Proprietà topologiche

$\mathcal{P}$ proprietà riferita a (classe di) spazi topologici

$\mathcal{P}$ prop. topologica $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{P}$ è *invariante per omeomorfismi*
(cioè $X \cong Y \Rightarrow [X \in \mathcal{P} \Leftrightarrow Y \in \mathcal{P}]$)
$\iff$ $\mathcal{P}$ si può esprimere mediante la sola struttura topologica (ap., int., basi, ...)

X è localmente $\mathcal{P}$ in x $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\, \mathcal{B}_x$ tale che $B \in \mathcal{P}$ per ogni $B \in \mathcal{B}_x$

X è localmente $\mathcal{P}$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ X è localmente $\mathcal{P}$ in x per ogni $x \in X$

Note: 1) localmente $\mathcal{P}$ è una proprietà topologica (locale)
$(\exists\, I \in \mathcal{I}_x, J \in \mathcal{I}_y, I \cong J \Rightarrow [X \text{ loc.}\, \mathcal{P} \text{ in } x \Leftrightarrow Y \text{ loc.}\, \mathcal{P} \text{ in } y])$
2) in generale $\mathcal{P} \not\Leftarrow\not\Rightarrow$ loc. $\mathcal{P}$ ($\Rightarrow$ vale se $\mathcal{P}$ è ereditaria)

Esempi: 1) $\mathcal{P}$ = topologia banale (banale $\not\Leftarrow\Rightarrow$ loc. banale)
2) $\mathcal{P}$ = topologia discreta (discreto $\Leftrightarrow$ loc. discreto)

Assiomi di separazione

X spazio topologico

$\mathrm{T}_1 \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, x \neq y \in X\ \exists\, A, B$ aperti t.c. $x \in A \not\ni y$ e $y \in B \not\ni x$

$\Uparrow$ ($\Leftrightarrow \{x\}$ chiuso in X per ogni $x \in X$)

$\mathrm{T}_2 \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, x \neq y \in X\ \exists\, A, B$ aperti t.c. $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \varnothing$

$\Uparrow$ ($\Leftrightarrow$ "lim. unici": $f, g : D \to X$ cont. $\Rightarrow \{f = g\}$ ch. in D)

$\mathrm{T}_3 \overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{T}_1 + \forall\, x \in X\ \forall\, C \subset X$ chiuso t.c. $x \notin C$
$\exists\, A, B$ aperti t.c. $x \in A$, $C \subset B$ e $A \cap B = \varnothing$

$\Uparrow$ ($\Leftrightarrow \forall\, x \in X\ \exists\, \mathcal{B}_x$ base di intorni chiusi)

$\mathrm{T}_4 \overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{T}_1 + \forall\, C, D \subset X$ chiusi t.c. $C \cap D = \varnothing$
$\exists\, A, B$ aperti t.c. $C \subset A$, $D \subset B$ e $A \cap B = \varnothing$

(T_2 = Hausdorff T_3 = regolare T_4 = normale)

Note: 1) senza T_1 in T_3 e T_4 non si avrebbe $\mathrm{T}_4 \Rightarrow \mathrm{T}_3 \Rightarrow \mathrm{T}_2$
2) $\mathrm{T}_1 \not\Rightarrow \mathrm{T}_2$ (X_{cof} con X insieme infinito)

3) $\mathrm{T}_2 \not\Rightarrow \mathrm{T}_3$ $(R_Q = (\mathbb{R}, \langle\{\{x\} \cup (]a,b[\, \cap \mathbb{Q}) \mid a < x < b \in \mathbb{R}\}\rangle))$
4) $\mathrm{T}_3 \not\Rightarrow \mathrm{T}_4$ $(R_{[[}^2$ con $R_{[[} = (\mathbb{R}, \langle\{[a,b[\, \mid a < b \in \mathbb{R}\}\rangle))$

Conservazione degli assiomi di separazione:

	sottospazi	unioni	prodotti	quozienti
T_1	SI	SI	SI	NO
T_2	SI	SI	SI	NO
T_3	SI	SI	SI	NO
T_4	NO (SI per ch.)	SI	NO	NO ($R_{[[}^2$)

<u>Note</u>: 1) unioni: $S \subset X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ ap./ch. $\Leftrightarrow S \cap X_i$ ap./ch. $\forall\, i$
2) quozienti: 

<u>Metrizzabilità</u>

$X = X_{\mathcal{T}}$ sp. top. <u>metrizzabile</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, d$ metrica su X t.c. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$
(<u>metrica compatibile</u> con $\mathcal{T}$)

Conservazione della metrizzabilità

sottospazi	unioni	prodotti	quozienti
SI	SI	SI	NO

<u>Note</u>: 1) $d \sim \bar{d}$ con $\bar{d}(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} \min\{d(x,y), 1\}$
2) $Y \subset (X,d) \Rightarrow (T_d)_{|Y} = \mathcal{T}_{(d_{|Y})}$ ($d_{|Y}$ = <u>metrica indotta</u> su Y)
3) unioni: d_i metrica per $X_i \Rightarrow d$ metrica per $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$

$$\text{con } d(x,y) = \begin{cases} \bar{d}_i(x,y) & \text{se } x, y \in X_i \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4) prodotti: d_i met. per $X_i \Rightarrow d, d', d''$ met. per $X_1 \times \ldots \times X_n$

$$\begin{aligned} \text{con} \quad d(x,y) &= \max_i d_i(x_i, y_i) \\ d'(x,y) &= \Sigma_i d_i(x_i, y_i) \\ d''(x,y) &= \sqrt{\Sigma_i d_i(x_i, y_i)^2} \end{aligned}$$

5) quozienti:

Esempi: R^m, B^m, S^m, I^m, T^m, X_{disc} sono metrizzabili

Applicazioni tra spazi metrici

$f : X \to Y$ con $X = (X, d)$ e $Y = (Y, d)$ spazi metrici
continua $\iff \forall\, x \in X\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(x, \varepsilon) > 0$ tale che
$d(x, x') \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$
uniformemente continua $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tale che
$d(x, x') \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$
k-lipschitziana $\overset{\text{def}}{\iff} \delta(\varepsilon) = \varepsilon/k$ cioè $d(f(x), f(x')) \leq k\, d(x, x')$
(applicazione) isometrica $\overset{\text{def}}{\iff} d(f(x), f(x')) = d(x, x')$

isometria $\overset{\text{def}}{\iff} f$ biunivoca e isometrica
$\iff f$ biunivoca, f e f^{-1} isometriche

$(X, d_X) \cong (Y, d_Y) \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ isometria
spazi isometrici (metricamente equivalenti)

Note: 1) f isometrica $\Rightarrow$ lipschitz. $\Rightarrow$ unif. cont. $\Rightarrow$ continua
f isometrica $\Rightarrow$ immersione ($f : X \to f(X)$ isometria)
(isom. lipschitz. e unif. cont. dipendono dalle metriche)
2) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ unif. cont./lipschitz./isometrica
$\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ unif. cont./lipschitz./isometrica
3) f isometria $\Rightarrow f$ omeomorfismo e f^{-1} isometria
quindi $\cong$ è una "relazione d'equivalenza" tra sp. met.
4) $\text{Isom}(X, d) \overset{\text{def}}{=\!=} \{h : X \to X \mid h \text{ isometria}\} < \text{Omeo}(X, \mathcal{T}_d)$

Funzioni reali su spazi metrici

$X = (X, d)$ spazio metrico
$x_0 \in X \rightsquigarrow \varphi_{x_0} : X \to R$ definita $\varphi_{x_0}(x) = d(x, x_0)$
$S \subset X \rightsquigarrow \varphi_S : X \to R$ definita $\varphi_S(x) = d(x, S) \overset{\text{def}}{=\!=} \inf_{s \in S} d(x, s)$

Note: 1) φ_{x_0} e φ_S sono 1-lipschitziane
2) $\text{Cl}\, S = \varphi_S^{-1}(0) = \{x \in X \mid d(x, S) = 0\}$

<u>Lemma di Urysohn</u> per spazi metrizzabili (vale anche per sp. T_4)

X spazio top. metrizzabile, $C, D \subset X$ chiusi tale che $C \cap D = \varnothing$

$\Rightarrow \exists\, f : X \to [0,1]$ continua tale che $f(C) = 0$ e $f(D) = 1$

<u>Dim</u>. $f = \varphi_C/(\varphi_C + \varphi_D)$

<u>Prop</u>. X spazio top. metrizzabile $\Rightarrow X$ spazio top. T_4

<u>Dim</u>. $x \neq y \rightsquigarrow A = B(x, d/2)$ e $B = B(y, d/2)$ con $d = d(x,y) > 0$

$C, D \rightsquigarrow f$ (Urysohn) $\rightsquigarrow A = f^{-1}(\left[0, \tfrac{1}{2}\right[)$ e $B = f^{-1}(\left]\tfrac{1}{2}, 1\right])$

<u>Teorema di Tietze</u> per spazi metrizzabili (vale anche per sp. T_4)

X sp. top. metrizzabile, $C \subset X$ chiuso, $f : C \to [0,1]$ continua

$\Rightarrow \exists\, g : X \to [0,1]$ continua t.c. $g_{|C} = f$ (<u>estensione continua</u>)

<u>Dim</u>. $[0,1]$ si può sostituire con $[-1,1] \cong [0,1]$

Lemma di Urysohn + induzione $\rightsquigarrow g_n : X \to [-1,1]$

t.c. 1) $g_0 = 0$ e g_n continua per ogni $n \geq 1$

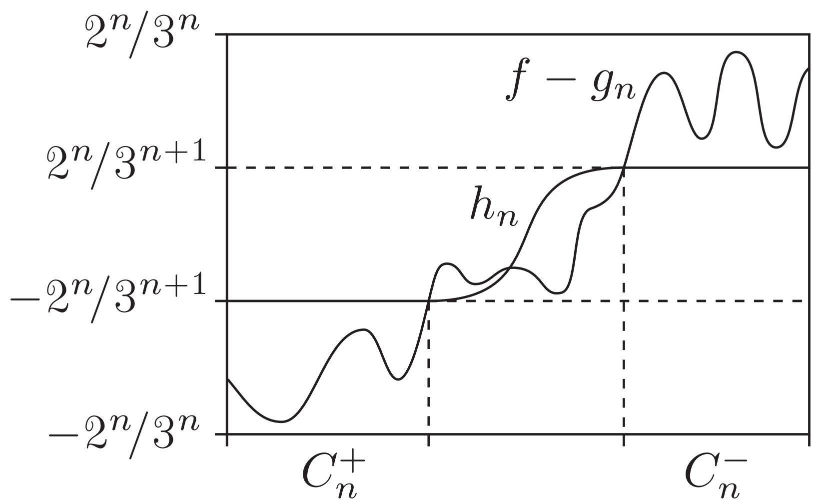
2) $|f(x) - g_n(x)| \leq 2^n/3^n \quad \forall\, x \in C\ \forall\, n \geq 1$

3) $|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq 2^{n+1}/3^{n+1} \quad \forall\, x \in X\ \forall\, n \geq 1$

($g_n \rightsquigarrow C_n^\pm = \{x \in C \mid \pm\,(f(x) - g_n(x)) \geq 2^n/3^{n+1}\}$

