.)

Note: 1) $g \leftrightsquigarrow G = (g_{ij})_{i,j}$ matrice (simm.) di g rispetto a (X_1, X_2)

$(V = \sum_i v_i X_i\,,\ W = \sum_j w_j X_j \Rightarrow g(V, W) = \sum_{i,j} g_{ij} v_i w_j)$

2) $g \leftrightsquigarrow V \mapsto \|V\|_g \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{g(V, V)} = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} v_i v_j}$ (lunghezze)

$C = \gamma(I) \subset S \rightsquigarrow \operatorname{Lung} C \overset{\text{def}}{=\!=} \int_I \|\gamma'(t)\|_g\, dt$

3) $g \rightsquigarrow (V, W) \mapsto |\widehat{VW}|_g \overset{\text{def}}{=\!=} \arccos g(V, W)/\|V\|_g \|W\|_g$ (angoli)

4) $g \rightsquigarrow dS = \sqrt{\det G}\, dx_1 dx_2 = \sqrt{g(x_1, x_2)}\, dx_1 dx_2$ (aree)

$D = \omega(C) \subset S \rightsquigarrow \operatorname{Area} D \overset{\text{def}}{=\!=} \int_C \sqrt{g(x_1, x_2)}\, dx_1 dx_2$

5) $S \subset R^3 \rightsquigarrow g(V, W) = V \cdot W$ (I forma fond. di S in R^3)

6) $(g_{ij})_{i,j}$ metrica generica su A aperto in $R^2 \subset R^3$

superficie riemanniana $\overset{\text{def}}{=\!=}$ $(S, g) = (S, g^S) = S_g = S$

g — metrica riem. su S sup. regolare

Esempi: 1) $g_{xx} = g_{yy} = 1\,,\ g_{xy} = 0 \leftrightsquigarrow$ metrica euclidea su R^2

$g_{\rho\rho} = 1\,,\ g_{\vartheta\vartheta} = \rho^2\,,\ g_{\rho\vartheta} = 0$ (in coordinate polari)

2) $g_{\vartheta_1\vartheta_1} = g_{\vartheta_2\vartheta_2} = 1\,,\ g_{\vartheta_1\vartheta_2} = 0 \leftrightsquigarrow$ metrica piatta su T^2

(non si può ottenere come prima forma fond. in R^3)

3) $g_{\vartheta\vartheta} = \cos^2\varphi\,,\ g_{\varphi\varphi} = 1\,,\ g_{\vartheta\varphi} = 0 \leftrightsquigarrow$ metrica di $S^2 \subset R^3$

$g_{xx} = g_{yy} = 4/(1 + \rho^2)^2\,,\ g_{xy} = 0$ (in coord. stereogr.)

4) piano iperbolico (semipiano e disco di Poincaré)

$H^2 = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\},\ g_{xx} = g_{yy} = 1/y^2\,,\ g_{xy} = 0$

D^2 disco unit. in R^2, $g_{xx} = g_{yy} = 4/(1 - \rho^2)^2\,,\ g_{xy} = 0$

$\leftrightsquigarrow Q^2 = \{x^2 + y^2 - z^2 = -1\} \subset R^3_1$ spazio di Minkowski

$f : S_1 \to S_2$ omeo (locale) diff. regolare tra superfici riemanniane

<u>isometria (locale)</u> $\overset{\text{def}}{\iff} f_* : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ isom. lineare $\forall\, p \in S_1$
$(g^{S_2}_{f(p)}(f_*(V), f_*(W)) = g^{S_1}_p(V,W)\ \forall\, V,W)$

<u>conformità (locale)</u> $\overset{\text{def}}{\iff} f_* : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ simil. lineare $\forall\, p \in S_1$
$(g^{S_2}_{f(p)}(f_*(V), f_*(W)) = s(p)^2\, g^{S_1}_p(V,W))$

<u>similitudine (locale)</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ conformità (locale) con $s(p) = s$ cost.

<u>Note</u>: 1) isom. (loc.) $\Rightarrow$ simil. (loc.) $\Rightarrow$ conf. (loc.)
(f isom. (loc.) $\Leftrightarrow \|f_*(V)\|_{g^{S_2}} = \|V\|_{g^{S_1}}$ (f cons. lung./ang.)
f conf. (loc.) $\Leftrightarrow |\widehat{f_*(V) f_*(W)}|_{g^{S_2}} = |\widehat{VW}|_{g^{S_1}}$ (f cons. ang.)
solo le similitudini "conservano le forme")

2) $f : S_1 \to S_3$ e $g : S_2 \to S_3$ isom./simil./conf. (loc.)
$\Rightarrow g \circ f : S_1 \to S_3$ isom./simil./conf. (loc.)

3) f isom./simil./conf. $\Rightarrow f^{-1}$ isom./simil./conf.

4) isom./simil./conf. $\rightsquigarrow$ relaz. di equiv. tra superf. riemann.

S superficie riemanniana

$\rightsquigarrow \operatorname{Isom} S \overset{\text{def}}{=} (\{f : S \to S \mid f \text{ isometria}\}, \circ)$ — <u>gruppo delle isometrie di S</u>

$\cap$

$\operatorname{Sim} S \overset{\text{def}}{=} (\{f : S \to S \mid f \text{ similitudine}\}, \circ)$ — <u>gruppo delle similitudini di S</u>

$\cap$

$\operatorname{Conf} S \overset{\text{def}}{=} (\{f : S \to S \mid f \text{ conformità}\}, \circ)$ — <u>gruppo delle conformità di S</u>

<u>Nota</u>: $f : S_1 \to S_2$ omeo (locale) diff. reg. tra superf. riemann.
$\omega_1 : D_1 \to S_1$ param. locale regolare con parametri x_1, x_2
$\omega_2 : D_2 \to S_2$ param. locale regolare con parametri y_1, y_2

$$\rightsquigarrow f : \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2) \end{cases},\quad f^{-1} : \begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2) \\ x_2 = x_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

$$f \text{ isometria} \Leftrightarrow g^{\omega_2}_{kh}(y) = \textstyle\sum_{i,j} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_k}\dfrac{\partial x_j}{\partial y_h} g^{\omega_1}_{ij}(x)\ \forall\, k,h = 1,2$$
$$\Leftrightarrow g^{\omega_2}_{kh}(x) = g^{\omega_1}_{kh}(x) \text{ con } \omega_2 = f \circ \omega_1$$

$$f \text{ conf./simil.} \Leftrightarrow g^{\omega_2}_{kh}(y) = s(x)^2 \textstyle\sum_{i,j} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_k}\dfrac{\partial x_j}{\partial y_h} g^{\omega_1}_{ij}(x)\ \forall\, k,h = 1,2$$
$$\Leftrightarrow g^{\omega_2}_{kh}(x) = s(x)^2 g^{\omega_1}_{kh}(x) \text{ con } \omega_2 = f \circ \omega_1$$

Esempi: 1) $\pi : R^2 \to T^2$ def. $\pi(\vartheta_1, \vartheta_2) = (\cos\vartheta_1, \sin\vartheta_1, \cos\vartheta_2, \sin\vartheta_2)$
isometria locale tra il piano euclideo e il toro piatto

2) $f : H^2 \to D^2$ def. $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ con $H^2, D^2 \subset R^2 \cong \mathbb{C}^2$
isometria tra il semipiano e il disco di Poincaré

3) metrica sferica/iperb. conforme alla metrica euclidea

4) $z \mapsto s\,z \rightsquigarrow$ similitudine euclidea, isometria iperbolica

5) $z \mapsto z/\|z\|^2 \rightsquigarrow$ conform. euclidea, isom. sferica/iperb.

