Applicazioni geometriche dell'omotopia

Prop. $S^n \cong S^m \Leftrightarrow S^n \simeq S^m \Leftrightarrow n = m$ con $m = 0, 1$ (vale $\forall\, m \geq 0$)

Dim. S^0 non connesso p.a., mentre S^n connesso p.a. $\forall\, n \geq 1$
$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, mentre $\pi_1(S^n) \cong 0$ $\forall\, n \geq 2$

Teorema di invarianza della dimensione

$R^n \cong R^m \Leftrightarrow n = m$ con $m = 1, 2$ (vale $\forall\, m \geq 1$)

Dim. $h : R^n \cong R^m \rightsquigarrow \tau_{-h(0)} \circ h_| : R^n - \{0\} \cong R^m - \{0\}$
$\Rightarrow S^{n-1} \simeq S^{m-1}$ $\quad (S^{n-1} \swarrow R^n - \{0\} \cong R^m - \{0\} \searrow S^{m-1})$

Nota: esiste una nozione di dimensione topologica che associa ad ogni spazio topologico X un intero $\dim X \geq 0$ tale che:
1) $X \cong X' \Rightarrow \dim X = \dim X'$ (invarianza topologica)
2) $\dim R^m = m$ (= dimensione algebrica di sp. vettoriale)

Teorema di non retrazione

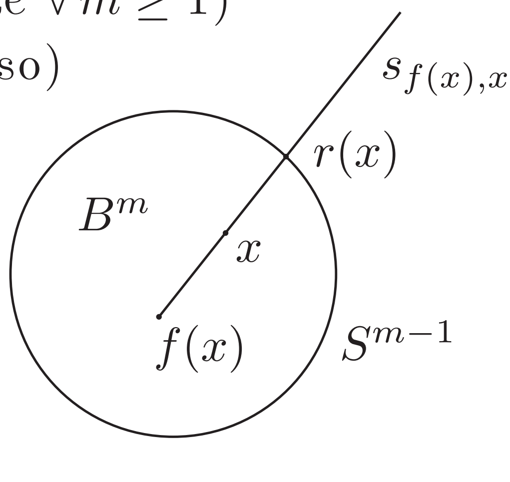
$\nexists$ retrazione cont. di B^m su S^{m-1} con $m = 1, 2$ (vale $\forall\, m \geq 1$)
infatti: $\forall\, f : B^m \to S^{m-1}$ continua $\exists\, x \in S^{m-1}$ t.c. $f(x) = f(-x)$

Dim. $m = 1$) $\nexists\, f : B^1 \to S^0$ cont. $\Rightarrow f(B^1)$ conn. p.a. $\Rightarrow f$ cost.
$m = 2$) $f : B^2 \to S^1$ cont. $\rightsquigarrow \widetilde{f} : B^2 \to \widetilde{S}^1 \cong R$ soll. cont. di f
$\rightsquigarrow g : S^1 \to R$ definita $g(x) = \widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(-x)$
$g(-x) = -g(x)$ $\forall\, x \in S^1 \Rightarrow \exists\, x \in S^1$ t.c. $g(x) = 0$

Teorema del punto fisso di Brouwer

$f : B^m \to B^m$ continua con $m = 1, 2$ (vale $\forall\, m \geq 1$)
$\Rightarrow \exists\, x \in B^m$ tale che $f(x) = x$ (punto fisso)

Dim. $f(x) \neq x$ $\forall\, x \in B^m$
$\rightsquigarrow r : B^m \to S^{m-1}$ retrazione cont.
definita $r(x) = s_{f(x),x} \cap S^{m-1}$
con $s_{f(x),x}$ = semiretta aperta uscente da $f(x)$ passante per x



Teorema di Borsuk-Ulam

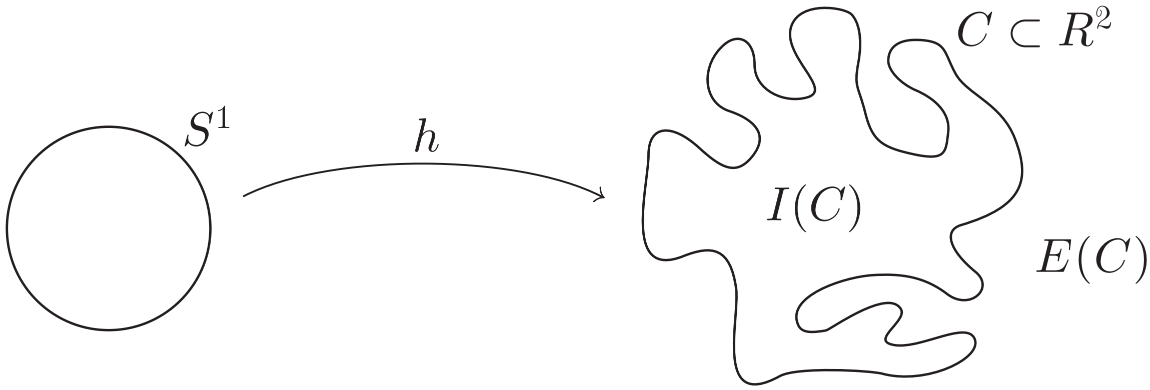
$f : S^m \to R^m$ continua con $m = 1, 2$ (vale $\forall\, m \geq 1$)
$\Rightarrow \exists\, x \in S^m$ t.c. $f(x) = f(-x)$

Dim. $f(x) \neq f(-x)\ \forall\, x \in S^m$ (per assurdo)
$\rightsquigarrow g : S^m \to S^{m-1}$ def. $g(x) = (f(x) - f(-x))/\|f(x) - f(-x)\|$
$\rightsquigarrow g_{|} : S^m_+ \cong B^m \to S^{m-1}$ continua
tale che $g(-x) = -g(x)\ \forall\, x \in S^{m-1}$

