Spazi topologici

$\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ topologia sull'insieme X ($A \in \mathcal{T}$ aperto)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$

2) $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

3) $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{T}$

spazio topologico $\overset{\text{def}}{=} (X, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{T}_X) = X_{\mathcal{T}} = X$

topologia sull'insieme X

Esempi: 1) topologia banale $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\} \rightsquigarrow X_{\text{ban}}$

2) topologia discreta $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X) \rightsquigarrow X_{\text{disc}}$

3) top. cofinita $\mathcal{T} = \{X - F \mid F \text{ finito}\} \cup \{\varnothing\} \rightsquigarrow X_{\text{cof}}$

4) $R_{\text{sup}} = (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ con $\mathcal{S} = \{\,]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$

5) $R^m = (\mathbb{R}^m, \mathcal{E})$ con $\mathcal{E} = \{A \subset \mathbb{R}^m \mid \forall x \in A \ \exists B(x,\varepsilon) \subset A\}$

topologia euclidea

$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ base per la topologia $\mathcal{T}$

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall A \in \mathcal{T} \ \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ tale che $A = \cup_{i \in I} B_i$

$\iff \forall x \in A \in \mathcal{T} \ \exists B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset A$

Esempio: $\{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^m, \varepsilon > 0\}$ base per $\mathcal{E}$

Note: 1) $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{T}$ ($\mathcal{T} = \{$unioni di elementi di $\mathcal{B}\}$

$= \{A \subset X \mid \forall x \in A \ \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.c. } x \in B \subset A\}$)

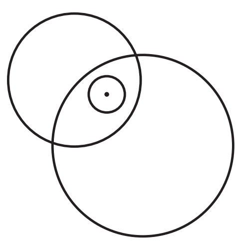
2) $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ è base per una topologia su X

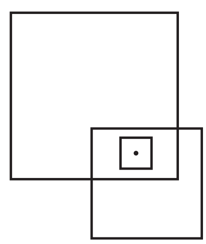
$\Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in X \ \exists B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$ ($\cup \mathcal{B} = X$)

2) $\forall B, B' \in \mathcal{B} \ \forall x \in B \cap B' \ \exists B'' \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B'' \subset B \cap B'$

$\mathcal{B}$ base su $X \rightsquigarrow \langle \mathcal{B} \rangle \overset{\text{def}}{=} \{$unioni di elementi di $\mathcal{B}\}$

topologia generata da $\mathcal{B}$

 $\rightsquigarrow \mathcal{E}$

 $\rightsquigarrow$?

$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \overset{\text{def}}{\iff} \langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{B}' \rangle \longleftarrow$ basi equivalenti su X

Confronto fra topologie su X

$\mathcal{T} \leq \mathcal{T}' \overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ ($\mathcal{T}$ meno fine di $\mathcal{T}'$)

se $\mathcal{T} = \langle \mathcal{B} \rangle$ e $\mathcal{T}' = \langle \mathcal{B}' \rangle$ allora:

1) $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}' \Leftrightarrow \forall\, x \in B \in \mathcal{B}\ \exists\, B' \in \mathcal{B}'$ tale che $x \in B' \subset B$

2) $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \Leftrightarrow$ vale anche il viceversa

Spazi metrici

$d : X \times X \to [0, +\infty[$ distanza o metrica sull'insieme X

$$\overset{\text{def}}{\iff} \left.\begin{array}{l} 1)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ 2)\ d(x,y) = d(y,x) \\ 3)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{array}\right\} \forall\, x,y,z \in X$$

spazio metrico $\overset{\text{def}}{=} (X, d) = (X, d_X) = X_d = X$

metrica sull'insieme X

$B(x,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{ y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon \} \longleftarrow$ boccia aperta

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{ B(x,\varepsilon) \mid x \in X\, ,\, \varepsilon > 0 \}$ è base per una topologia $\mathcal{T}_d$

topologia indotta o generata da d

Esempi: 1) $d(x,y) = \sqrt{\Sigma_i (x_i - y_i)^2}$ su $\mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathcal{E}$

2) $d_{\text{disc}}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = y \\ 1 \text{ se } x \neq y \end{cases}$ su $X \rightsquigarrow X_{\text{disc}}$

$d \sim d' \overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'} \longleftarrow$ metriche equivalenti su X

Nota: ogni metrica induce una topologia, ma esistono topologie che non sono indotte da alcuna metrica (es. X_{ban} e X_{cof})