Derivata covariante

Prop. $S = (S, g)$ superficie riemanniana
$\exists!\,(V, W) \mapsto \nabla_V W$ con $V \in T_pS$, W campo vett. su S (int. a p)
derivata covariante di W rispetto a V

t.c. 1) $\nabla_{aV_1+bV_2} W = a\,\nabla_{V_1} W + b\,\nabla_{V_2} W$
2) $\nabla_V(aW_1 + bW_2) = a\,\nabla_V W_1 + b\,\nabla_V W_2$
$\Big\}$ $\mathbb{R}$-bilinearità

3) $\nabla_V(f\,W) = \dfrac{\partial f}{\partial V}\,W + f\,\nabla_V W$

4) $\dfrac{\partial\, g(W_1, W_2)}{\partial V} = g(\nabla_V W_1, W_2) + g(W_1, \nabla_V W_2)$

5) $\nabla_{X_1} X_2 = \nabla_{X_2} X_1$ per ogni $\omega : D \to S$ param. loc. reg.

Dim. Unicità (se esiste ∇ con le prop. $1, \ldots, 5$ allora è unica)
prop. 3 $\Rightarrow$ $\nabla_V W$ dipende solo da $W_{|A}$ con $p \in A \subset S$
($p \in A' \subset A$, $f(A') = 1$, $f(S - A) = 0$
$\Rightarrow \nabla_V W = \nabla_V(f\,W)$ che dipende solo da $W_{|A}$)

$\omega : D \to S$ parametrizzazione locale regolare
$\rightsquigarrow \Gamma_{ij}(x_1, x_2) = \nabla_{X_i(x_1,x_2)} X_j$ con $i, j = 1, 2$
$\Gamma_{ij}^k(x_1, x_2)$ comp. risp. a $\{X_1, X_2\}$ ($\Gamma_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$)
simboli di Christoffel di I specie

$\Gamma_{ijk}(x_1, x_2)$ proiezioni su $\{X_1, X_2\}$ ($\Gamma_{ijk} = g(\Gamma_{ij}, X_k)$)
simboli di Christoffel di II specie

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = g(\nabla_{X_i} X_j, X_k) + g(X_j, \nabla_{X_i} X_k) = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} \quad \text{(prop. 4)}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\Big) \quad \text{(prop. 5)}$$

$\Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \dfrac{1}{2}\sum_h g^{kh}\Big(\dfrac{\partial g_{jh}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g_{ih}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_h}\Big)$ $\quad (\Gamma_{ijk} = \sum_h g_{kh}\Gamma_{ij}^h)$

$V = v_1 X_1(p) + v_2 X_2(p) \in T_pS$, $W = w_1X_1 + w_2X_2$

$\Rightarrow \nabla_V W = \sum_{i,j} v_i \nabla_{X_i}(w_j X_j)$ (prop. 1 e 2)

$= \sum_{i,j}\Big(v_i \dfrac{\partial w_j}{\partial x_i} X_j + v_i w_j \Gamma_{ij}\Big)$ (prop. 3)

$= \sum_k \Big(\sum_i v_i \dfrac{\partial w_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} v_i w_j \Gamma_{ij}^k\Big) X_k$

Esistenza

$\nabla_V W$ definita come sopra con $\omega : D \to S$ param. loc. reg.
soddisfa le prop. $1, \dots, 4$ e la prop. 5 per ω $(\Gamma_{12} = \Gamma_{21})$
$\Rightarrow$ soddisfa la prop. 5 per ogni param. loc. reg.

unicità $\Rightarrow$ definizione ben posta (non dipende da ω)

Note: 1) $S \subset R^3$ con $g(V,W) = V \cdot W$ (I forma fond. di S in R^3)
$\Rightarrow \nabla_V^g W = \nabla_V^S W = \pi_{T_pS}(\partial W/\partial V)$ definita in precedenza

2) $g \rightsquigarrow \nabla = \nabla^g$ ma non viceversa $(\bar{g} = s\,g \Rightarrow \nabla^{\bar{g}} = \nabla^g)$

3) $f : S_1 \to S_2$ isom./simil. (loc.) $\Rightarrow \nabla^{S_2}_{f_*(V)} f_*(W) = f_*(\nabla^{S_1}_V W)$

4) V, W campi vett. su $S \rightsquigarrow \nabla_V W : p \mapsto \nabla_{V(p)} W$ campo vett.
(quindi Γ_{ij} campo vett., Γ_{ijk} e Γ_{ij}^k funzioni diff. su D)

5) $\nabla_V W \neq \nabla_W V$ (la prop. 5 non vale per $V, W \neq X_1, X_2$)

Esempi: 1) R^2 (metrica euclidea) $\rightsquigarrow \Gamma_{ij} = 0 \Rightarrow \nabla_V W = \partial W/\partial V$

2) $g_{11} = g_{22} = f(x_1,x_2)^2$, $g_{12} = 0$ (coordinate conformi)

$\rightsquigarrow \Gamma_{11}^1 = \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \quad \Gamma_{22}^1 = -\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$

$\Gamma_{11}^2 = -\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \quad \Gamma_{22}^2 = \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$

3) $H^2 \rightsquigarrow \Gamma_{xx}^x = \Gamma_{yy}^x = \Gamma_{xy}^y = \Gamma_{yx}^y = 0$

$\Gamma_{xx}^y = 1/y$, $\Gamma_{yy}^y = \Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yx}^x = -1/y$

$S = (S, g)$ superficie riemanniana

$C \subset S$ curva regolare, $\gamma : I \to S$ param. regolare di C

V campo di vettori tangenti a S lungo C

parallelo (lungo C) $\overset{\text{def}}{\iff} \nabla_{\gamma'(t)} V = 0 \ \forall t \in I$

Note: 1) la definizione non dipende dalla param. (né dall'orient.)

2) $\omega : D \to S$ param. locale regolare di S

$\rightsquigarrow \gamma(t) = \omega(x_1(t), x_2(t))\,,\ V(t) = V(\gamma(t)) = \sum_i v_i(t) X_i(t)$

V parallelo $\Leftrightarrow v_k'(t) = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x_i'(t) v_j(t)$ per $k = 1, 2$

Prop. S superf. riemann., $C \subset S$ arco di curva regolare tra p e q

$V \in T_pS \rightsquigarrow V_C$ unico campo parallelo lungo C t.c. $V_C(p) = V$

$\rightsquigarrow \tau_{p,q}^C : T_pS \to T_qS$ definita $\tau_{p,q}^C(V) = V_C(q)\ \forall\, V \in T_pS$

trasporto parallelo da p a q lungo C

Dim. $\gamma : I \to S$ param. regolare di C t.c. $\gamma(0) = p$

$\rightsquigarrow V_C$ unica soluzione globale del prob. di Cauchy locale:

$$v_k'(t) = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x_i'(t) v_j(t)\,,\ \sum_k v_k(0) X_k = V$$

Note: 1) $\tau_{p,q}^C$ applicazione lineare ben definita

2) $\tau_{p,q}^C$ isom. euclidea ($g(V_C, W_C) = g(V, W)$ cost. lungo C)

3) R^2 (metrica euclidea) $\Rightarrow \tau_{p,q}^C =$ traslazione (indip. da C)

4) in generale $\tau_{p,q}^{C_1} \neq \tau_{p,q}^{C_2}$ o equivalentemente $\tau_{p,p}^C \neq \mathrm{id}_{T_pS}$

5) $\gamma : I \to S$ differenziabile (regolare)

V campo di vettori tangenti a S lungo $C = \gamma(I)$

$$\Rightarrow \nabla_{\gamma'(t)} V = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\tau_{\gamma(t),\gamma(t+\varepsilon)}^{\gamma})^{-1} V(\gamma(t+\varepsilon)) - V(\gamma(t))}{\varepsilon}$$

Geodetiche

$S = (S, g)$ superficie riemanniana

$\gamma : I \to S$ parametrizzazione geodetica

$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \gamma'$ parallelo lungo $C = \gamma(I) \subset S$ ($\Leftrightarrow \nabla_{\gamma'(t)} \gamma' = 0\ \ \forall\, t \in I$))

linea geodetica in S

Note: 1) $S \subset R^3$ con $g(V, W) = V \cdot W$ (I forma fond. di S in R^3)

$\Rightarrow$ le geodetiche sono quelle definite in precedenza

2) γ param. geod. $\Rightarrow \gamma$ costante o regolare ($\|\gamma'(t)\| \neq 0$ cost.)