Note: 1) Teorema di B.-U. $\Rightarrow S^m$ non si può immergere in R^m
2) interpretazione fisica: in ogni istante ci sono almeno due punti sulla superficie terrestre con la stessa temperatura e la stessa pressione

Curve di Jordan

$C \subset R^2$ curva di Jordan $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} C \cong S^1$
($\Leftrightarrow \exists\, h : S^1 \to R^2$ immersione t.c. $h(S^1) = C$)

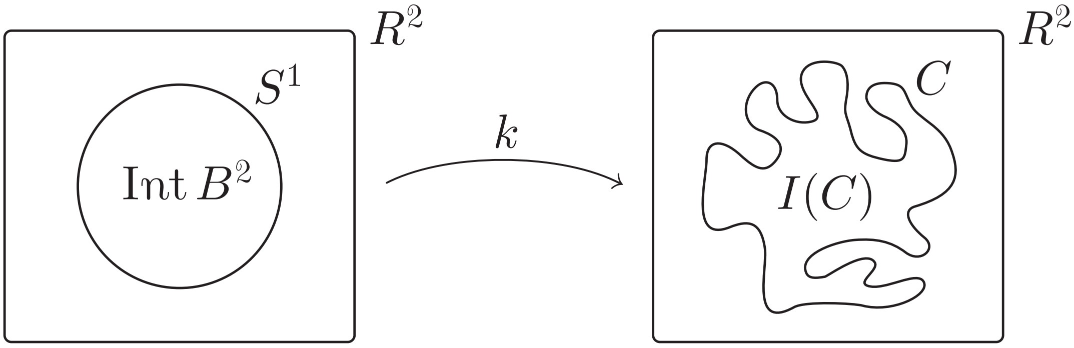


Teorema di Jordan

$C \subset R^2$ curva di Jordan
$\Rightarrow R^2 - C$ ha due componenti connesse (p.a.)
$I(C)$ limitata, sempl. conn. con $\mathrm{Fr}(I(C)) = C$ (interno)
$E(C)$ illimitata con $\mathrm{Fr}(E(C)) = C$ (esterno)

Teorema di Schönflies

$C \subset R^2$ curva di Jordan $\Rightarrow \exists\, k : R^2 \to R^2$ omeo t.c. $k(S^1) = C$
($\forall\, h : S^1 \to R^2$ immersione t.c. $h(S^1) = C\ \ \exists\, k$ t.c. $k_{|S^1} = h$)



<u>Note</u>: 1) Teorema di Schönflies $\Rightarrow$ Teorema di Jordan
$(I(C) = k(\operatorname{Int} B^2)$ ed $E(C) = k(R^2 - B^2))$

2) il teor. di Jordan vale anche in dim > 2 (per $S^{m-1} \hookrightarrow R^m$)
il teor. di Schönflies non vale neppure in dim 3 ($S^2 \hookrightarrow R^3$)

Dimostreremo il teorema di Schönflies nei casi speciali $C = \operatorname{Fr} D$ con D chiuso regolare convesso e $C =$ poligonale chiusa, useremo poi questo per dimostrare il teorema di Jordan.

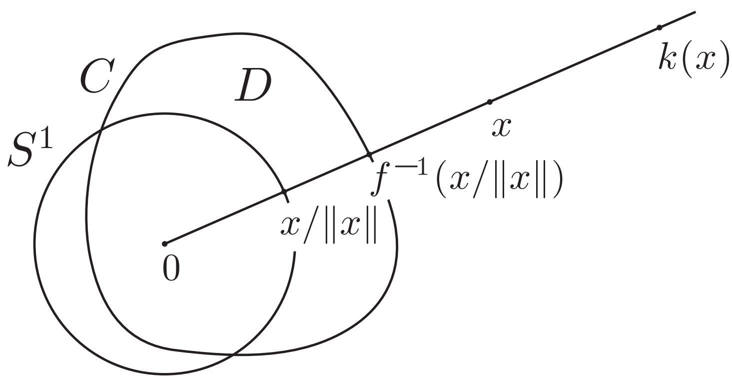
<u>Dim</u>. (teorema di Schönflies per $C = \operatorname{Fr} D$, $D =$ ch. reg. convesso)

C compatto $\Rightarrow$ D compatto, D regolare $\Rightarrow \operatorname{Int} D \neq \varnothing$

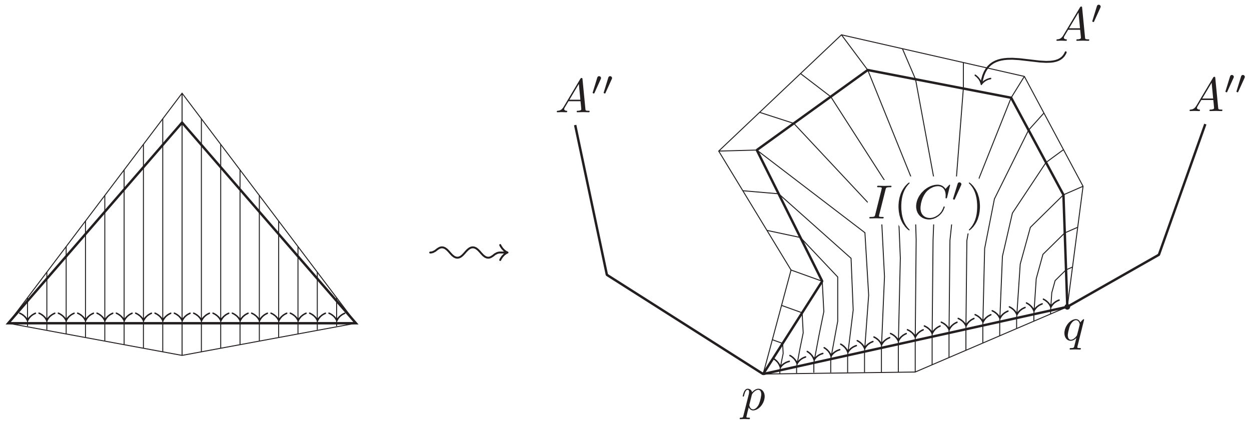
$0 \in \operatorname{Int} D \rightsquigarrow f : C \to S^1$ definita $f(x) = x/\|x\|$
continua e biiettiva $\Rightarrow$ omeomorfismo
$\rightsquigarrow k : R^2 \to R^2$ omeomorfismo definito
$k(x) = \|f^{-1}(x/\|x\|)\|\, x \quad \forall\, x \neq 0$ e $k(0) = 0$