<u>Sistemi di intorni</u>

$x \in X_{\mathcal{T}} \rightsquigarrow \mathcal{I}_x \overset{\text{def}}{=\!=} \{I \subset X \mid \exists\, A \in \mathcal{T} \text{ con } x \in A \subset I\}$

$\hookrightarrow$ <u>sistema degli intorni di x</u> in $X_{\mathcal{T}}$

$\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\mathcal{I}_x\}_{x \in X} \longleftarrow$ <u>sistema degli intorni</u> di $X_{\mathcal{T}}$

Valgono le seguenti proprietà:

1) $\mathcal{I}_x \neq \varnothing\ \forall x \in X$ e $x \in I\ \forall I \in \mathcal{I}_x$
2) $I \in \mathcal{I}_x\,,\ I \subset I' \Rightarrow I' \in \mathcal{I}_x$
3) $I, I' \in \mathcal{I}_x \Rightarrow I \cap I' \in \mathcal{I}_x$
4) $\forall\, I \in \mathcal{I}_x\ \exists\, I' \in \mathcal{I}_x$ tale che $I \in \mathcal{I}_y\ \forall\, y \in I'$

<u>Note</u>: 1) gli intorni non sono necessariamente aperti

2) $\mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{T}\ \ (A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A \in \mathcal{I}_x\ \forall\, x \in A)$

3) ogni famiglia $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_x\}_{x \in X}$ che soddisfa 1), ..., 4) è base in intorni per una topologia $\mathcal{T} = \langle\, \mathcal{I}\, \rangle$

<u>topologia indotta</u> o <u>generata</u> da $\mathcal{I}$

$\mathcal{B}_x \subset \mathcal{I}_x$ <u>base di intorni per x</u> in $X_{\mathcal{T}}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, I \in \mathcal{I}_x\ \exists\, B \in \mathcal{B}_x$ t.c. $B \subset I$

<u>Esempi</u>: 1) $\mathcal{T} = \langle\, \mathcal{B}\, \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ base di int. ap. per x

2) $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ base di intorni aperti per x

Valgono le seguenti proprietà:

1) $\mathcal{B}_x \neq \varnothing\ \forall\, x \in X$ e $x \in B\ \forall\, B \in \mathcal{B}_x$
2) $B, B' \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists\, B'' \in \mathcal{B}_x$ tale che $B'' \subset B \cap B'$
3) $\forall\, B \in \mathcal{B}_x\ \exists\, B' \in \mathcal{B}_x$ tale che $\forall\, y \in B'\ \exists\, B'' \in \mathcal{B}_y$ con $B'' \subset B$

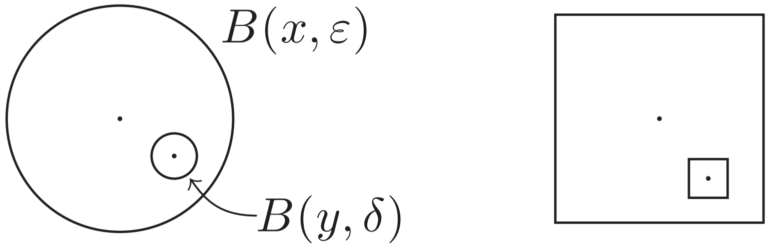
<u>Note</u>: 1) $\mathcal{B}_x \rightsquigarrow \mathcal{I}_x\ \ (I_x = \{I \subset X \mid \exists\, B \in \mathcal{B}_x \text{ t.c. } B \subset I\})$

2) ogni famiglia $\{B_x\}_{x \in X}$ che soddisfa 1), 2) e 3) è un <u>sistema di basi di intorni</u> per una topologia

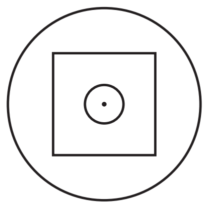
3) $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{T}\ \forall\, x \in X \Rightarrow \mathcal{B} = \cup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ è una base per $\mathcal{T}$

$\hookrightarrow$ <u>base di intorni aperti</u>

4) ogni famiglia $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ che soddisfa 1), 2) e
3′) $\forall\, B \in \mathcal{B}_x\ \forall\, y \in B\ \exists\, B'' \in \mathcal{B}_y$ con $B'' \subset B$
è un sistema di basi di intorni aperti per una topologia



se $\mathcal{T} = \langle\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}\rangle$ e $\mathcal{T}' = \langle\{\mathcal{B}'_x\}_{x\in X}\rangle$ allora:
1) $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}' \Leftrightarrow \forall\, B \in \mathcal{B}_x\ \exists\, B' \in \mathcal{B}'_x$ t.c. $B' \subset B$
2) $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \Leftrightarrow$ vale anche il viceversa



