Omotopia

X, Y spazi topologici
omotopia di X in Y $\overset{\text{def}}{=\!=}$ $H : X \times [0,1] \to Y$ continua

Note: 1) H omotopia $\leftrightsquigarrow (h_t : X \to Y)_{t\in[0,1]}$ famiglia "continua" di appl. cont. definite $h_t(x) = H(x,t)$

2) X compatto, Y metrizzabile con metrica d
$\rightsquigarrow C(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ continua}\}$ spazio top. metriz. con metrica $d(f,f') = \max_{x\in X} d(f(x), f'(x))$
$\Rightarrow H$ omotopia di X in $Y \leftrightsquigarrow \alpha$ arco in $C(X,Y)$
($\alpha : [0,1] \to C(X,Y)$ definito $\alpha(t) = h_t \ \forall\, t \in [0,1]$)

$f, f' : X \to Y$ applicazioni (continue) omotope ($f \simeq f'$)
$\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, H : X \times [0,1] \to Y$ omotopia tale che $h_0 = f$ e $h_1 = f'$
omotopia tra f e f' ($H : f \simeq f'$)

Note: 1) $\simeq$ è una relazione d'equivalenza su $C(X,Y) \rightsquigarrow [f]$
($H : f \simeq f' \rightsquigarrow \overline{H} : f' \simeq f$ definita $\overline{H}(x,t) = H(x, 1-t)$
$H : f \simeq f'$, $K : f' \simeq f'' \rightsquigarrow L : f \simeq f''$
definita $L(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) \text{ se } 0 \le t \le 1/2 \\ K(x, 2t-1) \text{ se } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$)

2) $f \simeq f' : X \to Y$, $g \simeq g' : Y \to Z \Rightarrow g\circ f \simeq g'\circ f' : X \to Z$
($H : f \simeq f'$, $K : g \simeq g' \rightsquigarrow L : g\circ f \simeq g'\circ f'$
definita $L(x,t) = K(H(x,t),t)$)

Esempio: $f : X \to R^m$ continua $\Rightarrow f \simeq 0$ ($H(x,t) = t\, f(x)$)

$f : X \to Y$ equivalenza omotopica
$\overset{\text{def}}{\iff} f$ continua, $\exists\, g : Y \to X$ continua t.c. $g\circ f \simeq \mathrm{id}_X$ e $f\circ g \simeq \mathrm{id}_Y$

$X \simeq Y \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, f : X \to Y$ equivalenza omotopica
spazi con lo stesso tipo d'omotopia (omotop. equivalenti)

Note: 1) $f : X \to Y$ omeo $\Rightarrow$ equiv. omot. ($X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$)

2) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ eq. omot. $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ eq. omot.

3) $\simeq$ è una "relazione d'equivalenza" tra spazi topologici

X spazio topologico contraibile $\overset{\text{def}}{\iff} X \simeq * \iff \mathrm{id}_X \simeq$ costante

Note: 1) X spazio top. contraibile $\Rightarrow$ connesso per archi

2) X spazio top. contraibile $\Leftrightarrow f \simeq$ cost. $\forall\, f : S \to X$ cont. $\forall\, S$
$f \simeq$ cost. $\forall\, f : X \to Y$ cont. $\forall\, Y$

Esempi: 1) R^m è contraibile $(h_t(x) = t\,x \rightsquigarrow H : 0 \simeq \mathrm{id}_{R^m})$

2) $C \subset R^m$ convesso $\Rightarrow$ contraibile $(0 \in C \rightsquigarrow H : 0 \simeq \mathrm{id}_C)$

3) C contraibile $\Rightarrow X \times C \simeq X$ per ogni spazio top. X

Omotopia relativa

$H : X \times [0,1] \to Y$ omotopia di X in Y
omotopia relativa a $S \subset X \overset{\text{def}}{\iff} h_{t|S} = h_{0|S}\ \forall\, t \in [0,1]$

$f, f' : X \to Y$ applicazioni continue omotope mod S $(f \simeq_S f')$
$\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, H$ omotopia tra f e f' relativa a S $(H : f \simeq_S f')$