$x \in S^1 \Rightarrow f^{-1}(x)/\|f^{-1}(x)\| = f(f^{-1}(x)) = x$
$\Rightarrow k(x) = \|f^{-1}(x)\|\, x = f^{-1}(x)$

$\Rightarrow k(S^1) = f^{-1}(S^1) = C$



Dim. (teorema di Schönflies per C = poligonale chiusa semplice)
per induzione su $n(C) = \#\,\mathrm{Vert}\,C$ (vertici di C)
$n(C) = 3 \Rightarrow C = \mathrm{Fr}\,T$ con T triangolo (convesso regolare)
$n(C) > 3 \Rightarrow C$ convesso regolare o altrimenti $\exists\, p, q \in \mathrm{Vert}\,C$ tali che $p \neq q$ e $\langle p, q\rangle \cap C = \{p, q\}$
$\rightsquigarrow C = A' \cup A''$ con A' e A'' archi tra p e q
$\rightsquigarrow C' = A' \cup \langle p, q\rangle$ e $C'' = A'' \cup \langle p, q\rangle$ poligonali chiuse semplici tali che $n(C'), n(C'') < n(C)$ e $\mathrm{Cl}\,I(C') \subset \mathrm{Cl}\,I(C'')$
$\rightsquigarrow h : R^2 \to R^2$ omeo t.c. $h(C) = C''$

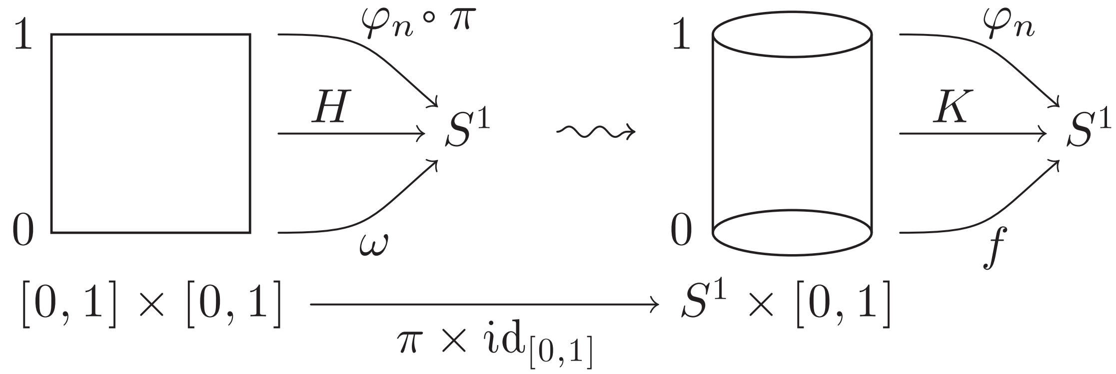


Prima di dimostrare il teorema di Jordan introduciamo la nozione di indice di allacciamento e proviamo alcuni risultati preliminari

$\pi : [0,1] \to S^1$ definita $\pi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\ \ \forall\, t \in [0,1]$
$\varphi_n : S^1 \to S^1$ definita $\varphi_n(z) = z^n\ \ \forall\, z \in S^1 \subset R^2 \cong \mathbb{C}$
$\Rightarrow \sigma = [\pi]_{\{0,1\}}$ generatore di $\pi_1(S^1)$ e $\varphi_{n*}(\sigma) = \sigma^n\ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$

Prop. $f : S^1 \to S^1$ continua $\Rightarrow \exists!\, n \in \mathbb{Z}$ tale che $f \simeq \varphi_n$

Dim. unicità: $H : \varphi_n \simeq \varphi_m \Rightarrow \varphi_{n*} = \alpha^H_* \circ \varphi_{m*} = \varphi_{m*}$
$(\alpha^H \in \Omega(S^1, *) \Rightarrow \alpha^H_*$ coniugio in $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z})$
$\Rightarrow \sigma^n = \varphi_{n*}(\sigma) = \varphi_{m*}(\sigma) = \sigma^m \Rightarrow n = m$
esistenza: $f \simeq g : S^1 \to S^1$ t.c. $g(*) = * = (1, 0)$
$\omega = g \circ \pi : [0,1] \to S^1 \rightsquigarrow [\omega] = \sigma^n \in \pi_1(S^1, *)$
$\rightsquigarrow H : \omega \simeq_{\{0,1\}} \varphi_n \circ \pi \rightsquigarrow K = H/\!\sim\, : f \simeq \varphi_n$



$f : S^1 \to S^1$ applicazione continua

$d(f) = n \overset{\text{def}}{\iff} f \simeq \varphi_n$ con $n \in \mathbb{Z}$ $\longleftarrow$ <u>grado</u> di f