Operatori topologici

$X_{\mathcal{T}}$ spazio topologico e $E \subset X$ sottoinsieme:
$\operatorname{Int} E = E^\circ \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \in X \mid \exists\, I \in \mathcal{I}_x \text{ con } I \subset E\} \longleftarrow$ interno di E
$\operatorname{Cl} E = \overline{E} \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \in X \mid \forall\, I \in \mathcal{I}_x\ I \cap E \neq \varnothing\} \longleftarrow$ chiusura di E
$\operatorname{Fr} E \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \in X \mid \forall\, I \in \mathcal{I}_x\ I \cap E \neq \varnothing \neq I - E\} \longleftarrow$ frontiera di E

Nota: *in queste definizioni si può sostituire* $\mathcal{I}_x$ con $\mathcal{B}_x$

Valgono le seguenti proprietà:
1) $\operatorname{Int} E \subset E$ e $\operatorname{Int} E = E \Leftrightarrow E$ è aperto
2) $\operatorname{Int} E$ è aperto per ogni $E \subset X$ ($\Rightarrow \operatorname{Int}\operatorname{Int} E = \operatorname{Int} E$)
$\hookrightarrow \operatorname{Int} E =$ il più grande aperto contenuto in E
3) $E \subset F \Rightarrow \operatorname{Int} E \subset \operatorname{Int} F$
4) $\operatorname{Int}(E \cup F) \supset \operatorname{Int} E \cup \operatorname{Int} F$
5) $\operatorname{Int}(E \cap F) = \operatorname{Int} E \cap \operatorname{Int} F$

Inoltre, considerando che $\operatorname{Cl} E = X - \operatorname{Int}(X - E)$:
6) $E \subset \operatorname{Cl} E$ e $E = \operatorname{Cl} E \Leftrightarrow E$ è chiuso ($\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X - E$ è aperto)
7) $\operatorname{Cl} E$ è chiuso per ogni $E \subset X$ ($\Rightarrow \operatorname{Cl}\operatorname{Cl} E = \operatorname{Cl} E$)
$\hookrightarrow \operatorname{Cl} E =$ il più piccolo chiuso contenente E

8) $E \subset F \Rightarrow \operatorname{Cl} E \subset \operatorname{Cl} F$
9) $\operatorname{Cl}(E \cup F) = \operatorname{Cl} E \cup \operatorname{Cl} F$
10) $\operatorname{Cl}(E \cap F) \subset \operatorname{Cl} E \cap \operatorname{Cl} F$

Infine, poiché $\operatorname{Fr} E = \operatorname{Cl} E - \operatorname{Int} E = \operatorname{Cl} E \cap \operatorname{Cl}(X - E)$:
11) $\operatorname{Fr} E$ è chiuso per ogni $E \subset X$ e E chiuso $\Rightarrow \operatorname{Int} \operatorname{Fr} E = \varnothing$
12) $\operatorname{Fr} E = \operatorname{Fr}(X - E)$
13) $\operatorname{Cl} E = E \cup \operatorname{Fr} E$ e $\operatorname{Int} E = E - \operatorname{Fr} E$

E <u>denso</u> *in* $X \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Cl} E = X$
E <u>ovunque non denso</u> *in* $X \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Int} \operatorname{Cl} E = \varnothing$
E <u>chiuso regolare</u> *in* $X \overset{\text{def}}{\iff} E = \operatorname{Cl} \operatorname{Int} E$
$\iff E$ è chiuso e $\operatorname{Fr} E = \operatorname{Fr} \operatorname{Int} E$

$\operatorname{Der} E = E' \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \forall\, I \in \mathcal{I}_x \;\; I \cap E - \{x\} \neq \varnothing\} \longleftarrow$ <u>derivato</u>
insieme dei <u>punti di accumulazione</u> per E
$E - E'$ = *insieme dei <u>punti isolati</u> di* E

<u>Nota</u>: $\operatorname{Cl} E = E \cup E'$, quindi: E è chiuso $\Leftrightarrow E' \subset E$

<u>Sottospazi topologici</u>

$X_{\mathcal{T}}$ spazio topologico e $Y \subset X$ sottoinsieme
$\Rightarrow \mathcal{T}_{|Y} \overset{\text{def}}{=} \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{T}\}$ è una topologia su Y
<u>topologia indotta</u> su Y