3) $\omega : D \to S$ param. loc. reg. di $S \rightsquigarrow \gamma(t) = \omega(x_1(t), x_2(t))$

γ param. geod. $\Leftrightarrow x_k''(t) = -\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k x_i'(t) x_j'(t)$ per $k = 1, 2$

equazioni delle geodetiche di S

Prop. S superficie riemanniana, $p \in S$, $V \in T_p(S)$
$\rightsquigarrow \gamma_V : I_V \to S$ unica parametrizzazione geodetica massimale t.c. $\gamma_V(0) = p$ e $\gamma'_V(0) = V$
$\rightsquigarrow C_V = \gamma_V(I_V)$ linea geod. se $V \neq 0$ ($= \{p\}$ se $V = 0$)

Dim. γ_V unica soluz. globale massimale del prob. di Cauchy locale:
$x''_k(t) = -\sum_{ij} \Gamma^k_{ij} x'_i(t) x'_j(t)$, $\sum_k x'_k(0) X_k = V$, $x(0) = p$

Note: 1) $\forall\, a \neq 0 \Rightarrow I_{aV} = I_V/a$ e $\gamma_{aV}(t) = \gamma_V(at)\ \ \forall\, t \in I_{aV}$
$\Rightarrow C_{aV} = C_V$ (unica linea geod. con dir. V in p)
2) $f : S_1 \to S_2$ isom./simil. (locale) $\Rightarrow f \circ \gamma_V = \gamma_{f_*(V)}$
$\Rightarrow f(C_V) = C_{f_*(V)}$
3) $f \in \mathrm{Isom}\, S$ t.c. $C = \{p \in S \mid f(p) = p\}$ curva regolare
$\Rightarrow C$ linea geodetica in S (non vale il viceversa)

Esempi: 1) R^2 (metrica euclidea) $\rightsquigarrow$ geodetiche = rette
2) $S^2 \subset R^3 \rightsquigarrow$ geodetiche = cerchi massimi
3) $H^2 \rightsquigarrow$ geodetiche $= \begin{cases} \text{semirette vert. uscenti dall'asse } x \\ \text{semicirconf. centr. sull'asse } x \end{cases}$

$$\left(x''(t) = \frac{2x'(t)y'(t)}{y(t)}\ ,\ y''(t) = \frac{y'(t)^2 - x'(t)^2}{y(t)} \right)$$

4) D^2 (metrica iperb.) $\rightsquigarrow$ geodetiche $= \begin{cases} \text{diametri di } D^2 \\ \text{archi circ. } \perp S^1 \end{cases}$

$S = (S, g)$ superficie riemanniana
$p \in S \rightsquigarrow e_p : D_pS \to S$ <u>applicazione esponenziale</u> di S in p
appl. diff. t.c. $e_p(V) = \gamma_V(1)$ con $0 \in D_pS \subset T_pS \cong R^2$ ap.
regolare in un intorno di 0 ($(e_p)_* \cong \mathrm{id} : T_0(D_pS) \to T_pS$)

S superficie <u>completa</u> $\overset{\text{def}}{\iff} I_V = R\ \ \forall\, V \in T_pS\ \ \forall\, p \in S$
$\iff D_p = T_pS\ \ \forall\, p \in S$

Prop. $f : S_1 \to S_2$ isom./simil. (locale) tra sup. riemann. connesse univoc. determinata da $f(p)$ e $f_* : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ con $p \in S_1$

Dim. $A = \{q \in S_1 \mid f(q)$ e $f_* : T_qS_1 \to T_{f(q)}S_2$ univoc. determ.$\} \subset S_1$
chiuso (contin.), aperto ($f \circ e_q = e_{f(q)} \circ f_*$), $p \in A \Rightarrow A = S_1$

Nota: S superf. riemann. connessa, $\forall\, p, q \in S$, $V \in T_pS$, $W \in T_qS$
esistono al più due $f \in \operatorname{Sim} S$ t.c. $f(p) = q$ e $f_*(V) = W$
inoltre $s_f = \|W\|/\|V\|$, quindi $f \in \operatorname{Isom} S$ se $\|V\| = \|W\|$
(se S orientabile, una conserva l'orient., l'altra la inverte)

Esempi: 1) $\operatorname{Isom} R^2 =$ *isom. affini*, $\operatorname{Sim} R^2 =$ *simil. affini*
$\operatorname{Conf} R^2 = \operatorname{Sim} R^2$ ($\nexists$ conformità non banali)

2) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{Isom}^+ S^2 \cong \mathrm{SO}(3)\\ \operatorname{Isom} S^2 \cong \mathrm{O}(3)\end{array}\right\}$ restriz. delle isom. lineari di R^3

$\operatorname{Sim} S^2 = \operatorname{Isom} S^2$ ($\nexists$ similitudini non banali)
$\operatorname{Conf}^+ S^2 \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ ($\exists$ conformità non banali)

3) $\operatorname{Isom}^+ H^2 \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightsquigarrow f_M : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

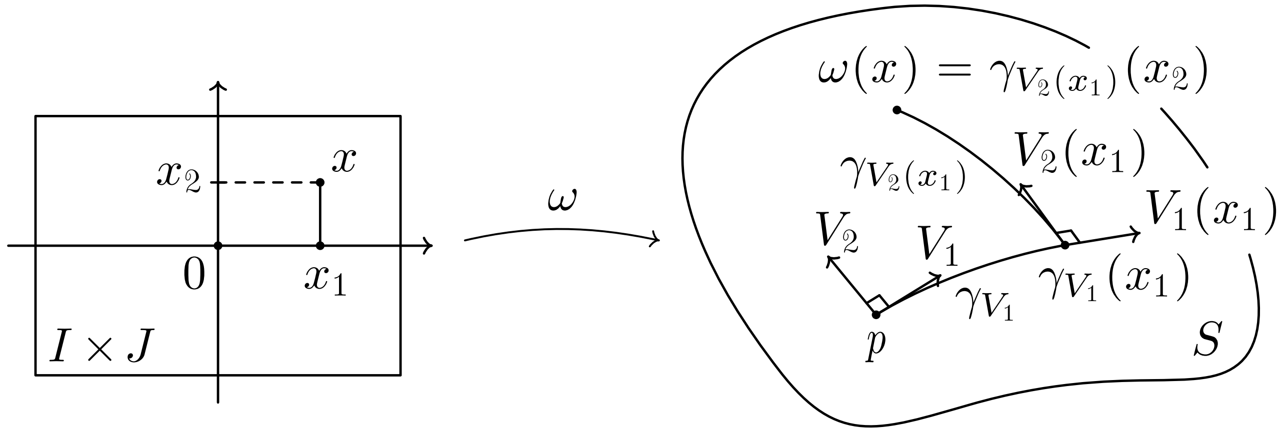
$$\Big(c > 0 \rightsquigarrow z \mapsto cz + d \mapsto -\frac{1}{cz + d} \mapsto -\frac{ad/c - b}{cz + d} + \frac{a}{c}\Big)$$

$\operatorname{Isom} H^2 = \langle \operatorname{Isom}^+ H^2, z \mapsto -\bar{z}$ (simm. risp. asse y)$\rangle$
$\operatorname{Sim} H^2 = \operatorname{Isom} H^2$ ($\nexists$ similitudini non banali)
$\operatorname{Conf} H^2 = \operatorname{Isom} H^2$ ($\nexists$ conformità non banali)

Nota: negli esempi sopra c'è un'azione semplicemente transitiva
di Isom^+ (isometrie che conservano l'orient.) sui versori
e di Isom sulle basi ortonormali.