Note: 1) $f \simeq_S f' \Rightarrow f_{|S} = f'_{|S}$ (ma $f \simeq f'$ e $f_{|S} = f'_{|S} \not\Rightarrow f \simeq_S f'$)

2) $\simeq_S$ è una relazione d'equivalenza su $C(X,Y) \rightsquigarrow [f]_S$

3) $f \simeq_S f' : X \to Y$, $g \simeq_T g' : Y \to Z$ con $f(S) \subset T$
$\Rightarrow g \circ f \simeq_S g' \circ f' : X \to Z$

X spazio topologico, $Y \subset X$ sottospazio
$X \searrow Y \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, H : \mathrm{id}_X \simeq_Y r : X \to X$ tale che $r(X) = Y$
deformazione di X su Y

Note: 1) $X \searrow Y$, $Y \searrow Z \Rightarrow X \searrow Z$

2) $X \searrow Y \Rightarrow X \simeq Y$, ma $X \simeq Y \subset X \not\Rightarrow X \searrow Y$

3) $X \simeq Y \Leftrightarrow \exists\, Z$ tale che $X \swarrow Z \searrow Y$

Esempi: 1) $C \subset R^m$ convesso $\Rightarrow C \searrow *$ (in particolare $R^m \searrow 0$)

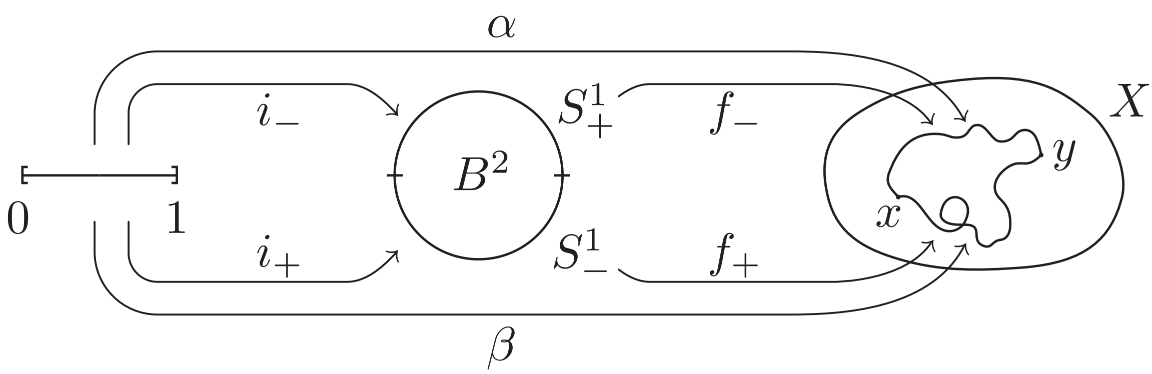
2) $C \searrow * \Rightarrow X \times C \searrow X \times * \cong X$ $(\rightsquigarrow R^m - \{0\} \searrow S^{m-1})$

X spazio topologico <u>semplicemente connesso</u> (per archi)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, x, y \in X \; \exists\, \alpha : [0,1] \to X$ continua t.c. $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$
unica a meno di omotopia mod $\{0,1\}$

<u>Esempi</u>: 1) R^m è semplicemente connesso $\forall\, m \geq 1$
2) $R^m - \{0\}$ è semplicemente connesso $\forall\, m \geq 3$
(α arco in $R^m - \{0\} \simeq_{\{0,1\}}$ arco poligonale
$\simeq_{\{0,1\}}$ arco poligonale con due lati)
3) S^m è semplicemente connesso $\forall\, m \geq 2$

<u>Prop</u>. X spazio top. contraibile $\Rightarrow$ semplicemente connesso

<u>Dim</u>. $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ cont. t.c. $\alpha(0) = \beta(0) = x$ e $\alpha(1) = \beta(1) = y$
$\rightsquigarrow f_\pm : S^1_\pm \to X$ continue t.c. $f_+ \circ i_+ = \alpha$ e $f_- \circ i_- = \beta$
$\rightsquigarrow f = f_+ \cup f_- : S^1 \to X$ continua