$Y_{\mathcal{S}} \subset X_{\mathcal{T}} \overset{\text{def}}{\iff} Y \subset X$ e $\mathcal{S} = \mathcal{T}_{|Y}$
<u>sottospazio topologico</u>

<u>Note</u>: 1) $Z_{\mathcal{R}} \subset Y_{\mathcal{S}}\,,\ Y_{\mathcal{S}} \subset X_{\mathcal{T}} \Rightarrow Z_{\mathcal{R}} \subset X_{\mathcal{T}}$
2) $\mathcal{B}$ base per $X_{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{B}_{|Y} = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ base per $Y_{\mathcal{T}_Y}$
3) $\mathcal{B}_x$ base di int. per x in $X_{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{B}_{x|Y}$ base di int. per x in $Y_{\mathcal{T}_{|Y}}$

<u>Esempi</u>: 1) $I \overset{\text{def}}{=} [0,1] \subset R,\ I^m \overset{\text{def}}{=} [0,1]^m \subset R^m \longleftarrow$ <u>m-cubo</u>
2) $B^m \overset{\text{def}}{=} \{x \in R^m \mid \|x\| \leq 1\} \subset R^m \longleftarrow$ <u>m-boccia chiusa</u>
3) $S^m \overset{\text{def}}{=} \{x \in R^{m+1} \mid \|x\| = 1\} \subset R^{m+1} \longleftarrow$ <u>m-sfera</u>

Nota: se $Y_{\mathcal{S}} \subset X_{\mathcal{T}}$ ed $E \subset Y$, allora

1) E aperto in $Y_{\mathcal{S}}$, Y aperto in $X_{\mathcal{T}} \Rightarrow E$ aperto in $X_{\mathcal{T}}$
E chiuso in $Y_{\mathcal{S}}$, Y chiuso in $X_{\mathcal{T}} \Rightarrow E$ chiuso in $X_{\mathcal{T}}$
2) $\mathrm{Int}_Y E \supset \mathrm{Int}_X E$ ($=$ se Y ap. in X) e $\mathrm{Cl}_Y E = \mathrm{Cl}_X E \cap Y$

Unioni topologiche

$(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ spazi topologici
$\Rightarrow \{A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \,|\, A_i \in \mathcal{T}_i\}$ è una topologia su $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$

$$\underbrace{(X_1, \mathcal{T}_1) \sqcup \ldots \sqcup (X_n, \mathcal{T}_n)}_{\text{unione topologica}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n, \underbrace{\{A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \,|\, A_i \in \mathcal{T}_i\}}_{\text{topologia unione}})$$

Note: 1) l'unione topologica è associativa e commutativa a meno delle usuali identificazioni insiemistiche
2) $(X, \mathcal{T}) = (X_1, \mathcal{T}_1) \sqcup (X_2, \mathcal{T}_2) \Leftrightarrow$
$\{X_1, X_2\}$ è una part. di X in sottospazi aperti (chiusi)
3) $(Y_i, \mathcal{S}_i) \subset (X_i, \mathcal{T}_i) \Rightarrow (Y_1, \mathcal{S}_1) \sqcup (Y_2, \mathcal{S}_2) \subset (X_1, \mathcal{T}_1) \sqcup (X_2, \mathcal{T}_2)$
4) $\mathcal{B}_i$ base per $(X_i, \mathcal{T}_i) \Rightarrow \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ base per $(X_1, \mathcal{T}_1) \sqcup (X_2, \mathcal{T}_2)$
5) $\mathcal{B}_x$ base di intorni per x in $(X_i, \mathcal{T}_i) \Rightarrow$
$\mathcal{B}_x$ base di intorni per x in $(X_1, \mathcal{T}_1) \sqcup (X_2, \mathcal{T}_2)$

Esempi: 1) $X_1, \ldots, X_n \subset X$ sottospazi aperti (chiusi) disgiunti
$\Rightarrow X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n \subset X$ sottospazio aperto (chiuso)
2) $R \sqcup \ldots \sqcup R \subset R^2$

Nota: se $(X, \mathcal{T}) = (X_1, \mathcal{T}_1) \sqcup (X_2, \mathcal{T}_2)$ ed $E = E_1 \sqcup E_2$ con $E_i \subset X_i$, allora $\mathrm{Int}_X E = \mathrm{Int}_{X_1} E_1 \sqcup \mathrm{Int}_{X_2} E_2$ e $\mathrm{Cl}_X E = \mathrm{Cl}_{X_1} E_1 \sqcup \mathrm{Cl}_{X_2} E_2$