Coordinate normali

$S = (S, g)$ superficie riemanniana (orientata)
$p \in S$, $V_1, V_2 \in T_pS$ base ortornomale (positiva)
$\rightsquigarrow \gamma_{V_1} : I \to S$ unica geodetica t.c. $\gamma_{V_1}(0) = p$, $\gamma'_{V_1}(0) = V_1$
$V_1(t) = \gamma'_{V_1}(t), V_2(t) \in T_{\gamma_{V_1}(t)}S$ base ortonormale (positiva)
$\rightsquigarrow \gamma_{V_2(t)} : J_t \to S$ unica geod. t.c. $\gamma_{V_2(t)}(0) = \gamma_{V_1}(t)$, $\gamma'_{V_2(t)}(0) = V_2(t)$
$\rightsquigarrow \omega : I \times J \to S$ definita $\omega(x_1, x_2) = \gamma_{V_2(x_1)}(x_2)$
param. locale regolare di S per I, J suff. piccoli
con (x_1, x_2) coordinate normali intorno a $p = \omega(0, 0)$



Prop. S superficie riemanniana

(x_1, x_2) coordinate normali $\Rightarrow g_{12} = 0\,,\ g_{22} = 1 \Rightarrow$

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}X_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}X_2\,,\ \Gamma_{12} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}X_1\,,\ \Gamma_{22} = 0$$

Dim. $g_{22} = 1$ e $\Gamma_{22} = 0$ per costruzione

$\Rightarrow \Gamma_{221} = 0 \Rightarrow \partial g_{12}/\partial x_2 = 0 \Rightarrow g_{12} = 0$ (vale per $x_2 = 0$)

$$\Rightarrow \Gamma_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\,,\ \Gamma_{112} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\,,\ \Gamma_{121} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\,,\ \text{altri} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\,,\ \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\,,\ \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\,,\ \text{altri} = 0$$

Note: 1) $S \subset R^3$ sup. di rotazione intorno a un parallelo geod.
$\rightsquigarrow$ coordinate normali (es.: coordinare sferiche di S^2)

2) equazione delle geodetiche in coordinate normali:

$$\begin{cases} x_1''(t) = -\dfrac{1}{2g_{11}}\Big(\dfrac{\partial g_{11}}{\partial x_1}x_1'(t) + 2\dfrac{\partial g_{11}}{\partial x_2}x_2'(t)\Big)\,x_1'(t) \\[2ex] x_2''(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\,x_1'(t)^2 \end{cases}$$

Curvatura riemanniana

$S = (S, g)$ superficie riemanniana

$\omega : D \to S$ parametrizzazione locale regolare

$\rightsquigarrow R_{ij} : V \mapsto R_{ij}(V) = \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}V - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}V \ \ \forall V$ campo vett.

$\hookrightarrow$ operatori di curvatura con $i, j = 1, 2$

Note: 1) $R_{11} = R_{22} = 0\,,\ R_{21} + R_{12} = 0$

2) R_{12} $\mathbb{R}$-lineare e $R_{12}(fV) = fR_{12}(V)\ \forall f$ funzione diff.

Prop. $g(R_{12}(V),W)+g(V,R_{12}(W))=0$ (R_{12} operatore antisimm.)

Dim. Basta provare $g(R_{12}(X_i),X_j)+g(X_i,R_{12}(X_j))=0\ \forall\, i,j$

$$g(R_{12}(X_i),X_j)+g(X_i,R_{12}(X_j)) =$$
$$= \frac{\partial g(\nabla_{X_2}X_i,X_j)}{\partial X_1}-\frac{\partial g(\nabla_{X_1}X_i,X_j)}{\partial X_2}$$
$$+\frac{\partial g(X_i,\nabla_{X_2}X_j)}{\partial X_1}-\frac{\partial g(X_i,\nabla_{X_1}X_j)}{\partial X_2}=\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_2\partial x_1}=0$$

$\rightsquigarrow R_{ijkh}=g(R_{ij}(X_k),X_h)=g(\nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k-\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k,X_h)$
tensore di curvatura $(i,j,k,h=1,2)$

Note: 1) $R_{ijkh}=0$ se $i=j$ o $k=h$

2) $R_{ijkh}+R_{jikh}=R_{ijkh}+R_{ijhk}=0$

3) $R_{ijkh}=g(\nabla_{X_i}(\sum_\ell \Gamma^\ell_{jk}X_\ell)-\nabla_{X_j}(\sum_\ell\Gamma^\ell_{ik}X_\ell),X_h)$
$$= g\Big(\sum_\ell\Big(\frac{\partial\Gamma^\ell_{jk}}{\partial x_i}X_\ell+\Gamma^\ell_{jk}\Gamma_{i\ell}-\frac{\partial\Gamma^\ell_{ik}}{\partial x_j}X_\ell-\Gamma^\ell_{ik}\Gamma_{j\ell}\Big),X_h\Big)$$
$$=\sum_\ell\Big(g_{h\ell}\Big(\frac{\partial\Gamma^\ell_{jk}}{\partial x_i}-\frac{\partial\Gamma^\ell_{ik}}{\partial x_j}\Big)+\Gamma^\ell_{jk}\Gamma_{i\ell h}-\Gamma^\ell_{ik}\Gamma_{j\ell h}\Big)$$

Prop. $S=(S,g)$ superficie riemanniana
$K=-R_{1212}/g$ funzione diff. ben definita su S
curvatura riemanniana

Dim. Basta provare che R_{1212}/g non dipende dalla param.
$\omega: D\to S$ param. locale reg. con param. $(x_1,x_2)\rightsquigarrow X_1,X_2$
$\omega': D'\to S$ param. locale reg. con param. $(y_1,y_2)\rightsquigarrow Y_1,Y_2$
$Y_i=\sum_j m_{ij}X_j$ con $M=(m_{ij})_{i,j}=(\partial x_j/\partial y_i)_{i,j}$
$\Rightarrow G^y=M^*G^xM\Rightarrow \det G^y=\det M^2\det G^x$

$$\begin{aligned} R^y_{12}(V) &= \nabla_{Y_1}\nabla_{Y_2}V-\nabla_{Y_2}\nabla_{Y_1}V\\ &=\textstyle\sum_{i,j}(m_{1i}\nabla_{X_i}(m_{2j}\nabla_{X_j}V)-m_{2i}\nabla_{X_i}(m_{1j}\nabla_{X_j}V))\\ &=\textstyle\sum_{i,j}\Big(m_{1i}\frac{\partial m_{2j}}{\partial x_i}-m_{2i}\frac{\partial m_{1j}}{\partial x_i}\Big)\nabla_{X_j}V\\ &\quad+\textstyle\sum_{i,j}(m_{1i}m_{2j}-m_{2i}m_{1j})\nabla_{X_i}\nabla_{X_j}V\\ &=\det M\,(\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}V-\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}V)=\det M\,R^x_{12}(V)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow R^y_{1212} = g(R^y_{12}(Y_1), Y_2) = \det M\, g(R^x_{12}(Y_1), Y_2)$$
$$= \det M \textstyle\sum_{i,j} m_{1i} m_{2j}\, g(R^x_{12}(X_i), X_j) = \det M^2\, R^x_{1212}$$
$$\Rightarrow R^y_{1212} / \det G^y = R^x_{1212} / \det G^x$$