X contraibile $\rightsquigarrow H : \text{cost.} \simeq f$
$\rightsquigarrow H/\!\sim\; \cong g : B^2 \to X$ cont. t.c. $g_{|S^1} = f$
$K/\!\sim$ con K definita da $K(s,t) = t\, s$

$$\begin{tikzcd} S^1 \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi"] & X \\ S^1 \times [0,1]/S^1 \times \{0\} \arrow[ur, "H/\sim"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^1 \times [0,1] \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\pi"] & B^2 \\ S^1 \times [0,1]/S^1 \times \{0\} \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

$i_+ \simeq_{\{0,1\}} i_+ : [0,1] \to B^2 \Rightarrow \alpha = g \circ i_- \simeq_{\{0,1\}} g \circ i_- = \beta$

Rivestimenti

$p : X \to Y$ applicazione continua tra spazi topologici

rivestimento $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\, y \in Y\ \exists\, B \subset Y$ intorno aperto di y

t.c. 1) $p^{-1}(B) = A = \sqcup_{i\in I} A_i \neq \varnothing$

2) $p_{|A_i} : A_i \to B$ omeomorfismo $\forall\, i \in I$

Note: 1) $p : X \to Y$ rivestimento $\not\Longleftarrow\!\Rightarrow$ omeomorfismo locale

2) $p : X \to Y$, $q : Y \to Z$ rivest. $\not\Rightarrow q \circ p : X \to Z$ rivest.

($\Rightarrow$ vale se q rivest. finito, cioè $q^{-1}(z)$ finito $\forall\, z \in Z$)

Esempi: 1) $\pi : X = Y \times D \to Y$ con D spazio top. discreto

2) $\pi : R \to S^1 \cong R/\mathbb{Z}$ (definita $\pi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$)

$\pi : R^m \to R^m/\mathbb{Z}^m \cong T^m$, $\pi : S^m \to S^m/\mathbb{Z}_2 \cong P^m$

Prop. X G-spazio con azione φ propriamente discontinua

($\forall\, x \in X\ \exists\, I \in \mathcal{I}_x$ t.c. $\varphi_g(I) \cap I = \varnothing\ \ \forall\, g \in G - \{e\}$)

$\Rightarrow \pi : X \to X/G$ rivestimento regolare

Dim. $A \subset X$ intorno aperto di x t.c. $\varphi_g(A) \cap A = \varnothing\ \ \forall\, g \in G - \{e\}$

$\rightsquigarrow B = \pi(A)$ int. aperto di $y = \pi(x)$ t.c. $\pi^{-1}(B) = \sqcup_g \varphi_g(A)$

Note: 1) φ azione prop. disc. $\not\Longleftarrow\!\Rightarrow$ azione effettiva e libera

($\varphi : G \xrightarrow{\cong} \varphi(G) < \operatorname{Omeo} X$ e φ_g senza punti fissi $\forall\, g \neq e$)

2) $\Leftarrow$ vale se X sp. top. T_2 e G gruppo finito

Prop. $p : X \to Y$ rivestimento

$\Rightarrow \forall\, \alpha : [0,1] \to Y$ cont. $\forall\, x_0 \in X$ t.c. $p(x_0) = y_0 = \alpha(0)$

$\exists!\ \widetilde{\alpha} : [0,1] \to X$ cont. t.c. $\widetilde{\alpha}(0) = x_0$ e $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$