$C_n^\pm \subset C$ chiusi in $X \rightsquigarrow h_n : X \to [-2^n/3^{n+1}, 2^n/3^{n+1}]$

t.c. $h_n(C_n^\pm) = \pm 2^n/3^{n+1} \rightsquigarrow g_{n+1} = g_n + h_n$)



$\rightsquigarrow g = \lim_{n\to\infty} g_n : X \to [-1,1]$ continua t.c. $g_{|C} = f$

Assiomi di numerabilità

X spazio topologico

I numerabile $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\, x \in X\ \exists\, \mathcal{B}_x$ base di intorni numerabile

II numerabile $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \mathcal{B}$ base numerabile per la topologia

separabile $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, D \subset X$ denso numerabile

Esempi: 1) X spazio topologico metrizzabile $\Rightarrow$ I-numerabile
($\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n) \,|\, n \geq 1\}$ base di intorni numerabile)
2) R^m è II-numerabile e separabile

Note: 1) II-numerabile $\Rightarrow$ I-numerabile e separabile
($\mathcal{B} = \{B_n \,|\, n \geq 1\} \rightsquigarrow D = \{x_n \in B_n \,|\, n \geq 1\}$)
2) I-numerabile e separabile $\not\Rightarrow$ II-numerabile ($R_{[[}$)
3) I-numerabile $\not\Rightarrow$ separabile (R_{disc})
4) separabile $\not\Rightarrow$ I-numerabile (R_{cof})

Conservazione degli assiomi di numerabilità:

	sottospazi	unioni	prodotti	quozienti
I-num.	SI	SI	SI	NO (R^2/R)
II-num.	SI	SI	SI	NO (R^2/R)
separabile	NO ($-\Delta \subset R^2_{[[}$)	SI	SI	SI

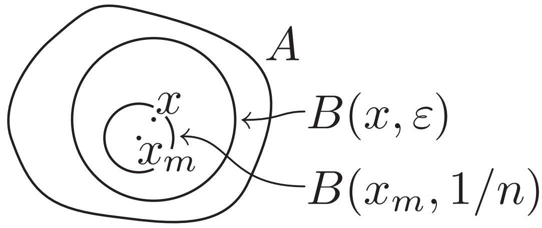
Note: 1) I-num. e II-num.: dalle proprietà delle basi
2) separabile: D_i denso in X_i per ogni $i = 1, \ldots, n$
$\Rightarrow D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_n$ denso in $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$
$D_1 \times \ldots \times D_n$ denso in $X_1 \times \ldots \times X_n$
$f : X \to Y$ continua, X sep. $\Rightarrow f(X)$ sep.

Prop. X spazio topologico I-numerabile:
1) $\operatorname{Cl} E = \{x = \lim x_n \text{ con } (x_n)_{n\geq 1} \subset E\}$ per ogni $E \subset X$
2) $f : X \to Y$ continua $\Leftrightarrow [\lim x_n = x \Rightarrow \lim f(x_n) = f(x)]$
($\lim x_n = x \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, I \in \mathcal{I}_x\ \exists\, \bar{n} \geq 1$ tale che $x_n \in I\ \forall\, n \geq \bar{n}$)

<u>Dim</u>. 1) $\mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n\geq 1}$ base di int. numerabile $\rightsquigarrow$
$x \in \mathrm{Cl}\, E \Leftrightarrow \forall\, n \geq 1\ \exists\, x_n \in E \cap B_1 \cap \ldots \cap B_n$
2) f continua $\Leftrightarrow f(\mathrm{Cl}\, E) \subset \mathrm{Cl}(f(E))\ \forall\, E \subset X$
$\Leftrightarrow \lim f(x_n) = f(x)\ \forall\, (x_n)_{n\geq 1} \subset X$ t.c. $\lim x_n = x$

<u>Prop</u>. X spazio top. metrizzabile e separabile $\Rightarrow$ II-numerabile

<u>Dim</u>. $D \subset X$ denso $\rightsquigarrow \mathcal{B} = \{B(x_m, 1/n) \mid x_m \in D, n \geq 1\}$
$x \in A \in \mathcal{T} \rightsquigarrow B(x, \varepsilon) \subset A$
$\rightsquigarrow n > 2/\varepsilon \rightsquigarrow x_m \in B(x, 1/n)$
$\Rightarrow x \in B(x_m, 1/n) \subset A$



<u>Teorema di Lindelöf</u>

X spazio top. II-numerabile, $\mathcal{A}$ <u>ricoprimento aperto</u> di X
$\Rightarrow \exists\, \{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ sottoricoprimento numerabile

<u>Dim</u>. $\mathcal{B}$ base numerabile $\rightsquigarrow \mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists\, A \in \mathcal{A}$ t.c. $B \subset A\}$
$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \{B_n\}_{n\geq 1} \rightsquigarrow \{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ con $B_n \subset A_n$ per ogni n

<u>Partizioni dell'unità</u>

X spazio topologico
$f : X \to R \rightsquigarrow \mathrm{supp}\, f \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \mathrm{Cl}(f^{-1}(R - \{0\})) \longleftarrow$ <u>supporto</u> di f

$\Lambda = \{\lambda_n : X \to [0,1]\}_{n\geq 1}$ <u>partizione dell'unità</u> su X
$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) λ_n continua per ogni $n \geq 1$
2) $\{\mathrm{supp}\, \lambda_n\}_{n\geq 1}$ famiglia <u>localmente finita</u>
3) $\Sigma_{n\geq 1} \lambda_n = 1$ (la somma è localmente finita)

Λ partizione dell'unità <u>subordinata ad $\mathcal{A}$</u> (ricop. ap. di X)
$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 4) $\forall\, n \geq 1\ \exists\, A \in \mathcal{A}$ tale che $\mathrm{supp}\, \lambda_n \subset A$