Note: 1) $S \subset R^3$ con $g(V,W) = V \cdot W$ (I forma fond. di S in R^3)
$\Rightarrow$ curvatura riemanniana = curvatura di Gauss
in particolare: R^2 (metrica euclidea) $\rightsquigarrow K = 0$ (costante)
$S^2 \subset R^3 \rightsquigarrow K = 1$ (costante)

2) $g_{11} = g_{22} = f(x_1, x_2)^2$, $g_{12} = 0$ (coordinate conformi)
$\rightsquigarrow K = -(\partial^2(\log f)/\partial x_1^2 + \partial^2(\log f)/\partial x_2^2)/f^2$
in particolare: $H^2 \rightsquigarrow K = -1$ (costante)

3) (x_1, x_2) coordinate normali $\rightsquigarrow K = -(\partial^2\sqrt{g_{11}}/\partial x_2^2)/\sqrt{g_{11}}$

4) $f : S_1 \to S_2$ isom. (loc.) $\Rightarrow K_{S_2}(f(p)) = K_{S_1}(p)\ \forall\, p \in S_1$
$f : S_1 \to S_2$ simil. (loc.) $\Rightarrow K_{S_2}(f(p)) = K_{S_1}(p)/s^2\ \forall\, p \in S_1$

Superfici con curvatura costante

Modelli: 1) R^2 (metrica euclidea) $\rightsquigarrow K = 0$
2) $S^2_r \subset R^3$ (sfera di raggio $r > 0$) $\rightsquigarrow K = 1/r^2 > 0$
3) $H^2_r = H^2$ con $g_{xx} = g_{yy} = r^2/y^2$, $g_{xy} = 0 \rightsquigarrow K = -1/r^2 < 0$

Teorema di Minding

S_1, S_2 superfici riemanniane con curvatura costante K,
$\forall\, p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$, $\forall\, V_1 \in T_{p_1}S_1$, $V_2 \in T_{p_2}S_2$ versori
$\exists\, f : A_1 \to A_2$ isometria tale che $f(p_1) = p_2$ e $f_*(V_1) = V_2$
con $A_i \subset S_i$ intorno aperto di p_i

Dim. $\omega : I \times J \to S$ param. locale con coord. normali (x_1, x_2)
$\Gamma_{11}(x_1, 0) = 0 \Rightarrow \Gamma_{112}(x_1, 0) = 0 \Rightarrow \partial g_{11}/\partial x_2(x_1, 0) = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \partial^2\sqrt{g_{11}}/\partial x_2^2 = -K\sqrt{g_{11}} \\ \partial g_{11}/\partial x_2(x_1,0) = 0 \\ g_{11}(x_1, 0) = 1 \end{cases}$$

g_{11} dipende solo da x_2
(non dipende da x_1)

$$\Rightarrow g_{11} = \begin{cases} 1 & \text{se } K = 0 \\ \cos^2\sqrt{K}x_2 & \text{se } K > 0 \\ \cosh^2\sqrt{-K}x_2 & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

g_{11} univocamente
determinato da K

$p_i, V_i, V_i^\perp \rightsquigarrow \omega_i : I \times J \to A_i$ param. loc. di S_i con coord. norm.
$\rightsquigarrow f = \omega_2 \circ \omega_1^{-1} : A_1 \to A_2$ isom. t.c. $f(p_1) = p_2$ e $f_*(V_1) = V_2$

<u>Nota</u>: f unica a meno di restriz. e rifles. (dipende da $V_1^\perp$ e $V_2^\perp$)

<u>Corol</u>. S superficie riemanniana con curvatura costante K

$$\Rightarrow S \text{ localmente isometrica a } \begin{cases} R^2 & \text{se } K = 0 \\ S^2_{1/\sqrt{K}} & \text{se } K > 0 \\ H^2_{1/\sqrt{-K}} & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

<u>Dim</u>. $\forall K \in R$ esiste superficie modello con curvatura costante K

<u>Teorema</u>. S superficie riemanniana completa e sempl. connessa con curvatura costante K

$$\Rightarrow S \text{ isometrica (globalmente) a } \begin{cases} R^2 & \text{se } K = 0 \\ S^2_{1/\sqrt{K}} & \text{se } K > 0 \\ H^2_{1/\sqrt{-K}} & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

<u>Dim</u>. $\omega : I \times J \to S$ param. locale con coord. normali (x_1, x_2)

$K \leq 0 \Rightarrow \omega$ si estende a un rivest. diff. reg. (completezza)
$\widetilde{\omega} : R^2 \to S \Rightarrow \widetilde{\omega}$ omeo diff. reg. (semplice conn.)
$\rightsquigarrow f = \widetilde{\omega} \circ \widetilde{\omega}_{R^2}^{-1}$ o $\widetilde{\omega} \circ \widetilde{\omega}_{H^2_{1/\sqrt{-K}}}^{-1}$ isometria

$K > 0 \Rightarrow \omega$ si estende a un rivest. diff. reg. (completezza)
$\widetilde{\omega} : R \times \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}\right) \to S - \{q_1, q_2\}$
$\rightsquigarrow \widetilde{\omega} : S^1 \times \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}\right) \to S - \{q_1, q_2\}$
omeo differenziabile regolare
$\rightsquigarrow \widetilde{\omega} \circ \widetilde{\omega}_{S^2_{1/\sqrt{K}}}^{-1} : S^2_{1/\sqrt{K}} - \{p_1, p_2\} \to S - \{q_1, q_2\}$ isom.
$\rightsquigarrow f : S^2_{1/\sqrt{K}} \to S$ isometria (con $p_i', q_i' \neq p_i, q_i$)

<u>Corol</u>. S superficie riemanniana completa e connessa con curvatura costante K
$\Rightarrow S$ è isometrica al quoziente di R^2, $S^2_{1/\sqrt{K}}$ o $H^2_{1/\sqrt{-K}}$ (a seconda del segno di K) mediante l'azione di un gruppo propriamente discontinuo di isometrie

<u>Dim</u>. $\pi : \widetilde{S} \to \widetilde{S}/G_\pi \cong S$ rivestimento universale di S

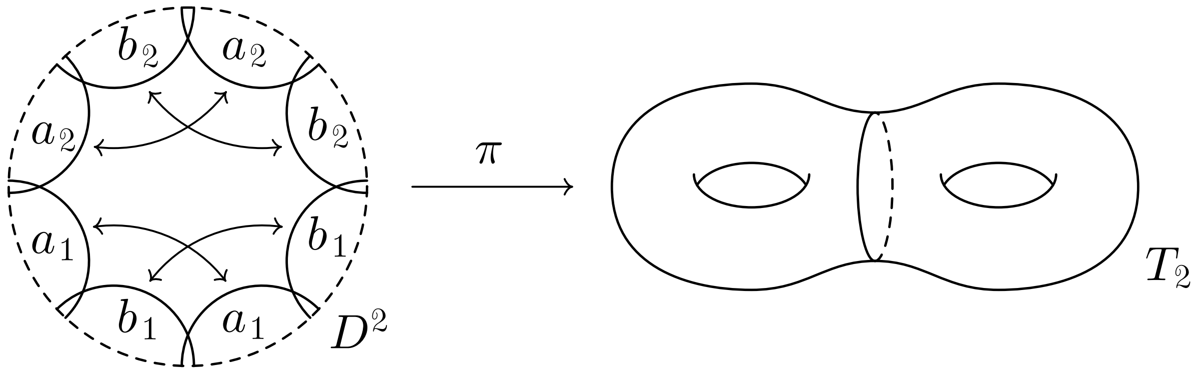
$S = (S, g) \rightsquigarrow (\widetilde{S}, \widetilde{g})$ def. $\widetilde{g}_p(V, W) = g_{\pi(p)}(\pi_*(V), \pi_*(W))$