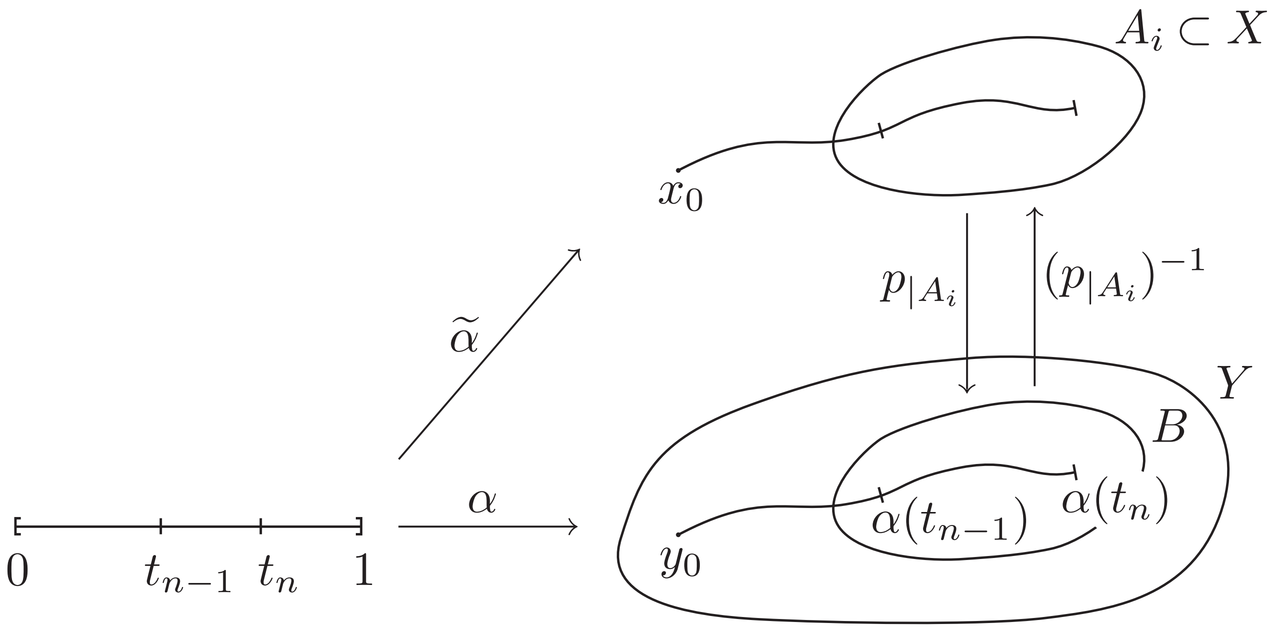
(proprietà di sollevamento unico dei cammini)

Dim. $\mathcal{B} = \{B \subset Y \mid B$ soddisfa le prop. 1 e 2$\}$ ric. ap. di Y

$\rightsquigarrow 0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ t.c. $\alpha([t_{n-1}, t_n]) \subset B \in \mathcal{B}$

$\exists!$ soll. cont. di $\alpha_{|[0,t_n-1]} \Rightarrow \exists!$ soll. cont. di $\alpha_{|[0,t_n]}$

($\widetilde{\alpha}(t_{n-1}) \in A_i \rightsquigarrow \widetilde{\alpha}_{|[t_{n-1},t_n]} = (p_{|A_i})^{-1} \circ \alpha_{|[t_{n-1},t_n]}$)



<u>Prop</u>. $p : X \to Y$ rivestimento, S spazio topologico

$\Rightarrow \forall\, H : S \times [0,1] \to Y$ cont. $\forall\, f : S \to X$ cont. t.c. $p \circ f = h_0$