<u>Note</u>: 1) $d(f)$ ben definito e $f \simeq f' \Leftrightarrow d(f) = d(f')$

2) $d(g \circ f) = d(g)\, d(f) \quad \forall\, f, g : S^1 \to S^1$

3) $d(\text{cost.}) = 0$, $d(\text{id}_{S^1}) = 1$, $d(\iota) = -1$

con $\iota : S^1 \to S^1$ definita $\iota(z) = \bar{z} = z^{-1}\ \forall\, z \in S^1$

4) $h : S^1 \to S^1$ omeo $\Rightarrow d(h) = \pm 1 \Rightarrow h \simeq \text{id}_{S^1}, \iota$

($\pm$ a seconda che h conserva/inverte l'orientazione)

$C \subset R^2$ curva di Jordan <u>orientata</u> (= con verso di percorrenza)

$h : S^1 \to C$ omeo orientato (risp. al verso antiorario su S^1)

$i_pC \overset{\text{def}}{=\!=} d(\nu_p \circ h)$ con $\nu_p : R^2 - \{p\} \to S^1$ definita $\nu_p(x) = \dfrac{x - p}{\|x - p\|}$

$\longleftarrow$ <u>indice di allacciamento</u> di C rispetto a $p \in R^2 - C$

<u>Note</u>: 1) i_pC è ben definito (non dipende da h)

orientazione opposta $\rightsquigarrow$ indice opposto

2) $p, p' \in$ stessa comp. conn. (p.a.) di $R^2 - C \Rightarrow i_pC = i_{p'}C$

(α arco in $R^2 - C \rightsquigarrow H = (\nu_{\alpha(t)} \circ h)_t : \nu_{\alpha(0)} \circ h \simeq \nu_{\alpha(1)} \circ h$)

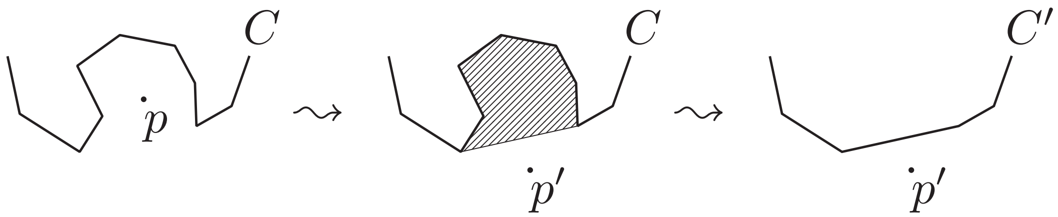
3) $C \simeq C'$ (cioè $h \simeq h'$) in $R^2 - \{p\} \Rightarrow i_pC = i_pC'$

4) C = curva di Jordan poligonale $\Rightarrow$

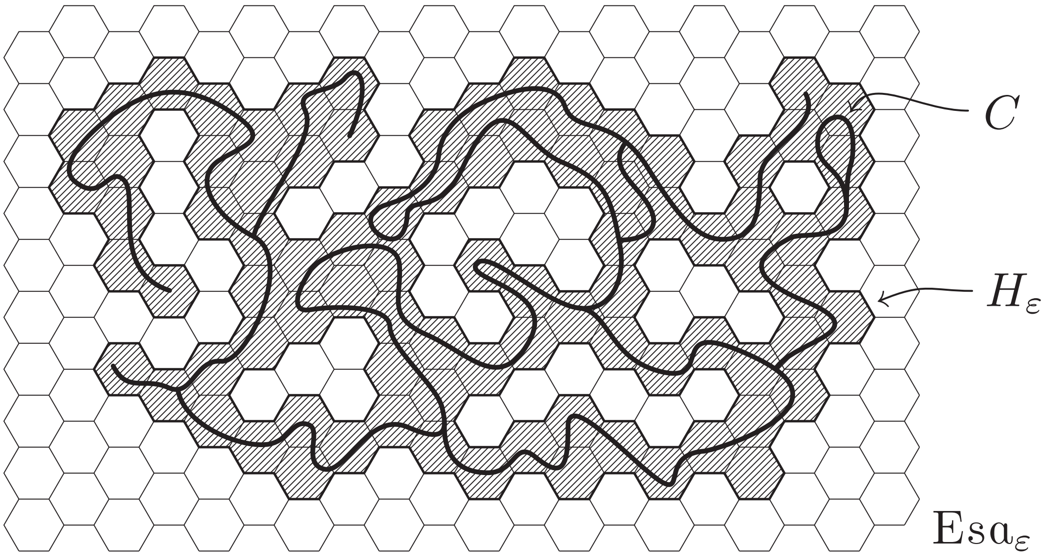
$$i_pC = \begin{cases} 0 \text{ se } p \in E(C) \\ \pm 1 \text{ se } p \in I(C) \ (\pm \text{ dipende solo dall'orient. di } C) \end{cases}$$

(per induzione su $n(C)$: $n(C) = 3$ banale,

$n(C) > 3 \Rightarrow i_pC = i_{p'}C'$ con $n(C') < n(C)$)