<u>Prop</u>. X spazio top. metriz. II-numerabile, $\mathcal{A}$ ricop. aperto di X
$\Rightarrow \exists\, \Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{A}$

<u>Dim</u>. $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B} = \{B_x \mid x \in B_x \subset \overline{B}_x \subset A_x \in \mathcal{A}\,,\, x \in X\}$ ricop. aperto
$\rightsquigarrow \mathcal{C} = \{C_x \mid x \in C_x \subset \overline{C}_x \subset B_x\,,\, x \in X\}$ ricop. aperto
$\rightsquigarrow \mathcal{C}' = \{C_n = C_{x_n}\}_{n\geq 1}$ sottoricoprimento numerabile
$\rightsquigarrow \{\eta_n : X \to [0,1]\}_{n\geq 1}$ t.c. $\eta_n(\overline{C}_n) = 1$ e $\operatorname{supp}\eta_n \subset \overline{B}_n$
$\rightsquigarrow \{\lambda_n : X \to [0,1]\}_{n\geq 1}$ t.c. $\lambda_1 = \eta_1$ e $\lambda_n = \eta_n(1 - \Sigma_{i<n}\lambda_i)$
$(\Sigma_{i\leq n}\lambda_{i|C_n} = 1 \Rightarrow \lambda_{m|C_n} = 0\ \forall\, m > n \Rightarrow \Lambda$ part. unità
$\operatorname{supp}\lambda_n \subset \operatorname{supp}\eta_n \subset A_n\ \forall\, n \geq 1 \Rightarrow \Lambda$ subord. ad $\mathcal{A})$

<u>Note</u>: 1) $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n\geq 1}$ numer. $\rightsquigarrow \Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ t.c. $\operatorname{supp}\lambda_n \subset A_n$
2) $\{f_n : A_n \to R^m\}_{n\geq 1} \rightsquigarrow f : X \to R^m$
$(f = \Sigma_{n\geq 1}\lambda_n\widetilde{f}_n$ con $\widetilde{f}_{n|A_n} = f_n$ e $\widetilde{f}_{n|X-A_n} = 0\ \forall\, n \geq 1)$
t.c. 1) f_n continua per ogni $n \geq 1 \Rightarrow f$ continua
2) $\|f_n - f_{n'}\| < \varepsilon$ in $A_n \cap A_{n'}\ \forall\, n, n' \geq 1 \Rightarrow \|f - f_n\| < \varepsilon$
3) $f_n(x) = v$ per ogni $n \geq 1 \Rightarrow f(x) = v$

<u>Compattezza</u>

X spazio topologico <u>compatto</u>
$\overset{\text{def}}{\iff} \forall\,\mathcal{A}$ ricop. aperto di X $\exists\,\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ sottoricop. finito
$\iff \forall\,\mathcal{A}$ ric. ap. basico di X $\exists\,\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ sottoricop. finito

<u>Esempi</u>: 1) $[0,1] \subset R$ è compatto
$(\mathcal{A}$ ric. ap. $\rightsquigarrow T = \{t \in [0,1] \mid [0,t] \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n\}$
$s = \sup T \in [0,1] \Rightarrow s \in A \in \mathcal{A} \Rightarrow s = 1 \in T)$
2) $X \subset R^m$ compatto $\Leftrightarrow$ chiuso e limitato
(conservazione della compattezza + prop. seguente)

Conservazione della compattezza:

sottospazi	unioni	prodotti	quozienti
NO (SI per ch.)	SI	SI	SI

$$\boxed{f : X \to Y \text{ continua, } X \text{ compatto} \Rightarrow f(X) \text{ compatto}}$$

<u>Note</u>: 1) sottospazi: proposizione seguente

2) unioni: $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ con $X_i \subset X$ comp. $\Rightarrow X$ comp.

3) prodotti: $\mathcal{A}$ ric. ap. basico di $X \times Y \rightsquigarrow$

$\mathcal{A}^x = \{A_1^x \times B_1^x, \ldots, A_{n_x}^x \times B_{n_x}^x\}$ t.c. $\{x\} \times Y \subset \cup \mathcal{A}^x$

$\Rightarrow A^x \times Y \subset \cup \mathcal{A}^x$ con $A^x = A_1^x \cap \ldots \cap A_{n_x}^x$ aperto

$\rightsquigarrow \{A^{x_1}, \ldots, A^{x_n}\}$ t.c. $X = A^{x_1} \cup \ldots \cup A^{x_n}$

$\Rightarrow \mathcal{A}^{x_1} \cup \ldots \cup \mathcal{A}^{x_n} \subset \mathcal{A}$ sottoricop. finito

4) appl. cont.: $\mathcal{B}$ ric. ap. di $Y \Rightarrow \mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{B})$ ric. ap. di X

<u>Prop</u>. 1) X spazio top. compatto, $Y \subset X$ chiuso $\Rightarrow Y$ compatto

2) X spazio topologico T_2, $Y \subset X$ compatto $\Rightarrow Y$ chiuso

<u>Dim</u>. 1) $\mathcal{A}$ ric. ap. di $Y \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{A} \mid A \in \mathcal{A}\} \cup \{X - Y\}$ ric. ap. di X

$\rightsquigarrow \{\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_n, X - Y\} \subset \widetilde{\mathcal{A}} \rightsquigarrow \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ ric. finito

2) $x \in X - Y$, $y \in Y \rightsquigarrow A_y, B_y$ ap. disg. t.c. $x \in A_y$ e $y \in B_y$