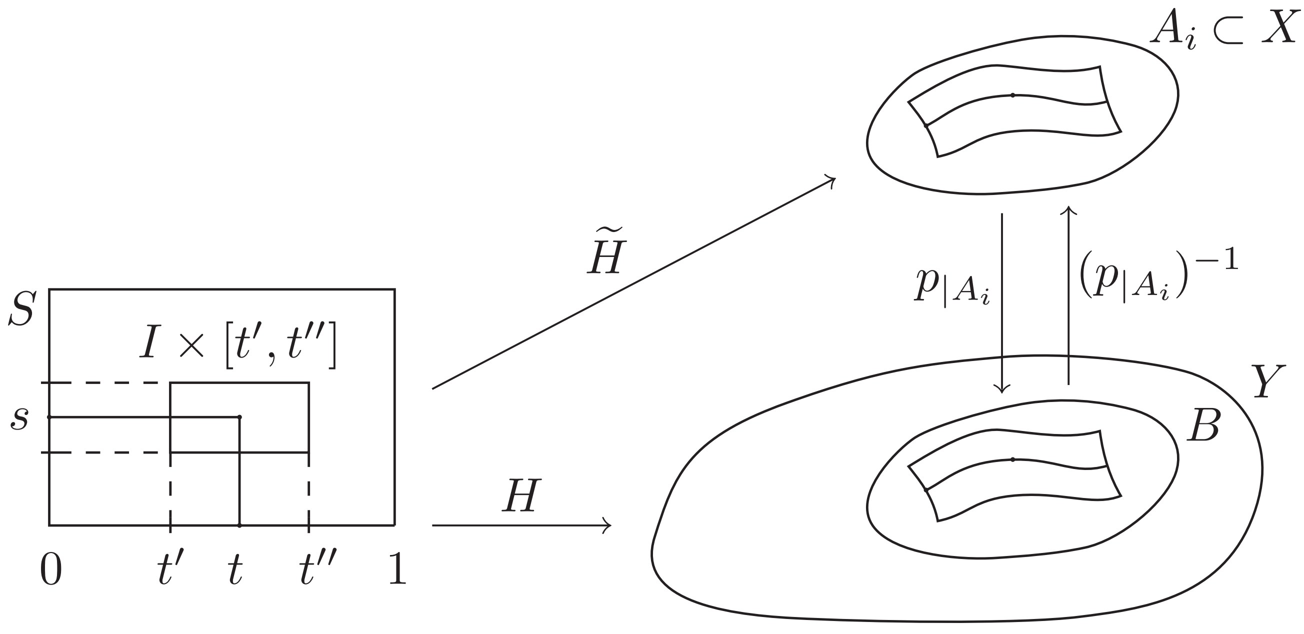
$\exists!\, \widetilde{H} : S \times [0,1] \to X$ cont. t.c. $\widetilde{h}_0 = f$ e $p \circ \widetilde{H} = H$

(<u>proprietà di sollevamento unico delle omotopie</u>)

<u>Dim</u>. $s \in S \rightsquigarrow \alpha_s : [0,1] \to Y$ cammino definito $\alpha_s(t) = H(s,t)$

$\rightsquigarrow \widetilde{\alpha}_s : [0,1] \to X$ t.c. $\widetilde{\alpha}_s(0) = f(s)$ e $p \circ \widetilde{\alpha}_s = \alpha_s$

$\rightsquigarrow \widetilde{H}(s,t) = \widetilde{\alpha}_s(t)$



$\widetilde{H}$ continua in $\{s\} \times [0,t[\;\Rightarrow \widetilde{H}$ continua in $\{s\} \times [0, t+\varepsilon[$

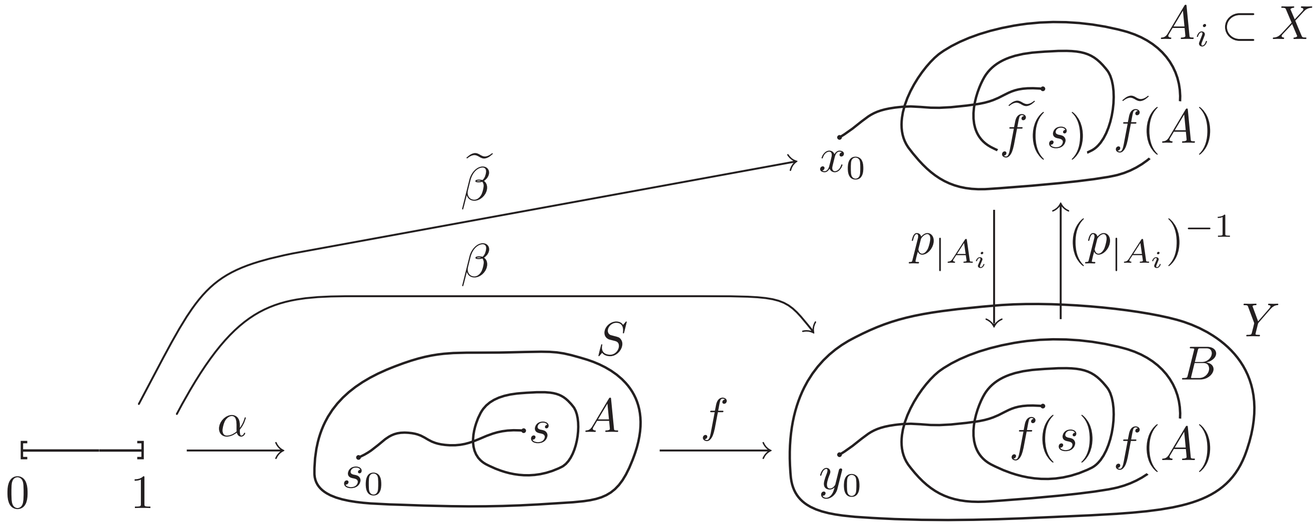
$(H(s,t) \in B \rightsquigarrow H(\{s\} \times [t', t'']) \subset B \rightsquigarrow \widetilde{H}(s,t') \in A_i$