$\Rightarrow \pi : (S, g) \to (\widetilde{S}, \widetilde{g})$ isometria locale

$f : (\widetilde{S}, \widetilde{g}) \to (\widetilde{S}, \widetilde{g})$ isometria $\forall\, f \in G_\pi$

$\Rightarrow K_{\widetilde{S}} = K$ costante $\Rightarrow \widetilde{S}$ isometrica a R^2, $S^2_{1/\sqrt{K}}$ o $H^2_{1/\sqrt{-K}}$

<u>Nota</u>: $S \cong T_g$ superficie connessa orientabile di genere $g \geq 0$ si può ottenere così, infatti ammette metrica riemann. con $K = 1$ se $g = 0$, $K = 0$ se $g = 1$, $K < 0$ se $g > 1$.



<u>Curve in superfici riemanniane</u>

$S = (S, g)$ superficie riemanniana <u>orientata</u>

$C \subset S$ curva regolare <u>orientata</u>

$\alpha : I \to C$ <u>param. naturale</u> ($\|\alpha'(s)\|_g = 1\ \forall\, s \in I$) con l'orient. data

$p = \alpha(s) \rightsquigarrow T(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha'(s) \longleftarrow$ <u>versore tangente</u>

$\rightsquigarrow N(p) \overset{\text{def}}{=\!=}$ vers. t.c. $(T(p), N(p))$ base ortonorm. <u>positiva</u>

<u>versore normale</u>

$\rightsquigarrow (T(p), N(p))$ <u>riferimento di Frenet</u> di C in p

<u>Note</u>: 1) T, N campi di versori ben definiti (non dipendono da α)

2) orientazione opposta su $C \rightsquigarrow$ versori opposti

orientazione opposta su $S \rightsquigarrow$ versore normale opposto

3) $g(T(p), T(p)) = 1 \ \Rightarrow\ g(\nabla_{T(p)} T, T(p)) = 0$

$g(N(p), N(p)) = 1 \ \Rightarrow\ g(\nabla_{T(p)} N, N(p)) = 0$

$g(T(p), N(p)) = 1 \ \Rightarrow\ g(\nabla_{T(p)} N, T(p)) = -g(\nabla_{T(p)} T, N(p))$

$K(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \nabla_{T(p)} T = \kappa(p)\, N(p) \longleftarrow$ <u>vettore curvatura</u> di C in p
$\kappa(p) \overset{\text{def}}{=\!=} g(\nabla_{T(p)} T, N(p)) \longleftarrow$ <u>curvatura</u> di C in p

<u>Note</u>: 1) K campo vett. lungo C, non dipende dall'orient. di C
2) κ funz. diff. su C, orient. opposta $\rightsquigarrow$ curvatura opposta
3) $C \subset S$ linea geodetica $\Leftrightarrow \kappa(p) = 0\ \forall\, p \in C$
4) $\begin{cases} \nabla_{T(p)} T = \kappa(p)\, N(p) \\ \nabla_{T(p)} N = -\,\kappa(p)\, T(p) \end{cases}$ <u>formule di Frenet</u>

$\omega : D \to S$ param. regolare di S con l'orientazione data
$\alpha : I \to C$ <u>param. naturale</u> con l'orientazione data
$\rightsquigarrow \alpha(s) = \omega(x_1(s), x_2(s))$
$\rightsquigarrow T(s) = x_1'(s) X_1 + x_2'(s) X_2$ con $\sum_{i,j} g_{ij} x_i'(s) x_j'(s) = 1$

$$N(s) = -\frac{g_{12} x_1'(s) + g_{22} x_2'(s)}{\sqrt{g}}\, X_1 + \frac{g_{11} x_1'(s) + g_{12} x_2'(s)}{\sqrt{g}}\, X_2$$

$$\rightsquigarrow \kappa(s) = -\frac{x_1''(s) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1 x_i'(s) x_j'(s)}{(g_{12} x_1'(s) + g_{22} x_2'(s))/\sqrt{g}} = \frac{x_2''(s) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^2 x_i'(s) x_j'(s)}{(g_{11} x_1'(s) + g_{12} x_2'(s))/\sqrt{g}}$$

<u>Nota</u>: (x_1, x_2) coordinate normali
$\rightsquigarrow \vartheta(s) = \widehat{X_1 T(s)}$ funz. diff. (definita per sollev. mod 2π)

$$\rightsquigarrow T(s) = \frac{\cos\vartheta(s)}{\sqrt{g_{11}}}\, X_1 + \sin\vartheta(s)\, X_2$$

$$N(s) = -\frac{\sin\vartheta(s)}{\sqrt{g_{11}}}\, X_1 + \cos\vartheta(s)\, X_2$$

$$\rightsquigarrow \kappa(s) = \vartheta'(s) - \frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial x_2}\, x_1'(s)$$

$\gamma : I \to C$ <u>param. regolare</u> con l'orientazione data
$\rightsquigarrow \gamma(t) = \omega(x_1(t), x_2(t))$
$V(t) = x_1'(t) X_1 + x_2'(t) X_2 \longleftarrow$ <u>vettore velocità</u>
$v(t) = \|V(t)\|_g = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} x_i'(t) x_j'(t)} \longleftarrow$ <u>velocità (scalare)</u>

$$\rightsquigarrow T(t) = \frac{x_1'(t)}{v(t)} X_1 + \frac{x_2'(t)}{v(t)} X_2$$

$$N(t) = -\frac{g_{12} x_1'(t) + g_{22} x_2'(t)}{\sqrt{g}\, v(t)}\, X_1 + \frac{g_{11} x_1'(t) + g_{12} x_2'(t)}{\sqrt{g}\, v(t)}\, X_2$$

$$\rightsquigarrow \kappa(t) = \frac{x_1'(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2'(t) + \sum_{i,j}(\Gamma_{ij}^2 x_1'(t) - \Gamma_{ij}^1 x_2'(t))x_i'(t)x_j'(t)}{v(t)^3/\sqrt{g}}$$

<u>Nota</u>: $g_{11} = g_{22} = f(x_1, x_2)^2$, $g_{12} = 0$ (coordinate conformi)

$$\rightsquigarrow \kappa(t) = \frac{x_1'(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2'(t)}{v(t)^3 f^{-2}} + \frac{1}{v(t)f}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}x_2'(t) - \frac{\partial f}{\partial x_2}x_1'(t)\Big)$$

<u>Prop</u>. $C_1 \subset S_1$ e $C_2 \subset S_2$ curve orient. in superf. riemann. orient., $f : S_1 \to S_2$ isom. (locale) t.c. $C_2 = f(C_1)$ come curve orient.
$\Rightarrow K_{C_2}(f(p)) = f_*(K_{C_1}(p))$ e $\kappa_{C_2}(f(p)) = \pm\,\kappa_{C_1}(p)$ $\forall\, p \in C_1$
($\pm$ a seconda che f conserva/inverte l'orient. delle superf.)

