Curve regolari nel piano

$C \subset R^2$ curva (differenziabile) regolare

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall\, p \in C\ \exists\, \gamma : I \to R^2$ con $I \subset R$ intervallo aperto

e $\gamma(I)$ intorno aperto di p in C

parametrizzazione locale regolare

t.c. 1) γ immersione topologica ($\Rightarrow \gamma(I) \cong I$)

2) $\exists\, \gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \ldots\ \forall\, t \in I$ (γ differenziabile)

3) $\gamma'(t) \neq 0\ \forall\, t \in I$ (γ regolare)

Note: 1) $V(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0 \longleftarrow$ vettore velocità

$v(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \longleftarrow$ velocità (scalare) funz. diff. di t

2) $C \subset R^2$ curva regolare $\Leftrightarrow C$ curva topologica “liscia”

$\exists$ retta tangente a C in p, $\forall\, p = (\bar{x}, \bar{y}) = \gamma(\bar{t}) \in C$

3) $\gamma(t) = \gamma(\bar{t}) + \gamma'(\bar{t})(t - \bar{t}) + \varepsilon(t - \bar{t})$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = \bar{x} + x'(\bar{t})(t - \bar{t}) \\ y = \bar{y} + y'(\bar{t})(t - \bar{t}) \end{cases}$$ (equazione parametrica retta tangente a C in p)

Esempi: 1) $f : I \to R^2$ immersione topologica diff. regolare

$\Rightarrow C = f(I)$ curva regolare (omeomorfa a R)

2) $f : R \to R^2$ diff. regolare e periodica ($f(t) = f(t + c)$)

$\Rightarrow C = f(R)$ curva regolare (omeomorfa a S^1)

Prop. $C \subset R^2$ curva regolare, $p \in C$

$\rightsquigarrow \alpha : I \to R^2$ parametrizzazione naturale intorno a p

tale che $\|\alpha'(s)\| = 1\ \forall\, s \in I$ (velocità unitaria)

Dim. γ parametrizzazione locale regolare t.c. $p = \gamma(\bar{t})$

$\rightsquigarrow s(t) = \int_{\bar{t}}^{t} \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \text{Lung}(\text{arco di } C \text{ da } p \text{ a } \gamma(t))$

$\rightsquigarrow t(s)$ diff. regolare ($s'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0 \Rightarrow s(t)$ invertibile)

$\rightsquigarrow \alpha(s) = \gamma(t(s))$ diff. t.c. $\alpha'(s) = \gamma'(t)\, t'(s) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$

Note: 1) $s =$ parametro naturale (o ascissa curvilinea)

univoc. determ. a meno di traslazioni e/o inversioni

(tutte le altre ascisse curvilinee sono del tipo $\pm s + c$,

dove $\pm$ dipende solo dall’orientazione indotta lungo C)

2) $\text{Lung}(\overrightarrow{\widehat{p_1 p_2}}) = s_2 - s_1$ (lunghezza orientata)
$\text{Lung}(\widehat{p_1 p_2}) = |s_2 - s_1| = \lim \text{Lung}(\text{polig. inscritte})$

3) $C \subset R^2$ curva regolare connessa $\Rightarrow C \cong R$ o $C \cong S^1$
$\Rightarrow C$ ammette param. regolare globale come negli esempi
(che si può ottenere incollando param. naturali locali)

Prop. $C \subset R^2$ curva regolare
$\Leftrightarrow \forall p \in C\ \exists A \subset R^2$ intorno aperto di p tale che
$C \cap A = \{(x,y) \in A \,|\, E(x,y) = 0\}$ con $E : A \to R$
t.c. 1) E ha tutte le deriv. parz. cont. (E differenziabile)
2) $\nabla E = (\partial E/\partial x, \partial E/\partial y) \neq 0$ (E regolare)
($E(x,y) = 0$ equazione cartesiana locale regolare)