$\rightsquigarrow \widetilde{H}(I \times \{t'\}) \subset A_i \Rightarrow \widetilde{H}_{|I \times [t',t'']} = (p_{|A_i})^{-1} \circ H_{|I \times [t',t'']})$

Note: 1) α costante $\Rightarrow \widetilde{\alpha}$ costante (per l'unicità)
2) H omot. relativa a $S' \subset S \Rightarrow \widetilde{H}$ omot. relativa a S'

Prop. $p : X \to Y$ rivestimento
S spazio top. loc. conn. p.a. e sempl. connesso, $s_0 \in S$
$\Rightarrow \forall\, f : S \to Y$ continua $\forall\, x_0 \in X$ t.c. $f(s_0) = y_0 = p(x_0)$
$\exists!\, \widetilde{f} : S \to X$ continua t.c. $\widetilde{f}(s_0) = x_0$ e $p \circ \widetilde{f} = f$

Dim.



S conn. p.a. $\Rightarrow s \in S \rightsquigarrow \alpha \rightsquigarrow \beta = f \circ \alpha \rightsquigarrow \widetilde{\beta} \rightsquigarrow \widetilde{f}(s) = \widetilde{\beta}(1)$
S sempl. conn. $\Rightarrow \widetilde{f}$ ben definita ($\widetilde{f}(s)$ non dipende da α)
S loc. conn. p.a. $\Rightarrow \widetilde{f}$ continua
($A \subset f^{-1}(B) \subset S$ int. conn. p.a. di $s \Rightarrow \widetilde{f}_{|A} = (p_{|A_i})^{-1} \circ f_{|A}$)

rivestimento universale di X spazio top. connesso per archi
$\stackrel{\text{def}}{=}$ $p : \widetilde{X} \to X$ rivestimento con $\widetilde{X}$ semplicemente connesso

Note: 1) X loc. conn. p.a. $\Rightarrow p : \widetilde{X} \to X$ unico a meno di $\cong$ (se $\exists$)
2) X conn. p.a. e loc. sempl. conn. $\Rightarrow \exists\,!\, p : \widetilde{X} \to X$ riv. univ.

Esempi: $\widetilde{S}^1 \cong R \xrightarrow{\pi} S^1$, $\widetilde{T}^m \cong R^m \xrightarrow{\pi} T^m$, $\widetilde{P}^m \cong S^m \xrightarrow{\pi} P^{m \geq 2}$

Prop. X spazio top. loc. conn. p.a. $\Rightarrow p : \widetilde{X} \to X$ rivest. regolare
($p \cong \pi : \widetilde{X} \to X \cong \widetilde{X}/G_p$ con $G_p = \{g \in \operatorname{Omeo} \widetilde{X} \mid p \circ g = p\}$)

Dim. $p(\widetilde{x}_0) = p(\widetilde{x}_1) \Leftrightarrow \exists!\, g = \widetilde{p} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ cont. t.c. $g(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$
unicità $\Rightarrow [\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \rightsquigarrow g \Rightarrow \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_0 \rightsquigarrow g^{-1}] \Rightarrow g$ omeo $\Rightarrow g \in G_p$