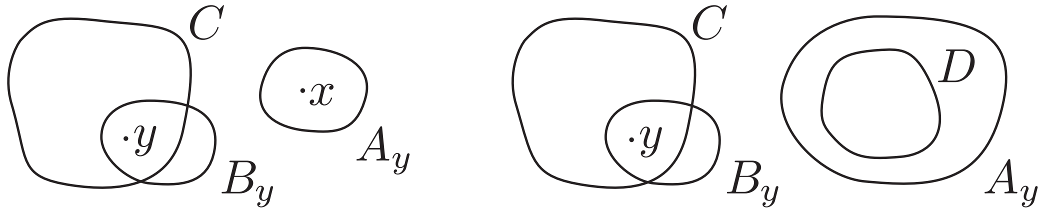
$\rightsquigarrow A = A_{y_1} \cap \ldots \cap A_{y_n}$, $B = B_{y_1} \cup \ldots \cup B_{y_n}$ aperti disg.

t.c. $x \in A$ e $Y \subset B$ ($\Rightarrow A \subset X - Y$)

<u>Prop</u>. X spazio topologico compatto $\mathrm{T}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_4$

<u>Dim</u>. 1) $\mathrm{T}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_3$ segue dalla dimostrazione precedente

2) $\mathrm{T}_3 \Rightarrow \mathrm{T}_4$ analoga con $D \subset X - Y$ chiuso al posto di x



<u>Note</u>: 1) X spazio topologico compatto $\mathrm{T}_2 \Rightarrow$ localmente compatto

2) X spazio topologico localmente compatto $\mathrm{T}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_3$

<u>Prop</u>. X spazio topologico compatto, Y sp. top. T_2

$f : X \to Y$ continua e biunivoca $\Rightarrow$ omeomorfismo

<u>Dim</u>. $C \subset X$ chiuso $\Rightarrow C$ compatto (con la top. indotta)

$\Rightarrow f(C)$ compatto $\Rightarrow f(C) \subset Y$ chiuso

Nota: X spazio topologico compatto, Y spazio topologico T_2
$f : X \to Y$ cont. (su) $\Rightarrow f/{\sim_f} : X/{\sim_f} \to Y$ immers. (omeo.)

Esempi: 1) $[0,1]/_{0\,\sim\,1} \cong S^1$
2) $B^m/_{x\,\sim\,x'\ \forall\, x,x' \in S^{m-1}} = B^m/S^{m-1} \cong S^m$
3) $B^m/_{x\,\sim\,-x\ \forall\, x \in S^{m-1}} \cong P^m$

Compattificazioni

$\widetilde{X}$ compattificazione di X spazio topologico T_2
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\widetilde{X}$ spazio topologico compatto T_2 tale che $X \subset \widetilde{X}$ denso

Note: 1) X compatto $\mathrm{T}_2 \Rightarrow \widetilde{X} = X$ è l'unica compattif. di X
2) X sp. top. T_2 ma non $\mathrm{T}_3 \Rightarrow X$ non ha compattif.
3) $i : X \to Y$ immersione densa con Y sp. top. compatto T_2
$\Rightarrow Y$ compattif. di $i(X) \cong X \rightsquigarrow \widetilde{X} \cong Y$ compattif. di X
4) $h : X \to Y$ omeo con X, Y sp. top. T_2
$\rightsquigarrow \{\text{compattif. di } X\} \leftrightarrow \{\text{compattif. di } Y\}$

Esempi: 1) $R \cong\,]-1,1[\, \rightsquigarrow \widetilde{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\} \cong [-1,1]$
2) $[-1,1]/_{-1\,\sim\,1} \cong S^1 \rightsquigarrow \widehat{R} = R \cup \{\infty\} \cong S^1$
3) $R^m \cong \operatorname{Int} B^m \rightsquigarrow \widetilde{R}^m \cong B^m$
4) $R^m \subset P^m \rightsquigarrow \overline{R}^m = P^m \ (\overline{R}^m \cong \widetilde{R}^m/{\sim})$
5) $B^m/S^{m-1} \cong S^m \rightsquigarrow \widehat{R}^m = R^m \cup \{\infty\} \cong S^m$

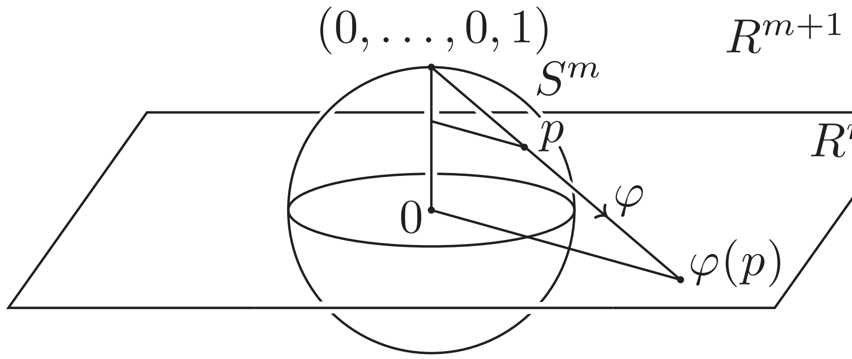
$\widehat{X}$ compattificazione di Alexandroff di X sp. top. T_2 non compatto
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\widehat{X}$ compattificazione di X t.c. $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$

Prop. X spazio top. T_2 localmente compatto non compatto
$\Rightarrow \exists\ \widehat{X}$ compattificazione di Alexandroff di X

Dim. $\widehat{X} = X \sqcup \{\infty\}$, $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{(X-K) \cup \{\infty\} \mid K \subset X \text{ compatto}\}$
$\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ compatto ($\mathcal{A}$ ric. ap. $\Rightarrow \exists\,(X-K) \cup \{\infty\} \in \mathcal{A}$)
X loc. compatto $\mathrm{T}_2 \Rightarrow \widehat{X}$ è T_2
X non compatto $\Rightarrow X \subset \widehat{X}$ è denso