Dim. $\Rightarrow$) $\gamma : I \to R^2$ parametriz. locale regolare di C t.c. $p = \gamma(\bar{t})$
$x'(\bar{t}) \neq 0$ ($y'(\bar{t}) \neq 0$ è analogo)
$\rightsquigarrow t(x)$ funzione differenziabile inversa locale
$\rightsquigarrow y - y(t(x)) = 0$ equazione cartesiana locale regolare

$\Leftarrow$) $\partial E/\partial y \neq 0$ in p ($\partial E/\partial x \neq 0$ è analogo)
$\rightsquigarrow \varphi : I \to R$ differenziabile tale che
$\{(x, \varphi(x)) \,|\, x \in I\}$ intorno aperto di p in C
$\rightsquigarrow \gamma(t) = (t, \varphi(t))$ parametrizzazione locale regolare

Note: 1) $\gamma : I \to R^2$ parametrizzazione locale regolare
$\Rightarrow (E \circ \gamma)(t) = E(\gamma(t)) = E(x(t), y(t)) = 0$
$\Rightarrow (E \circ \gamma)'(t) = \partial E/\partial x \cdot x'(t) + \partial E/\partial y \cdot y'(t) = 0$
$\Rightarrow \nabla E(\gamma(t))$ vettore normale a C in $p = \gamma(t)$

2) $p = (\bar{x}, \bar{y}) \rightsquigarrow \nabla E(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (x - \bar{x}, y - \bar{y}) = 0$
(equaz. cart. retta tangente a C in p)

3) $C \subset R^2$ curva regolare $\Leftrightarrow C$ è loc. grafico di funz. diff.

Riferimenti di Frenet e curvatura

$C \subset R^2$ curva regolare orientata (con un verso di percorrenza)
$\alpha : I \to C$ parametrizzazione naturale (con l'orientazione data)
$p = \alpha(s) \rightsquigarrow T(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha'(s) \longleftarrow$ versore tangente

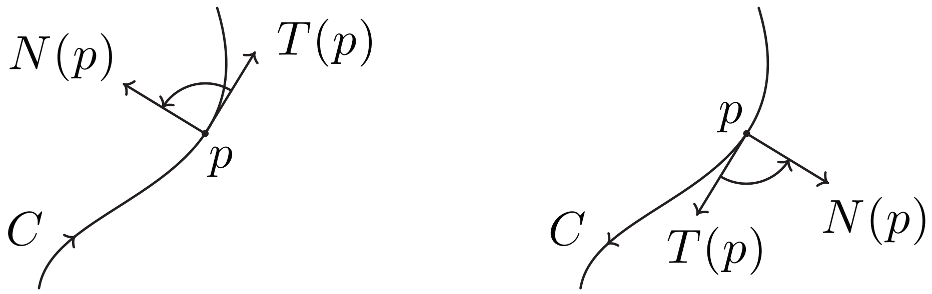
$\rightsquigarrow N(p) \overset{\text{def}}{=}$ vers. t.c. $(T(p), N(p))$ base ortonorm. <u>positiva</u>

$\quad$ <u>versore normale</u>

$\rightsquigarrow (T(p), N(p))$ <u>riferimento di Frenet</u> di C in p

<u>Note</u>: 1) $T(p)\,, N(p)$ ben definiti (non dipendono da α)

2) orientazione opposta su $C \rightsquigarrow$ versori opposti



3) $T(s) = (x'(s), y'(s))$ e $N(s) = (-y'(s), x'(s))$
sono funzioni (vettoriali) differenziabili di s

4) $T(s) \cdot T(s) = \|T(s)\|^2 = 1 \ \forall\, s \in I \Rightarrow T'(s) \cdot T(s) = 0$
$N(s) \cdot N(s) = \|N(s)\|^2 = 1 \ \forall\, s \in I \Rightarrow N'(s) \cdot N(s) = 0$
$T(s) \cdot N(s) = 0 \ \forall\, s \in I \Rightarrow N'(s) \cdot T(s) = -\,T'(s) \cdot N(s)$