<u>Dim</u>. $T_{C_2} = f_*(T_{C_1}) \Rightarrow \nabla_{T_{C_2}(f(p))}T_{C_2} = f_*(\nabla_{T_{C_1}(p)}T_{C_1})$
$N_{C_2}(f(p)) = \pm\, f_*(N_{C_1}(p))$ se h cons./inverte l'orient.

<u>Teorema fondamentale generalizzato</u>

$C_1, C_2 \subset S = R^2, S_r^2, H_r^2$ curve regolari orientate connesse sono equivalenti:

1) $\exists\, f \in \operatorname{Isom} S$ tale che $C_2 = f(C_1)$ (come curve orientate)
2) $\exists\, i : C_1 \to C_2$ isometria tale che $\kappa_2(i(p)) = \pm\,\kappa_1(p)$ $\forall\, p \in C_1$
3) $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 : I \to R^2$ parametrizzazioni naturali globali di C_1, C_2 tali che $\kappa_2(s) = \pm\,\kappa_1(s)$ $\forall\, s \in I$

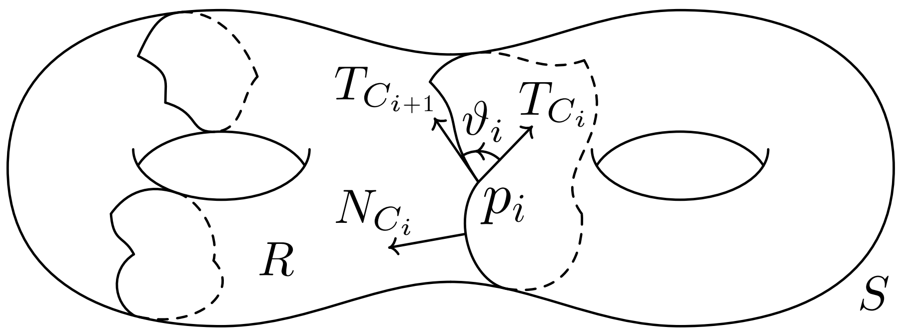
<u>Dim</u>. 1) $\Rightarrow$ 2) $i = f_{|C_1} : C_1 \to C_2$
2) $\Rightarrow$ 3) α_1 param. nat. di $C_1 \rightsquigarrow \alpha_2 = i \circ \alpha_1$ param. nat. di C_2
3) $\Rightarrow$ 1) possiamo supporre $0 \in I$ (a meno di traslaz. in R) e $\kappa_2(s) = \kappa_1(s)$ $\forall\, s \in I$ (a meno di riflessioni di S)
$f \in \operatorname{Isom}^+ S$ t.c. $f(\alpha_1(0)) = \alpha_2(0)$, $f_*(T_1(0)) = T_2(0)$
formule di Frenet $\rightsquigarrow$ probl. di Cauchy $\Rightarrow f \circ \alpha_1 = \alpha_2$

<u>Nota</u>: nel teorema è essenziale che S sia (globalmente) <u>omogenea</u> (tutti i punti equiv.) e <u>isotropa</u> (tutte le direzioni equiv.)
S superf. riemann. con curvatura costante ($\Rightarrow$ localmente omogenea e isotropa) non basta (geodetiche in $S^1 \times R \subset R^3$)

Esempi: 1) $R^2 \rightsquigarrow C$ connessa, $\kappa_C = \text{cost.} \Leftrightarrow C \subset$ circ. o retta
(la curvatura si riduce a quella già vista nel piano)
2) $S^2 \rightsquigarrow C$ connessa, $\kappa_C = \text{cost.} \Leftrightarrow C \subset$ circonferenza
($\kappa_C = 0$ se $C \subset$ circonf. massima che è geodetica)
3) $H^2 \rightsquigarrow C$ connessa, $\kappa_C = \text{cost.} \Leftrightarrow C \subset$ circonf. o retta
(come in R^2, ma $\kappa_C \neq 0$ per $C \subset$ retta non verticale)

Teorema di Gauss-Bonnet

$S = (S, g)$ superficie riemanniana orientata
$R \subset S$ chiuso regolare ($R = \operatorname{Cl}\operatorname{Int} R$) compatto
t.c. $\operatorname{Fr} R = C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ curva chiusa regolare a tratti
orientata in modo che N_{C_i} punti verso $\operatorname{Int} R$
$\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ angoli esterni (ϑ_i = angolo orientato da $T_{C_i}(p_i)$
a $T_{C_{i+1}}(p_i)$ in $p_i = C_i \cap C_{i+1}$)



Teorema. $\int_R K\,dS + \int_C \kappa\,ds + \sum_i \vartheta_i = 2\pi\,\chi(R)$

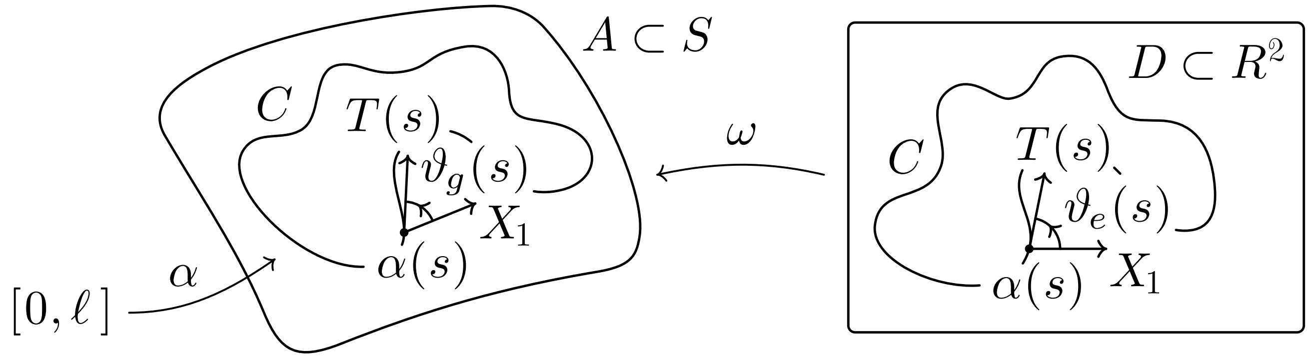
Dim. I caso speciale ($R \subset A \cong R^2$ con coord. normali (x_1, x_2),
$C \subset A$ curva di Jordan regolare)

$$\int_R K\,dS = \int_R K(x_1, x_2)\sqrt{g}\,dx_1 dx_2 = -\int_R \frac{\partial^2 \sqrt{g_{11}}}{\partial x_2^2}\,dx_1 dx_2$$

$$= \int_C \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial x_2}\,dx_1 \text{ (formula di Green)}$$

$\alpha : [0, \ell] \to C$ parametrizzazione naturale globale

$$\rightsquigarrow \int_C \kappa\,ds = \int_C \Big(\vartheta_g'(s) - \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial x_2}\,x_1'(s)\Big)\,ds$$



$\Rightarrow \int_R K dS + \int_C \kappa\, ds = \int_C \vartheta'_g(s)\, ds = \int_C \vartheta'_e(s)\, ds = 2\pi$

$(t \mapsto \int_C \vartheta'_{tg+(1-t)e}(s)ds \in 2\pi\,\mathbb{Z}$ continua $\Rightarrow$ costante)

<u>II caso speciale</u> ($R \subset A \cong R^2$ con coord. normali (x_1, x_2), $C \subset A$ curva di Jordan regolare a tratti)