Note: 1) vale anche il viceversa: $\exists \widehat{X} \Rightarrow X$ loc. compatto
2) $\widehat{X}$ è unica a mano di omeo canonici ($= \mathrm{id}_X$ su X)
3) $h : X \to Y$ omeo $\rightsquigarrow \widehat{h} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ omeo ($\widehat{h}_{|X} = h$, $\widehat{h}(\infty) = \infty$)

Esempio: $\widehat{R}^m \cong S^m$



$\varphi : S^m - \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to R^m$ biunivoca
proiezione stereografica
$\varphi(x_1, \ldots, x_{m+1}) = (x_1, \ldots, x_m)/(1 - x_{m+1})$
$\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (2x_1, \ldots, 2x_n, \|x\|^2 - 1)/(\|x\|^2 + 1)$
φ omeo $\Rightarrow \widehat{\varphi} : S^m \to \widehat{R}^m$ omeo

Compattezza negli spazi metrizzabili

Prop. X spazio top. compatto metrizzabile $\Rightarrow$ separabile (II-num.)

Dim. $\mathcal{B}_n = \{B(x, 1/n) \mid x \in X\}$ ricoprimento aperto per ogni $n \geq 1$
$\rightsquigarrow \{B(x_{i,n}, 1/n) \mid i = 1, \ldots, m_n\}$ sottoricoprimento finito
$\Rightarrow D = \{x_{i,n} \mid i = 1, \ldots, m_n\,,\ n \geq 1\}$ denso in X

Prop. X spazio topologico metrizzabile, sono equivalenti:
1) X compatto
2) $S \subset X$ infinito $\Rightarrow S' \neq \varnothing$ (Bolzano-Weierstrasse)
3) $\forall\, (x_n)_{n \geq 1} \subset X\ \ \exists\, (x_{n_i})_{i \geq 1} \to x \in X$ (comp. per successioni)

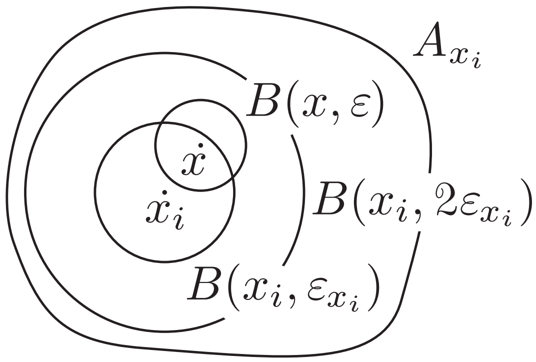
Dim. 1) $\Rightarrow$ 2) $S' = \varnothing \Rightarrow S$ chiuso e discreto $\Rightarrow S$ finito
2) $\Rightarrow$ 3) $\{x_n\}_{n \geq 1}$ finito $\Rightarrow \exists\, (x_{n_i})_{i \geq 1}$ t.c. $x_{n_i} = x\ \forall\, i \geq 1$
$\{x_n\}_{n \geq 1}$ infinito $\Rightarrow \exists\, x \in X$ di acc. per $\{x_n\}_{n \geq 1}$
$\Rightarrow \exists\, (x_{n_i})_{i \geq 1}$ t.c. $x_{n_i} \in B(x, 1/i) \Rightarrow (x_{n_i})_{i \geq 1} \to x$

3) $\Rightarrow$ 1) 3) $\Rightarrow \mathcal{B}_n = \{B(x, 1/n) \,|\, x \in X\} \rightsquigarrow \mathcal{A}_n$ sottoric. finito
$\Rightarrow X$ è II-numerabile ($\cup_n \mathcal{A}_n$ base numerabile)
$\mathcal{A}$ ric. aperto $\rightsquigarrow \{A_n\}_{n\geq 1}$ sottoric. numerabile
$\nexists$ sottoric. finito di $\mathcal{A}$ (per assurdo)
$\rightsquigarrow (x_n)_{n\geq 1} \subset X$ t.c. $x_n \notin A_1 \cup \ldots \cup A_n$
$\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ non ha sottosucc. convergenti

Note: 1) compatto $\Rightarrow$ B.-W. vale anche per spazi non metriz.
2) (X, d) sp. metrizzabile compatto $\not\Longleftarrow\!\Longrightarrow$ limitato

Prop. (X, d) spazio metrico compatto, $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto
$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $B(x, \varepsilon) \subset A_x \in \mathcal{A} \;\; \forall\, x \in X$ (num. di Lebesgue)

Dim. $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon_x) \,|\, x \in X\}$ con $B(x, 2\varepsilon_x) \subset A_x \in \mathcal{A} \;\; \forall\, x \in X$
$\{B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ sottoric. finito
$\rightsquigarrow \varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n}\}$



Prop. $f : (X, d) \to (Y, d)$ con X compatto
f continua $\Rightarrow f$ uniformemente continua

Dim. $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \mathcal{B} = \{B(y, \varepsilon/2) \,|\, y \in Y\}$ ricoprimento aperto di Y
$\rightsquigarrow \mathcal{A} = \{f^{-1}(B(y, \varepsilon/2)) \,|\, y \in Y\}$ ricoprimento aperto di X
$\rightsquigarrow \delta(\varepsilon)$ = numero di Lebesgue per $\mathcal{A}$

Spazi metrici completi

(X, d) spazio metrico completo
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} [(x_n)_{n\geq 1}$ succ. di Cauchy in $X \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ convergente in $X]$
$\hookrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n \geq 1$ t.c. $n', n'' \geq n \Rightarrow d(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$

<u>Note</u>: 1) la completezza non è una prop. topologica (dipende da d)