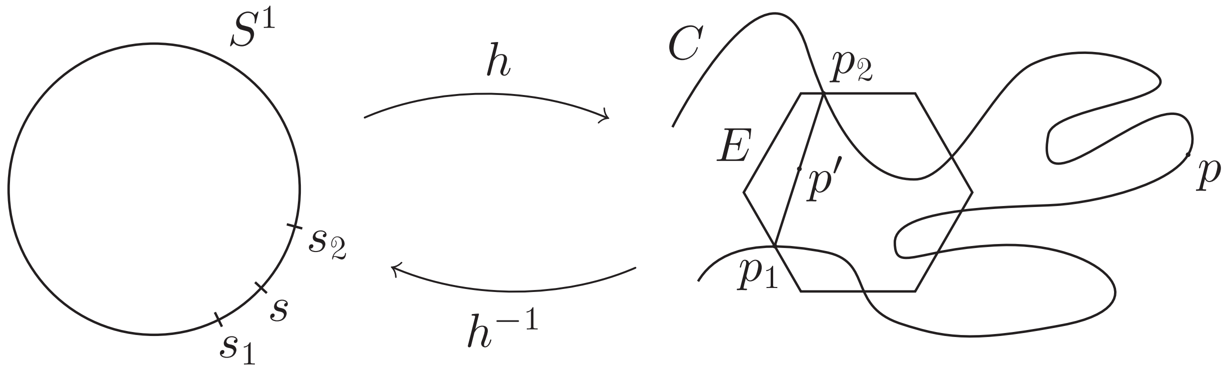
$\mathrm{Esa}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=\!=}$ tassellazione di R^2 con esagoni reg. ch. di diam $= \varepsilon > 0$
$C \subset R^2$ compatto $\rightsquigarrow H_\varepsilon C \stackrel{\text{def}}{=\!=} \cup\{E \in \mathrm{Esa}_\varepsilon \text{ t.c. } E \cap C \neq \varnothing\}$



<u>Note</u>: 1) C compatto $\Rightarrow H_\varepsilon C$ intorno compatto di C
($\{H_\varepsilon C \mid \varepsilon > 0\}$ è una base di intorni di C in R^2)
2) $\mathrm{Fr}\, H_\varepsilon C = F_0 \sqcup F_1 \sqcup \ldots \sqcup F_n$ con F_i curva di Jordan polig.
3) C connesso (p.a.) $\Rightarrow H_\varepsilon C$ connesso p.a.
$\Rightarrow F_i \subset I(F_0) \;\; \forall\, i = 1, \ldots, n$ (con opportuna numeraz.)
$H_\varepsilon C = \mathrm{Cl}\, I(F_0) - (I(F_1) \sqcup \ldots \sqcup I(F_n))$

<u>Lemma</u>. $C \subset R^2$ curva di Jordan, $h : S^1 \to C$ omeo $\Rightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, C_\varepsilon \subset R^2$ curva di Jordan poligonale con
$h_\varepsilon : S^1 \to C_\varepsilon$ omeo t.c. $d(h_\varepsilon(s), h(s)) \leq \varepsilon \;\forall\, s \in S^1$

<u>Dim</u>. compattezza $\Rightarrow h$ unif. cont. $(\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $\ldots)$
h^{-1} unif. cont. $(\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta'(\varepsilon) > 0$ t.c. $\ldots)$
$\rightsquigarrow \eta = \min\{\varepsilon/2, \delta'(\min\{\delta(\varepsilon/2), \pi/2\})\} > 0$
$\rightsquigarrow C_\varepsilon$ t.c. $C_\varepsilon \cap E = \varnothing, \; \{p_1\}$ o $\langle p_1, p_2 \rangle \;\; \forall\, E \in \mathrm{Esa}_\eta$



$$d(p_1, p_2) \leq \eta \leq \delta' \Rightarrow d(s_1, s_2) < \min\{\delta(\varepsilon/2), \pi/2\}$$
$$\Rightarrow d(s, s_2) \leq \delta(\varepsilon/2) \Rightarrow d(p, p_2) \leq \varepsilon \Rightarrow d(p, p') \leq \varepsilon/2 + \eta \leq \varepsilon$$

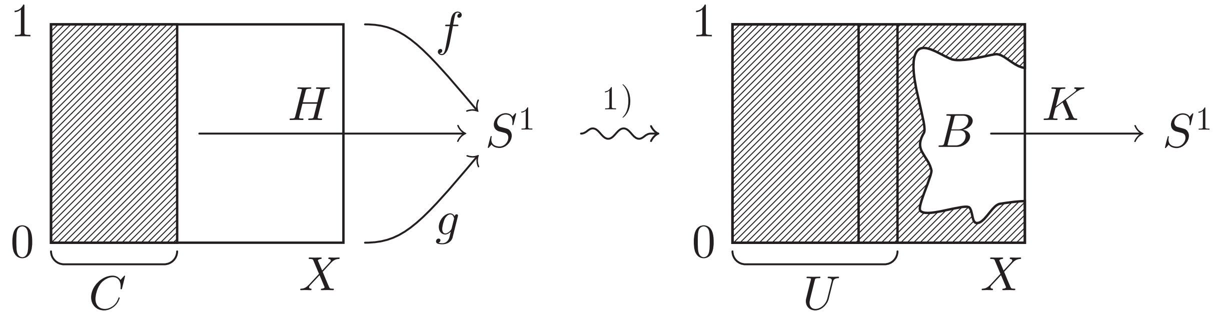
Lemma. X spazio topologico metrizzabile, $C \subset X$ chiuso

1) $f : C \to S^1$ applicazione continua $\Rightarrow$
$\exists\, \widetilde{f} : A \to S^1$ estens. cont. di f con A intorno di C in X

2) $f, g : X \to S^1$ applicazioni continue, $H : f_{|C} \simeq g_{|C} \Rightarrow$
$\exists\, \widetilde{H} : f_{|A} \simeq g_{|A}$ estens. cont. di H con A int. di C in X

Dim. 1) $S^1 \subset R^2 \rightsquigarrow i \circ f : C \to R^2$ con $i : S^1 \to R^2$ inclusione
$\Rightarrow \exists\, g : X \to R^2$ estens. cont. di f (teorema di Tietze)
$\rightsquigarrow A = g^{-1}(R^2 - \{0\})$, $\widetilde{f} = r \circ g : A \to S^1$
con $r : R^2 - \{0\} \to S^1$ retrazione