$K(p) \overset{\text{def}}{=} T'(s) = \kappa(s)\, N(s) \longleftarrow$ <u>vettore curvatura</u> di C in p
$\kappa(p) \overset{\text{def}}{=} T'(s) \cdot N(s) \in \mathbb{R} \longleftarrow$ <u>curvatura</u> di C in p

<u>Note</u>: 1) $K(p)$ è indipendente dall'orientazione di C

2) $\kappa(p)$ dipende dall'orientazione solo per il segno
(orientazione opposta $\rightsquigarrow$ curvatura opposta)

3) $K(s) = \alpha''(s)$ e $\kappa(s) = \pm\|\alpha''(s)\|$ sono funz. diff. di s

4) $\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)\, N(s) \\ N'(s) = -\,\kappa(s)\, T(s) \end{cases}$ <u>formule di Frenet</u>

<u>Prop</u>. $C_1, C_2 \subset R^2$ curve regolari orientate, $h \in \operatorname{Isom} R^2$ tale che
$C_2 = h(C_1)$ come curve orientate $(T_{C_2}(h(p)) = h_*(T_{C_1}(p)))$
$\Rightarrow K_{C_2}(h(p)) = h_*(K_{C_1}(p))$ e $\kappa_{C_2}(h(p)) = \pm\,\kappa_{C_1}(p) \ \forall\, p \in C_1$
($\pm$ a seconda che h conserva/inverte l'orientaz. di R^2)

<u>Dim</u>. $\alpha : I \to C_1$ param. naturale $\rightsquigarrow h \circ \alpha : I \to C_2$ param. naturale
$T_{C_2}(s) = h_*(T_{C_1}(s)) \Rightarrow T'_{C_2}(s) = h_*(T'_{C_1}(s))$ (linearità di h_*)
$N_{C_2}(s) = \pm\, h_*(N_{C_1}(s))$ se h cons./inverte l'orient. di R^2

<u>Esempi</u>: 1) C = retta $\Rightarrow \kappa(p) = 0 \ \forall\, p \in C$

$\alpha(s) = (\bar{x} + v_x s, \bar{y} + v_y s)$ con $v = (v_x, v_y)$ versore

$\alpha'(s) = (v_x, v_y) = v\,,\ \|v(s)\| = 1$ (param. naturale)

$\alpha''(s) = (0,0) = 0\,,\ \|\alpha''(s)\| = 0\,,\ \kappa(s) = 0$

2) C = circonf. di raggio $r \Rightarrow \kappa(p) = \pm\,1/r \ \forall\, p \in C$

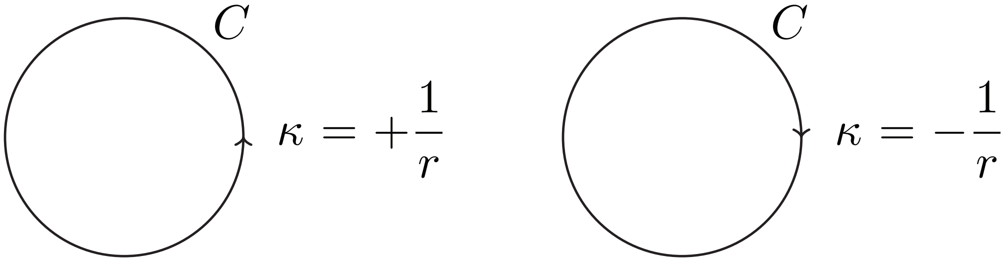
$\gamma(t) = (\bar{x} + r\cos t, \bar{y} + r\sin t)$ param. regolare

$\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t) \rightsquigarrow \|\gamma'(t)\| = r \rightsquigarrow s(t) = rt$

$$\alpha(s) = \gamma(t(s)) = \gamma\Big(\frac{s}{r}\Big) = \Big(\bar{x} + r\cos\frac{s}{r}, \bar{y} + r\sin\frac{s}{r}\Big)$$

$$\alpha'(s) = \Big(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\Big)\,,\ \|\alpha'(s)\| = 1 \ \text{(param. naturale)}$$

$$\alpha''(s) = \Big(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\Big)\,,\ \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{r}\,,\ \kappa(s) = \pm\frac{1}{r}$$