2) $(X, \mathcal{T}_d)$ sp. top. compatto $\Rightarrow$ (X, d) sp. met. completo

3) (X, d) completo $\Rightarrow$ $[Y \subset X$ chiuso $\Leftrightarrow$ $(Y, d_{|Y})$ completo$]$

4) (X_i, d_i) completo $\forall\, i \Rightarrow (X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n, d)$ completo

5) (X_i, d_i) completo $\forall\, i \Rightarrow (X_1 \times \ldots \times X_n, d/d'/d'')$ completo

<u>Prop</u>. (X, d) sp. metrico t.c. $\exists\, \varepsilon > 0$ con $\overline{B(x, \varepsilon)}$ compatto $\forall\, x \in X$
$\Rightarrow (X, d)$ spazio metrico completo

<u>Dim</u>. $(x_n)_{n \geq 1}$ succ. di Cauchy in (X, d)
$\Rightarrow \exists\, \bar{n} \geq 1\ \exists\, x \in X$ t.c. $x_n \in \overline{B(x, \varepsilon)}\ \forall\, n > \bar{n}$
$\rightsquigarrow (x_{n_i})_{i \geq 1}$ sottosucc. convergente $\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ convergente

<u>Nota</u>: $\Leftarrow$ non vale (loc. compatto $\not\Leftarrow\!\not\Rightarrow$ completo)

<u>Esempi</u>: 1) R^m completo non compatto

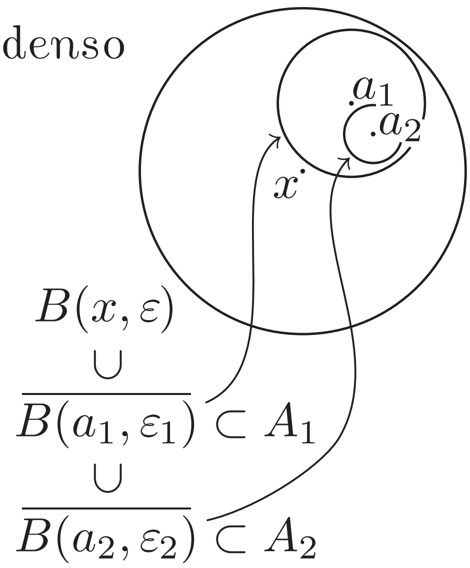
2) $R^m - \{0\}$ localmente compatto non completo

3) $C(R, R)$ completo non localmente compatto

<u>Teorema di Baire</u>

(X, d) spazio metrico completo
$A_n \subset X$ aperto denso $\forall\, n \geq 1 \Rightarrow \cap_{n \geq 1} A_n$ denso

<u>Dim</u>. $x \in X,\ \varepsilon > 0 \rightsquigarrow a_1 \in A_1,\ \varepsilon_1 > 0$
t.c. $\overline{B(a_1, \varepsilon_1)} \subset A_1 \cap B(x, \varepsilon)$
induz. $\rightsquigarrow a_n \in A_n,\ 0 < \varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}/2$
t.c. $\overline{B(a_n, \varepsilon_n)} \subset A_n \cap B(a_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$
$\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ succ. di Cauchy
$\Rightarrow a_n \to a \in \cap_{n \geq 1} A_n \cap B(x, \varepsilon)$



<u>Teorema del punto fisso per le contrazioni</u>

(X, d) spazio metrico completo non vuoto
$f : X \to X$ k-lipschitziana con $k < 1$
$\Rightarrow \exists!\, x \in X$ t.c. $f(x) = x$ (<u>punto fisso</u>)

Dim. $x_0 \in X \rightsquigarrow x_0 \overset{f}{\mapsto} x_1 \overset{f}{\mapsto} x_2 \overset{f}{\mapsto} \ldots \overset{f}{\mapsto} x_{n-1} \overset{f}{\mapsto} x_n \overset{f}{\mapsto} x_{n+1} \overset{f}{\mapsto} \ldots$
$d(x_n, x_{n+1}) \leq k\, d(x_{n-1}, x_n) \leq \ldots \leq k^n d(x_0, x_1)\ \forall\, n \geq 1$
$\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ succ. di Cauchy in $X \Rightarrow x_n \to x$ punto fisso
x e x' punti fissi $\Rightarrow d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq k\, d(x, x')$

Note: 1) il teorema non vale per funzioni (strettam.) 1-lipschitz.
2) i teoremi precedenti ricorrono spesso in analisi applicati a spazi di funzioni, ad esempio per provare:
1) $\exists\, f : R \to R$ continua ma ovunque non derivabile
2) $\exists\,!$ soluzione per i problemi di Cauchy

Connessione

X spazio topologico

connesso $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \nexists\, A, B \subset X$ aperti $\neq \varnothing$ t.c. $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = X$
$\Longleftrightarrow [S \subset X$ aperto e chiuso $\Rightarrow S = \varnothing, X]$

connesso per archi $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, x, y \in X\ \exists\, \alpha : [0,1] \to X$ continua t.c. $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$

Esempi: 1) $[0,1] \subset R$ è connesso (per archi)
($0 \in S \subset [0,1]$ ap. e ch. $\rightsquigarrow T = \{x \in [0,1] \mid [0,x] \subset S\}$
$s = \sup T \in [0,1] \ \Rightarrow\ s = 1 \in T \ \Rightarrow\ S = [0,1]$)
2) $X \subset R$ connesso (per archi) $\Leftrightarrow$
$X = \varnothing$, punto, intervallo, semiretta, R
3) $X \subset R^m$ convesso $\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow X$ connesso (per archi)
4) $R^m - F$ connesso (per archi) se $m \geq 2$ e F finito/num.