2) $C \times [0,1] \cup X \times \{0,1\}$ chiuso in $X \times [0,1]$
$\rightsquigarrow K : B \to S^1$ estensione continua di $H \cup f \cup g$
$\exists\, A$ int. di C in X t.c. $A \times [0,1] \subset B \rightsquigarrow \widetilde{H} = K_{|A \times [0,1]}$



Lemma. $C \subset R^2$ compatto, $p, q \in R^2 - C$

$\nu_{p|C} \simeq \nu_{q|C} \Leftrightarrow p$ e $q \in$ stessa comp. conn. (p.a.) di $R^2 - C$
$\Leftrightarrow i_p C = i_q C$ se C è una curva di Jordan orientata

Dim. $\Leftarrow$) $\alpha : [0,1] \to R^2 - C$ arco tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$

$\rightsquigarrow H = \{\nu_{\alpha(t)|C}\}_{t\in[0,1]} : \nu_{p|C} \simeq \nu_{q|C}$

$\Rightarrow$) $\nu_{p|C} \simeq \nu_{q|C} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tale che $\nu_{p|H_\varepsilon C} \simeq \nu_{q|H_\varepsilon C}$

$\mathrm{Fr}\, H_\varepsilon C = \sqcup_i F_i \Rightarrow \nu_{p|F_i} \simeq \nu_{q|F_i} \Rightarrow i_p F_i = i_q F_i$ per ogni i

$\Rightarrow p$ e $q \in$ stessa comp. conn. (p.a.) di $R^2 - H_\varepsilon C$

C curva di Jordan orientata, $h : S^1 \to C$ omeo orientato

$i_p C = i_q C \Leftrightarrow d(\nu_p \circ h) = d(\nu_q \circ h) \Leftrightarrow \nu_p \circ h \simeq \nu_q \circ h \Leftrightarrow \nu_{p|C} \simeq \nu_{q|C}$

Dim. (teorema di Jordan)

1) $R^2 - C$ ha una sola comp. illimitata $E(C)$

inoltre: $p \in E(C) \Leftrightarrow i_p C = 0$

(C compatto $\Rightarrow C \subset B(0,r)$ con $r > 0 \Rightarrow$

$E(C) =$ unica comp. di $R^2 - C$ contenente $R^2 - B(0,r)$

$p \in R^2 - B(0,r) \Rightarrow \nu_p(C) \subsetneq S^1 \Rightarrow \nu_{p|C} \simeq$ cost. $\Rightarrow i_p(C) = 0$)

2) $R^2 - C$ ha almeno una comp. limitata $I(C)$

($h : S^1 \to C$ omeo $\rightsquigarrow f = h^{-1} : C \to S^1$ omeo

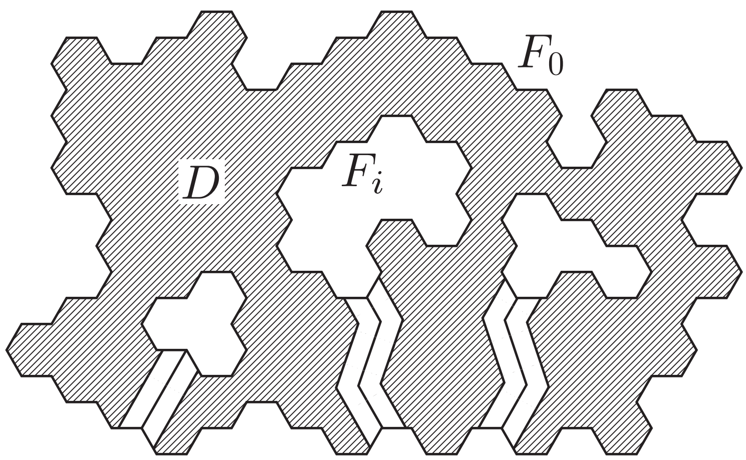
$\rightsquigarrow \widetilde{f} : H_\varepsilon C \to S^1$ estensione continua di f

$\mathrm{Fr}\, H_\varepsilon C = F_0 \sqcup F_1 \sqcup \ldots \sqcup F_n$ con $F_i \subset I(F_0)\ \ \forall i > 0$

$R^2 - C$ conn. (p.a.) $\Rightarrow \exists$ polig. in $R^2 - C$ tra F_0 e F_i

$\rightsquigarrow D \subset H_\varepsilon C$ intorno compatto di C

t.c. $\mathrm{Fr}\, D =$ curva di Jordan poligonale

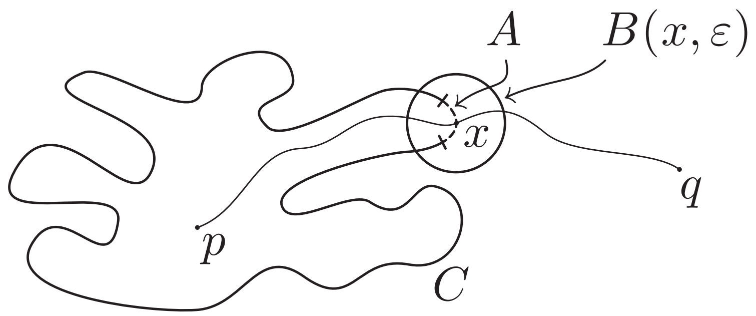


$\Rightarrow D \cong B^2$ (t. di Schönflies per le poligonali)

$\Rightarrow \widetilde{f}_{|D} \simeq$ cost. $\Rightarrow f \simeq$ cost. $\rightsquigarrow$ assurdo)