$\alpha : [0, \ell] \to C$ parametrizzazione globale naturale a tratti

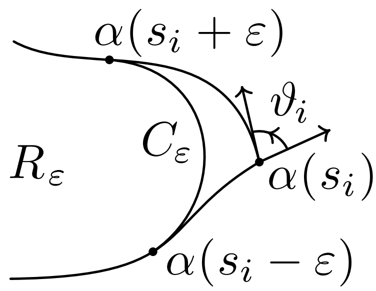
$\varepsilon > 0 \rightsquigarrow R_\varepsilon \subset R$ t.c. $\mathrm{Fr}(R_\varepsilon) = C_\varepsilon$ curva di Jordan regolare

$\mathrm{Area}(R - R_\varepsilon) < \varepsilon\ ,\ C - C_\varepsilon \subset \cup_i\, \alpha([s_i - \varepsilon, s_i + \varepsilon])$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{R_\varepsilon} K dS = \int_R K dS$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} \kappa\, ds = \int_C \kappa\, ds + \sum_i \vartheta_i$

$\Rightarrow \int_R K dS + \int_C \kappa\, ds + \sum_i \vartheta_i = 2\pi$



<u>Caso generale</u>

$R = R_1 \cup \ldots \cup R_p$ poligonazione con R_j come sopra e $C_j = \mathrm{Fr}\, R_j$ orientata come sopra

$\vartheta^j_1, \ldots, \vartheta^j_{n_j}\,,\ \varphi^j_1, \ldots, \varphi^j_{n_j}$ angoli esterni/interni di R_j

$\Rightarrow \sum_j \int_{R_j} K dS + \sum_j \int_{C_j} \kappa\, ds + \sum_{j,k} \vartheta^j_k = 2\pi\, p$

$\sum_j n_j = 2\ell - n\,,\ \sum_{j,k} \varphi^j_k = (2v - n)\pi - \sum_i \vartheta_i$

$\sum_{j,k} \vartheta^j_k = (2\ell - n)\pi - \sum_{j,k} \varphi^j_k = 2\pi(\ell - v) + \sum_i \vartheta_i$

($\ell = \#\,$lati$\,,\ v = \#\,$vertici$\,,\ n = \#\,$lati/vertici in C)

$\Rightarrow \sum_j \int_{R_j} K dS + \sum_j \int_{C_j} \kappa\, ds + \sum_i \vartheta_i = 2\pi\,(p - \ell + v) = 2\pi\,\chi(R)$

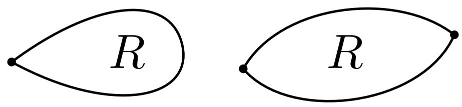
<u>Corol</u>. $S = (S, g)$ superf. riemann. orientata $\Rightarrow \int_S K dS = 2\pi\chi(S)$

<u>Dim</u>. $R = S \Rightarrow \mathrm{Fr}\, R = \varnothing$

<u>Note</u>: 1) $\int_S K dS$ non dipende dalla metrica g né dall'orientazione
$\chi(S)$ non dipende dalla poligonaz. (diff. regolare a tratti)
2) $S \subset R^3$ sfera diff. regolare $\Rightarrow \int_S |K|\, dS \geq 4\pi$
inoltre: $\int_S |K|\, dS = 4\pi \Leftrightarrow S = \mathrm{Fr}(\text{convesso})$

<u>Corol</u>. $S = (S, g)$ superficie riemanniana orientata
$R \subset S$ poligono geodetico con angoli interni $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$
($R \cong B^2$ e $\mathrm{Fr}(R)$ = unione di archi geodetici)
$\Rightarrow \sum_i \varphi_i = (n-2)\pi + \int_R K dS$

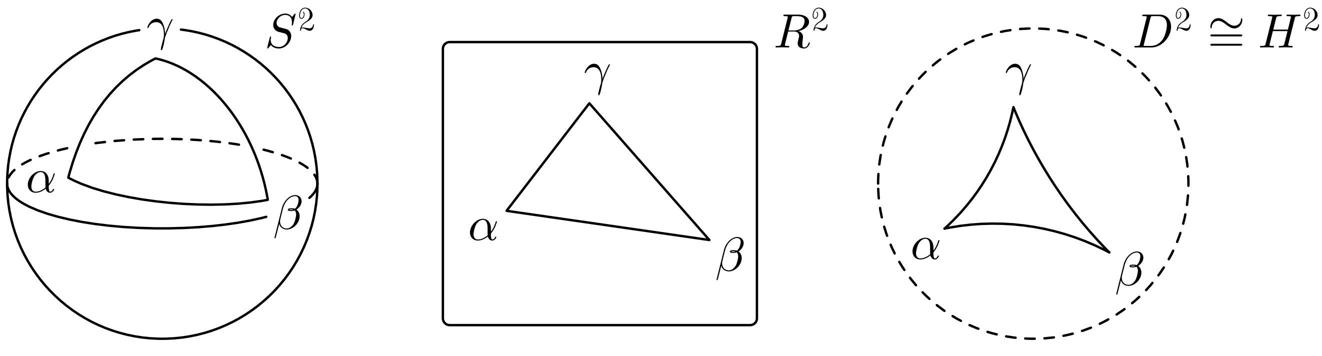
<u>Dim</u>. $\int_R K dS + \sum_i \vartheta_i = 2\pi$ con $\vartheta_i = \pi - \varphi_i$

<u>Nota</u>: $K \leq 0 \Rightarrow n > 2$ (non possibili 

)
$\Rightarrow e_p : T_pS \to S$ omeo. locale diff. regolare $\forall\, p \in S$

<u>Esempi</u>: 1) $R \subset R^2$ poligono (geodetico) euclideo
$\Rightarrow \sum_i \varphi_i = (n-2)\pi$
2) $R \subset S^2$ poligono (geodetico) sferico
$\Rightarrow \sum_i \varphi_i = (n-2)\pi + \mathrm{Area}\, R > (n-2)\pi$
3) $R \subset H^2$ poligono (geodetico) iperbolico
$\Rightarrow \sum_i \varphi_i = (n-2)\pi - \mathrm{Area}\, R < (n-2)\pi$

<u>Nota</u>: in S^2 e H^2 la somma degli angoli interni determina l'area
$\Rightarrow$ non esistono similitudini non banali (non isometrie)



$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$ $\quad$ $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ $\quad$ $\alpha + \beta + \gamma = \pi - A$

Modelli riemanniani delle geometrie piane

Geometria euclidea: piano euclideo = R^2 $(K = 0)$
rette euclidee = geodetiche di R^2
$(\forall\, r\,, \forall\, p \notin r\ \exists! r'$ t.c. $p \in r'$ e $r' \cap r = \varnothing)$

Geometria proiettiva: piano proiettivo = $P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$ $(K = 1)$
rette proiettive = geodetiche di $S^2/\mathbb{Z}_2$
$(\forall\, r\,, r'\ r \cap r' = \{p\} \neq \varnothing)$

Geometria iperbolica: piano iperbolico = $H^2 \cong D^2$ $(K = -1)$
rette iperboliche = geodetiche di H^2
$(\forall\, r\,, \forall\, p \notin r\ \exists$ infin. r' t.c. $p \in r'$ e $r' \cap r = \varnothing)$

Note: 1) P^2 con il gruppo $\mathrm{Isom}\, P^2 \cong \mathrm{Isom}\, S^2/\mathbb{Z}_2$ soddisfa tutti gli assiomi della geometria euclidea tranne ordine e parallele

2) H^2 con il gruppo $\mathrm{Isom}\, H^2$ soddisfa tutti gli assiomi della geometria euclidea tranne quello delle parallele