Conservazione della connessione (per archi)

sottospazi	unioni	prodotti	quozienti
NO	NO	SI	SI

$$\boxed{f : X \to Y \text{ continua, } X \text{ conn. (p.a.)} \Rightarrow f(X) \text{ conn. (p.a.)}}$$

<u>Note</u>: 1) prodotti: $X \times Y = \cup_{y \in Y} X \times \{y\} \cup \{x_0\} \times Y$ (prop. seguente)
2) appl. cont.: $S \subset f(X)$ ap. e ch. $\Rightarrow f^{-1}(S) \subset X$ ap. e ch.
$\alpha : [0,1] \to X$ cont. $\Rightarrow f \circ \alpha : [0,1] \to Y$ cont.

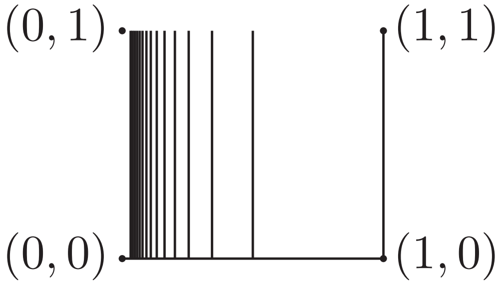
<u>Prop</u>. $X = \cup_{i \in I} X_i$ sp. top., X_i connesso (per archi) $\forall\, i \in I$
allora: 1) $\cap_{i \in I} X_i \neq \varnothing \Rightarrow X$ connesso (per archi)
2) $X_i \cap X_{i_0} \neq \varnothing \ \forall\, i \in I \Rightarrow X$ connesso (per archi)

<u>Dim</u>. 1) $x_0 \in \cap_{i \in I} X_i \Rightarrow [S \subset X$ ap. e ch. t.c. $x_0 \in S$
$\Rightarrow \varnothing \neq S \cap X_i \subset X_i$ ap. e ch. in X_i
$\Rightarrow S \cap X_i = X_i \ \forall\, i \in I \Rightarrow S = X\,]$
$\Rightarrow \alpha$ arco in $X_i \subset X$ tra x_0 e $x \in X_i$
β arco in $X_j \subset X$ tra x_0 e $y \in X_j$
$\rightsquigarrow \gamma = \bar{\alpha} \cdot \beta$ arco in X tra x e y
2) $X = \cup_{i \in I} X'_i$ con $X'_i = X_i \cup X_{i_0}$ $(\cap_{i \in I} X'_i \supset X_{i_0} \neq \varnothing)$

<u>Prop</u>. X spazio top. connesso per archi $\Rightarrow$ connesso

<u>Dim</u>. $X = \cup_{x \in X} \alpha_x([0,1])$ con α_x arco tra x_0 e x

<u>Nota</u>: connesso $\not\Rightarrow$ connesso per archi
$(X = [0,1] \times \{0\} \cup \{1/n \mid n \geq 1\} \times [0,1] \cup \{(0,1)\}$
è connesso (prop. seguente) ma non connesso per archi
$\nexists\, \alpha : [0,1] \to X$ cont. t.c. $\alpha(0) = (0,1)$ e $\alpha(1) \neq (0,1))$



<u>Prop</u>. X spazio top., $D \subset X$ denso, D connesso $\Rightarrow X$ connesso

<u>Dim</u>. $\varnothing \neq S \subset X$ ap. e ch. $\Rightarrow \varnothing \neq S \cap D \subset D$ ap. e ch.
$\Rightarrow S \cap D = D \Rightarrow D \subset S \Rightarrow S = X$ $(X = \mathrm{Cl}\, D \subset \mathrm{Cl}\, S = S)$

Componenti connesse (per archi)

X spazio topologico, $x \in X \rightsquigarrow$

$C_x \overset{\text{def}}{=\!=} \cup\{C \subset X \mid x \in C \text{ connesso}\}$

$=\!=$ il più grande sottosp. connesso di X contenente x

(componente connessa di x in X)

$A_x \overset{\text{def}}{=\!=} \cup\{A \subset X \mid x \in C \text{ connesso per archi}\}$

$=\!=$ il più grande sottosp. conn. p.a. di X contenente x

(componente connessa per archi di x in X)

Note: 1) $\mathcal{C}_X = \{C_x \mid x \in X\}$ è una partizione chiusa di X

2) $\mathcal{A}_X = \{A_x \mid x \in X\}$ è una partizione di X

3) $\#(\mathcal{C}_X)$ e $\#(\mathcal{A}_X)$ sono proprietà topologiche

($h : X \to Y$ omeo $\rightsquigarrow \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_Y$ e $\mathcal{A}_X \to \mathcal{A}_Y$ corrisp. biun.)

Prop. 1) X spazio top. loc. conn. $\Rightarrow C_x$ aperto $\forall\, x \in X$

2) X spazio top. loc. conn. p.a. $\Rightarrow A_x$ aperto $\forall\, x \in X$

Dim. X loc. conn. (p.a.) $\Rightarrow \forall\, x \in X\ \exists\, I \in \mathcal{I}_x$ t.c. I conn. (p.a.)

$\Rightarrow I \subset C_x\ (A_x) \Rightarrow x \in \operatorname{Int} C_x\ (\operatorname{Int} A_x) \Rightarrow C_x\ (A_x)$ aperto

Corol. $A \subset R$ aperto $\Leftrightarrow A =$ *unione disgiunta numerabile di intervalli aperti*

Dim. A loc. conn. $\Rightarrow$ comp. connesse di $A =$ *intervalli aperti*

Prop. X spazio top. connesso e loc. connesso p.a. $\Rightarrow$ connesso p.a.

Dim. $x \in X \rightsquigarrow A_x$ aperto e chiuso non vuoto $\Rightarrow A_x = X$