3) $I(C)$ è l'unica comp. limitata di $R^2 - C$
inoltre $p \in I(C) \Leftrightarrow i_p C = \pm 1$ ($\pm$ dipende dall'orient.)
($\forall\, p, q \in R^2 - C\ \exists\, C_\varepsilon$ polig. t.c. $C_\varepsilon \simeq C$ in $R^2 - \{p, q\}$
$\Rightarrow i_p C_\varepsilon = i_p C$ e $i_q C_\varepsilon = i_q C \Rightarrow i_p C = i_q C$ se $i_p C, i_q C \neq 0$)

4) $\mathrm{Fr}\, I(C) = \mathrm{Fr}\, E(C) = C$
($I(C), E(C)$ aperti $\Rightarrow \mathrm{Fr}\, I(C), \mathrm{Fr}\, E(C) \subset C$
$x \in C,\ \varepsilon > 0 \rightsquigarrow A \subset C \cap B(x, \varepsilon)$ t.c. $K = C - A \cong [0, 1]$
$\Rightarrow R^2 - K$ connesso ($\nu_{p|K} \simeq$ cost. $\forall\, p \in R^2 - K$)
$\Rightarrow \mathrm{Cl}\, I(C) \cap A, \mathrm{Cl}\, E(C) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in \mathrm{Fr}\, I(C), \mathrm{Fr}\, E(C)$)



5) $I(C)$ semplicemente connesso
($\omega \in \Omega(I(C), *) \rightsquigarrow H_\varepsilon(\omega([0, 1])) \subset I(C)$
$\mathrm{Fr}\, H_\varepsilon(\omega([0, 1])) = F_0 \sqcup F_1 \ldots \sqcup F_n$ con $F_i \subset I(F_0)\ \ \forall\, i$
$\Rightarrow \omega([0, 1]) \subset I(F_0) \subset I(C) \Rightarrow \omega \simeq_{\{0,1\}} *$ ($I(F_0) \cong R^2$))

<u>Teorema di invarianza del dominio</u>

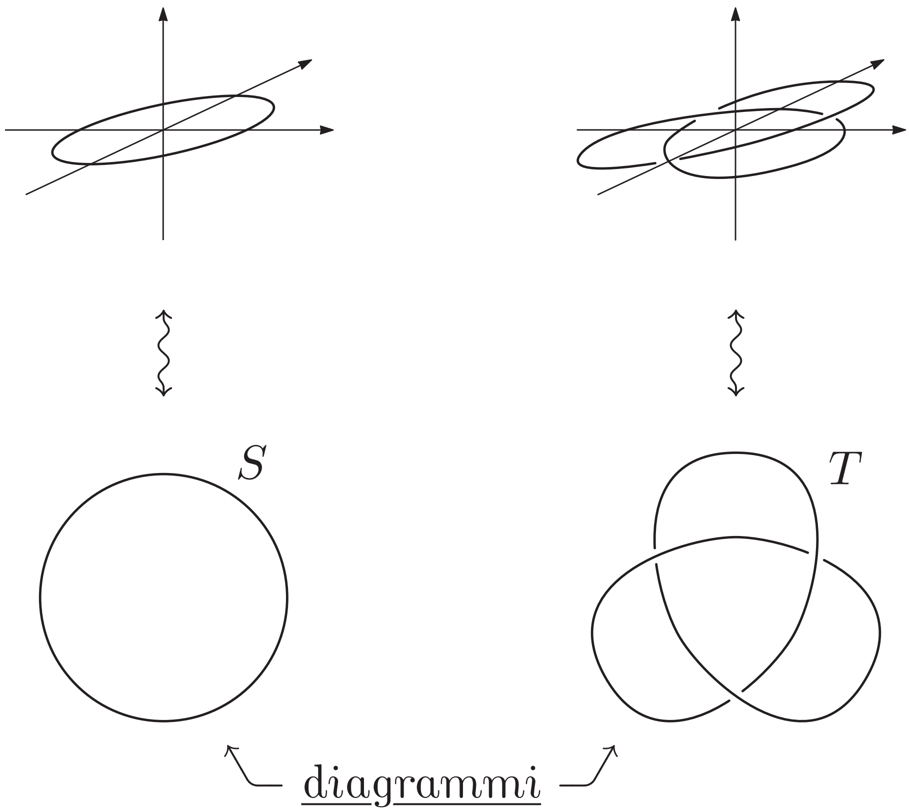
$f : A \to B$ cont. biiettiva con $A, B \subset R^m$, $m = 1, 2$ (vale $\forall\, m \geq 1$)
A aperto in $R^m \Rightarrow B$ aperto in R^m (in tal caso f omeo)
($A, B \subset R^m$ con $A \cong B \Rightarrow [A$ aperto in $R^m \Leftrightarrow B$ aperto in $R^m]$)

<u>Dim</u>. $m = 1$) f(intervallo aperto) $=$ intervallo aperto
$m = 2$) $x \in A$ aperto in $R^2 \rightsquigarrow \varepsilon > 0$ t.c. $\mathrm{Cl}\, B(x, \varepsilon) \subset A$
$\mathrm{Cl}\, B(x, \varepsilon)$ compatto $\Rightarrow f_{|\,\mathrm{Cl}\, B(x, \varepsilon)}$ immersione
$\Rightarrow C = f(\mathrm{Fr}\, B(x, \varepsilon))$ curva di Jordan
$R^2 - C = f(B(x, \varepsilon)) \sqcup (R^2 - f(\mathrm{Cl}\, B(x, \varepsilon)))$
con $f(B(x, \varepsilon))$ e $R^2 - f(\mathrm{Cl}\, B(x, \varepsilon))$ connessi
$\Rightarrow f(B(x, \varepsilon)) = I(C)$ int. ap. di $f(x)$ in R^2