Prodotti topologici

$(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ spazi topologici
$\Rightarrow \{A_1 \times \ldots \times A_n \,|\, A_i \in \mathcal{T}_i\}$ è una base su $X_1 \times \ldots \times X_n$

$$\underbrace{(X_1, \mathcal{T}_1) \times \ldots \times (X_n, \mathcal{T}_n)}_{\text{prodotto topologico}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (X_1 \times \ldots \times X_n, \underbrace{\langle\{A_1 \times \ldots \times A_n \,|\, A_i \in \mathcal{T}_i\}\rangle}_{\text{topologia prodotto}})$$

<u>Note</u>: 1) il prodotto topologico è associativo e commutativo a meno delle usuali identificazioni insiemistiche

2) $(Y_i, \mathcal{S}_i) \subset (X_i, \mathcal{T}_i) \Rightarrow (Y_1, \mathcal{S}_1) \times (Y_2, \mathcal{S}_2) \subset (X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2)$

3) $\mathcal{B}_i$ base per $(X_i, \mathcal{T}_i) \Rightarrow$ $\{B_1 \times B_2 \mid B_i \in \mathcal{B}_i\}$ base per $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2)$

4) $\mathcal{B}_{x_i}$ base di int. per x_i in $(X_i, \mathcal{T}_i) \Rightarrow \{B_1 \times B_2 \mid B_i \in \mathcal{B}_{x_i}\}$ base di int. per (x_1, x_2) in $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2)$

<u>Esempi</u>: 1) $R^m = R \times \ldots \times R$, $I^m = I \times \ldots \times I$

2) $T^m \overset{\text{def}}{=\!=} S^1 \times \ldots \times S^1 \subset R^{2m} \longleftarrow$ <u>m-toro</u>

<u>Nota</u>: se $(X, \mathcal{T}) = (X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2)$ ed $E = E_1 \times E_2$ con $E_i \subset X_i$, allora $\mathrm{Int}_X E = \mathrm{Int}_{X_1} E_1 \times \mathrm{Int}_{X_2} E_2$ e $\mathrm{Cl}_X E = \mathrm{Cl}_{X_1} E_1 \times \mathrm{Cl}_{X_2} E_2$

<u>Quozienti topologici</u>

$(X, \mathcal{T})$ spazio topologico, $\sim$ relazione d'equivalenza su X,
$\pi : X \to X/\!\sim$ proiezione canonica
$\Rightarrow \{A \subset X/\!\sim \mid \pi^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$ è una topologia su $X/\!\sim$

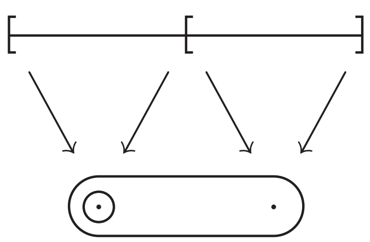
$(X, \mathcal{T})/\!\sim \;\overset{\text{def}}{=\!=}\; (X/\!\sim, \{A \subset X/\!\sim \mid \pi^{-1}(A) \in \mathcal{T}\})$

<u>quoziente topologico</u> <u>topologia quoziente</u>

<u>Note</u>: 1) A aperto in $X \not\Rightarrow A/\!\sim$ aperto in $X/\!\sim$ ($\Rightarrow$ vale solo se A è <u>saturo</u>, cioè $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$)

2) $\mathcal{B}$ base per la top. quoz. $\Leftrightarrow \{\pi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ base per $\mathcal{T}_{\mathrm{sat}}$

3) $(Y, \mathcal{S}) \subset (X, \mathcal{T})$ con Y saturo $\Rightarrow (Y, \mathcal{S})/\!\sim \;\subset (X, \mathcal{T})/\!\sim$



<u>Nota</u>: se $(Y, \mathcal{S}) = (X, \mathcal{T})/\!\sim$ ed $E \subset Y$, allora $\mathrm{Int}_Y E = \pi(\mathrm{Int}_X\, \pi^{-1}(E))$ e $\mathrm{Cl}_Y E = \pi(\mathrm{Cl}_X\, \pi^{-1}(E))$

<u>Esempi</u>: 1) $P^m = P^m(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} R^{m+1} - \{0\}/_{x \sim \lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

<u>spazio proiettivo (reale)</u>

2) $P^m(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} C^{m+1} - \{0\}/_{x \sim \lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$

<u>spazio proiettivo (complesso)</u>

($C^m \stackrel{\text{def}}{=\!=} R^{2m}$ con la topologia euclidea)

<u>Applicazioni continue</u>

$f : X \to Y$ con X e Y spazi topologici

<u>continua</u> $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ [A aperto in $Y \Rightarrow f^{-1}(A)$ aperto in X]

([A aperto basico in $Y \Rightarrow f^{-1}(A)$ aperto in X])

$\iff \forall\, x \in X \; [J \in \mathcal{I}_{f(x)} \Rightarrow f^{-1}(J) \in \mathcal{I}_x]$

$(\forall\, x \in X \; \forall\, J \in \mathcal{B}_{f(x)} \; \exists\, I \in \mathcal{B}_x$ t.c. $f(I) \subset J)$

$\iff f(\mathrm{Cl}_X E) \subset \mathrm{Cl}_Y f(E)$ per ogni $E \subset X$

$\iff$ [C chiuso in $Y \Rightarrow f^{-1}(C)$ chiuso in X]

<u>Note</u>: 1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ continue $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ continua

2) $f : X \to Y$ continua e invertibile $\not\Rightarrow f^{-1}$ continua

3) $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ continua $\Leftrightarrow \forall\, x \in X \; \forall\, \varepsilon > 0$

$\exists\, \delta(x, \varepsilon) > 0$ t.c. $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

<u>Continuità e sottospazi</u>

$f : X \to Y$ con X e Y spazi topologici, allora:

1) $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow f_{|S} : S \to Y$ continua per ogni $S \subset X$

2) $f(X) \subset T \subset Y \Rightarrow$ [$f : X \to Y$ continua $\Leftrightarrow f : X \to T$ continua]

3) $X = \cup_{i \in I} A_i$ con A_i aperto e $f_{|A_i}$ cont. $\forall\, i \Rightarrow f$ continua

4) $X = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ con C_i chiuso e $f_{|C_i}$ cont. $\forall\, i \Rightarrow f$ continua

incollamento di applicazioni continue

<u>Continuità e operazioni topologiche</u>

$X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ e Y spazi topologici, allora:

$f : X \to Y \leadsto \{f_i : X_i \to Y \mid i = 1, \ldots, n\}$ (restrizioni)

f continua $\iff f_i$ continua per ogni $i = 1, \ldots, n$

Nota: la topologia unione è la più fine tra le topologie su X che rendono continue tutte le inclusioni $X_i \hookrightarrow X$

X e $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ spazi topologici, allora:
$f : X \to Y \leftrightsquigarrow \{f_i : X \to Y_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ (componenti)
f continua $\iff$ f_i continua per ogni $i = 1, \ldots, n$

Nota: la topologia prodotto è la meno fine tra le topologie su Y che rendono continue tutte le proiezioni $\pi_i : Y \to Y_i$

X e Y spazi topologici, $\pi : X \to X/\!\sim$ quoziente, allora:
$f : X/\!\sim \to Y \leftrightsquigarrow f \circ \pi = g : X \to Y$ t.c. $x \sim x' \Rightarrow g(x) = g(x')$
f continua $\iff$ $f \circ \pi$ continua

Nota: la topologia quoziente è la più fine tra le topologie su $X/\!\sim$ che rendono continua la proiezione canonica $\pi : X \to X/\!\sim$

Applicazioni aperte

$f : X \to Y$ con X e Y spazi topologici
aperta $\overset{\text{def}}{\iff}$ $[A$ aperto in $X \Rightarrow f(A)$ aperto in $Y]$
$([A$ aperto basico in $X \Rightarrow f(A)$ aperto in $Y])$
$\iff \forall\, x \in X\ [I \in \mathcal{I}_x \ \Rightarrow f(I) \in \mathcal{I}_{f(x)}]$
$(\forall\, x \in X\ \forall\, I \in \mathcal{B}_x\ \exists\, J \in \mathcal{B}_{f(x)}$ t.c. $J \subset f(I))$

Note:
1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aperte $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ aperta
2) $f : X \to Y$ invertibile $\Rightarrow [f$ aperta $\Leftrightarrow f^{-1}$ continua$]$
3) $f : X \to Y$ aperta, $A \subset X$ aperto $\Rightarrow f_{|A} : A \to Y$ aperta
4) $X_i \hookrightarrow X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ aperta per ogni $i = 1, \ldots, n$
5) $\pi_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ aperta per ogni $i = 1, \ldots, n$

Omeomorfismi

$f : X \to Y$ con X e Y spazi topologici
omeomorfismo $\overset{\text{def}}{\iff}$ f biunivoca, f e f^{-1} continue
$\iff f$ biunivoca, continua e aperta
$\iff f \rightsquigarrow \mathcal{T}_X \leftrightarrow \mathcal{T}_Y$ (isomorfismo topologico)

$X \cong Y \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, f : X \to Y$ omeomorfismo

$\hookrightarrow$ spazi omeomorfi (topologicamente equivalenti)

Note: 1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ omeo $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ omeo

2) $f : X \to Y$ omeo $\Rightarrow f^{-1} : Y \to X$ omeo

$\hookrightarrow$ quindi $\cong$ è una "relazione d'equivalenza" tra spazi top.