Nodi nello spazio

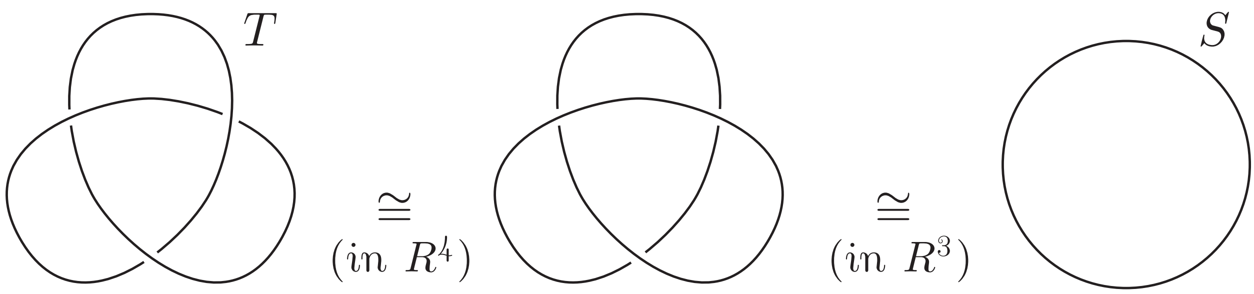
$C \subset R^3$ <u>nodo</u> $\overset{\text{def}}{\iff} C \cong S^1$
($\Leftrightarrow \exists\, h : S^1 \to R^3$ immersione tale che $h(S^1) = C$)

<u>Esempi</u>: 1) nodo banale ($S^1 \subset R^2 \subset R^3$) 2) nodo trifoglio (nodo "piano" chiuso)



$C, C' \subset R^3$ nodi <u>equivalenti</u> ($C \cong C'$)
$\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, h : R^3 \to R^3$ omeo t.c. $h(C) = C'$

<u>Nota</u>: In R^3 esistono nodi non banali (per esempio T), mentre ogni "nodo" in R^m con $m \neq 3$ è banale, cioè equivalente a $S^1 \subset R^m$ (per $m = 2$, ciò segue dal teorema di Schönflies)



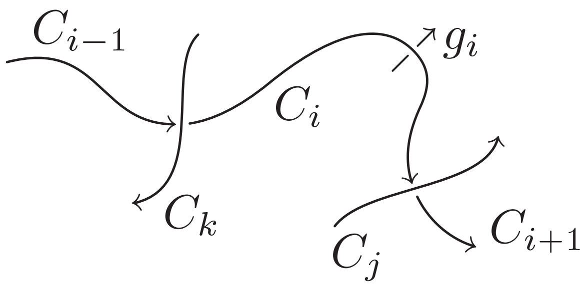
$C \subset R^3$ nodo $\rightsquigarrow \mathrm{Gr}(C) \overset{\text{def}}{=\!=} \pi_1(R^3 - C)$

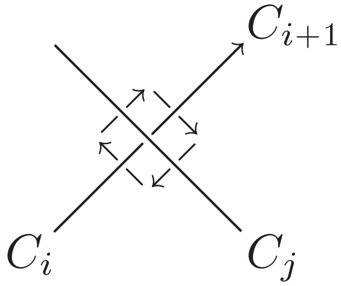
<u>gruppo del nodo</u> C

<u>Nota</u>: $C, C' \subset R^3$ nodi, $C \cong C' \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \mathrm{Gr}(C) \cong \mathrm{Gr}(C')$

<u>Prop</u>. $C \subset R^3$ nodo, $\mathcal{D}$ diagramma orientato di C

$\Rightarrow \mathrm{Gr}(C) \cong \langle g_1, \dots, g_n \,|\, r_1, \dots, r_n \rangle$ (<u>presentaz. di Wirtinger</u>)
con un generatore g_i per ogni “componente” C_i di $\mathcal{D}$
e una relazione $r_i = g_i g_j^{\pm 1} g_{i+1}^{-1} g_j^{\mp 1}$ per ogni “incrocio”





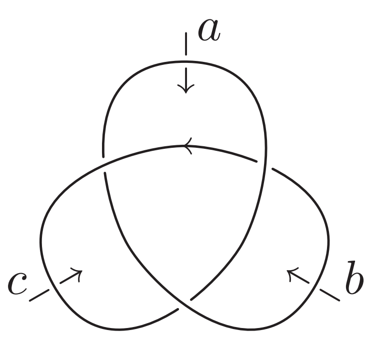
<u>Dim</u>. applicazione del teorema di Seifert-Van Kampen

<u>Esempi</u>: 1) $\mathrm{Gr}(S) \cong \mathbb{Z}$

2) $\mathrm{Gr}(T) \cong \langle a, b, c \,|\, acb^{-1}c^{-1}, bac^{-1}a^{-1}, cba^{-1}b^{-1} \rangle$

$\cong \langle a, b \,|\, abab^{-1}a^{-1}b^{-1}, baba^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle$

$\cong \langle a, b \,|\, abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$



<u>Note</u>: 1) $\mathrm{Gr}(T)$ non abeliano $\Rightarrow T$ non banale
($\exists\, \varphi : \mathrm{Gr}(T) \to S_3$ omom. t.c. $\varphi(a) = (1\,2)$ e $\varphi(b) = (2\,3)$)

2) $\mathrm{Ab}(\mathrm{Gr}(C)) = H_1(R^3 - C) \cong \mathbb{Z}$ per ogni nodo $C \subset R^3$
(abelianizzando: $r_i \rightsquigarrow g_i g_{i+1}^{-1}$ (cioè $g_i \sim g_{i+1}$) per ogni i)
In questo caso tutte le informazioni contenute in
$\pi_1(R^3 - C)$ si perdono passando ad $H_1(R^3 - C)$