3) $f : X \to Y$ omeo, $S \subset X \Rightarrow f_{|S} : S \to f(S)$ omeo

4) $f_i : X_i \to Y_i$ omeo $\Rightarrow f_1 \sqcup f_2 : X_1 \sqcup X_2 \to Y_1 \sqcup Y_2$ omeo

5) $f_i : X_i \to Y_i$ omeo $\Rightarrow f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ omeo

6) $f : X \to Y$ omeo t.c. $\sim_X \leftrightsquigarrow \sim_Y \Rightarrow f/\!\sim\, : X/\!\sim_X \to Y/\!\sim_Y$ omeo

7) $f : X \to Y$ cont. e aperta $\Rightarrow f/\!\sim_f : X/\!\sim_f \to f(X)$ omeo

8) $\mathrm{Omeo}\, X \overset{\text{def}}{=\!=} \{f : X \to X \mid f \text{ omeo}\}$ è un gruppo

Esempi: 1) affinità e proiettività reali e complesse sono omeo

2) $f : R^m \to R^n$ continua $\rightsquigarrow g : R^{m+n} \to R^{m+n}$ omeo definito $g(x,y) = (x, y + f(x))\ \forall\, x \in R^m\ \forall\, y \in R^n$

3) $[a,b] \cong I,\ ]-\infty, b] \cong\,]a,b] \cong [a,b[\, \cong [a,+\infty[\, \cong [0,+\infty[$
$]-\infty, b[\, \cong\,]a,b[\, \cong\,]a,+\infty[\, \cong R$ per ogni $a < b$

4) $\prod_{i=1}^m [a_i,b_i] \cong I^m,\ B(0,r) \cong R^m,\ \mathrm{Cl}\, B(0,r) \cong B^m$

$f : X \to Y$ con X e Y spazi topologici

omeomorfismo locale $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\, x \in X\ \exists\, I \in \mathcal{I}_x$ tale che $f(I) \in \mathcal{I}_{f(x)}$ e $f_{|I} : I \to f(I)$ è un omeomorfismo

$\iff f$ continua, aperta, localmente iniettiva (cioè $\forall\, x \in X\ \exists\, I \in \mathcal{I}_x$ t.c. $f_{|I}$ iniettiva)

Note: 1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ omeo loc. $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ omeo loc.

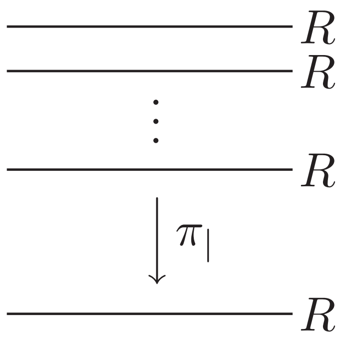
2) $f : X \to Y$ omeo locale biunovoco $\Leftrightarrow f$ omeomorfismo

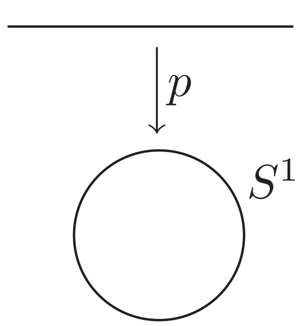
3) $f : X \to Y$ omeo loc., $A \subset X$ ap. $\Rightarrow f_{|A} : A \to Y$ omeo loc.

Esempi: 1) $A \hookrightarrow X$ con A aperto in X (iniettivo, non suriettivo)

2) $\pi_| : R \sqcup \ldots \sqcup R \subset R^2 \xrightarrow{\pi} R$ (suriettivo, non iniettivo)

3) $p : R \to S^1$ definita $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\ \forall\, t \in R$





Immersioni

$f : X \to Y$ con X e Y spazi topologici
immersione $\overset{\text{def}}{\iff} f : X \to f(X) \subset Y$ è un omeomorfismo
$\iff f$ continua, iniettiva, aperta su $f(X)$

Note: 1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ immers. $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ immers.
2) $f : X \to Y$ immersione suriettiva $\Leftrightarrow f$ omeomorfismo
3) $f : X \to Y$ immersione aperta $\Leftrightarrow f$ omeo loc. iniettivo
4) $f : X \to Y$ immesione, $S \subset X \Rightarrow f_{|S} : S \to Y$ immersione

Esempi: 1) $X_i \to X_1 \times \ldots \times X_n$ $(x_i \mapsto (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0))$
2) $f : X \to Y$ cont. $\rightsquigarrow \mathrm{id}_X \times f : X \to X \times Y$ immersione
3) $R^m \hookrightarrow R^n \rightsquigarrow P^m \hookrightarrow P^n$, $P^m(\mathbb{C}) \hookrightarrow P^n(\mathbb{C})$ con $m \le n$
(immers. canonica $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots 0)$)
4) $R^m \to P^m$, $R^{2m} \cong C^m \to P^m(\mathbb{C})$, $P^m \to P^m(\mathbb{C})$
5) $T^m \to R^{m+1}$ ($m = 2 \rightsquigarrow$ toro di rotazione in R^3)

$f : X \to Y$ con X e Y spazi topologici
immersione locale $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\, x \in X\ \exists\, I \in \mathcal{I}_x$ t.c. $f_{|I} : I \to Y$ immers.

Note: 1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ imm. loc. $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ imm. loc.
2) $f : X \to Y$ immersione loc. iniettiva $\Leftarrow\!\!\not\Rightarrow f$ immersione

3) $f : X \to Y$ immersione locale aperta $\Leftrightarrow f$ omeo locale
4) $f : X \to Y$ imm. locale, $S \subset X \Rightarrow f_{|S} : S \to Y$ imm. locale

Azioni topologiche

$\varphi : G \times X \to X$ azione di un gruppo G su uno spazio topologico X
($\varphi \leftrightsquigarrow \Phi : G \to \Sigma_X$ omomorfismo tale che $\Phi(g)(x) = \varphi(g, x)$)
azione topologica $\overset{\text{def}}{\iff}$ φ_g è continua $\forall\, g \in G$
$\iff$ φ_g è omeomorfismo $\forall\, g \in G$

G-spazio $\overset{\text{def}}{=\!=}$ $(X, \varphi) = X$
$(X, \varphi)/G = X/G$ $\overset{\text{def}}{=\!=}$ (insieme delle orbite, topologia quoziente)
spazio delle orbite

Note: 1) φ azione top. su $X \leftrightsquigarrow \Phi : G \to \mathrm{Omeo}\, X$ omomorfismo
2) φ azione banale $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\varphi_g = \mathrm{id}_X\ \forall\, g \in G \Rightarrow X/G \cong X$
3) se X un G-spazio allora $\pi : X \to X/G$ è aperta

$f : X \to Y$ con $X = (X, \varphi)$ e $Y = (Y, \psi)$ G-spazi
G-continua $\overset{\text{def}}{\iff}$ f continua equivariante ($f \circ \varphi_g = \psi_g \circ f\ \ \forall\, g \in G$)
G-omeomorfismo $\overset{\text{def}}{\iff}$ f biunivoca, f e f^{-1} G-continue
$\iff$ f omeomorfismo equivariante

$X \cong_G Y$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\, f : X \to Y$ G-omeomorfismo
G-spazi G-omeomorfi

Note: 1) $f : X \to Y$ G-cont. (ap.) $\Leftrightarrow$ $f/G : X/G \to Y/G$ cont. (ap.)
2) $f : X \to Y$ G-omeo $\Leftrightarrow$ $f/G : X/G \to Y/G$ omeo
(quindi $X \cong_G Y \Rightarrow X/G \cong Y/G$)

Esempi: 1) $\varphi_n(x) = x + n \rightsquigarrow R/\mathbb{Z} \cong S^1$ e $R^m/\mathbb{Z}^m \cong T^m$
2) $\varphi_r(x) = r\,x \rightsquigarrow R^{m+1} - \{0\}/\mathbb{R}^* \cong P^m$
$R^{m+1} - \{0\}/\mathbb{R}^*_+ \cong S^m$
$S^m/\mathbb{Z}_2 \cong P^m$
3) $\varphi_z(x) = z\,x \rightsquigarrow C^{m+1} - \{0\}/\mathbb{C}^* \cong P^m(\mathbb{C})$
$S^{2m+1}/S^1 \cong P^m(\mathbb{C})$