$C \subset R^2$ curva regolare orientata

$\gamma : I \to C$ parametrizzazione regolare

$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \rightsquigarrow \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))\,,\ \gamma''(t) = (x''(t), y''(t))$

$\rightsquigarrow v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} > 0$ (<u>velocità</u>)

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{v(t)} = \Big(\frac{x'(t)}{v(t)}, \frac{y'(t)}{v(t)}\Big)\,,\ N(t) = \Big(-\frac{y'(t)}{v(t)}, \frac{x'(t)}{v(t)}\Big)$$

$$\rightsquigarrow K(t) = \frac{dT(t)}{ds} = \frac{T'(t)}{v(t)} = \frac{\gamma''(t) - v'(t)\,T(t)}{v(t)^2}$$

$$\kappa(t) = K(t)\cdot N(t) = \frac{\gamma''(t)\cdot N(t)}{v(t)^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{v(t)^3}$$

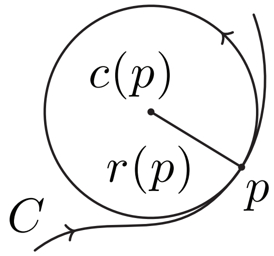
<u>Forma canonica</u>

$C \subset R^2$ curva regolare, $p \in C$ tale che $\kappa(p) \neq 0$

$\alpha : I \to C$ parametrizzazione naturale tale che $p = \alpha(s)$

$r(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \dfrac{1}{|\kappa(p)|} = \dfrac{1}{\|\alpha''(s)\|} \longleftarrow$ <u>raggio di curvatura</u> di C in p

$c(p) \overset{\text{def}}{=\!=} p + \dfrac{N(p)}{\kappa(p)} = \alpha(s) + \dfrac{\alpha''(s)}{\kappa(s)^2} \longleftarrow$ <u>centro di curvatura</u>



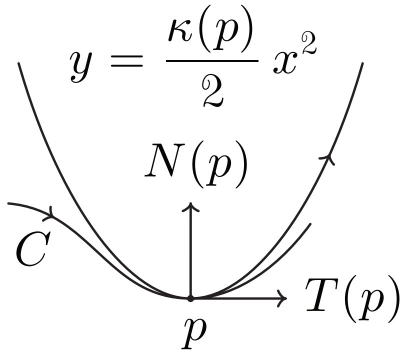
<u>cerchio osculatore</u> di C in p
$\overset{\text{def}}{=\!=}$ circonf. con centro in $c(p)$ e raggio $r(p)$
tangente a C in p con curvatura $= \kappa(p)$
(approssima C int. a p con ordine > 2)

$\alpha : I \to C$ parametrizzazione naturale tale che $p = \alpha(0)$

$$\rightsquigarrow \alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)\, s + \frac{\alpha''(0)}{2}\, s^2 + \varepsilon(s) \text{ con } o(\varepsilon(s)) > 2$$
$$= p + s\, T(p) + \frac{\kappa(p) s^2}{2} N(p) + \varepsilon(s)$$

(x, y) coord. cartesiane t.c. $p = 0\,, T(p) = e_x\,, N(p) = e_y$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x(s) = s + \varepsilon_x(s) \\ y(s) = \dfrac{\kappa(p)}{2}\, s^2 + \varepsilon_y(s) \end{cases}$$ <u>forma canonica</u> di C in p



<u>parabola osculatrice</u> di C in p
$\overset{\text{def}}{=\!=}$ parabola tangente a C in $p =$ vertice
con curvatura $\kappa(p)$ nel vertice
(appros. C int. a p con ordine > 2)

<u>Isometrie tra curve</u>

$i : C_1 \to C_2$ omeomorfismo tra curve regolari $C_1, C_2 \subset R^2$
<u>isometria (intrinseca)</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ i biunivoca e conserva lung. degli archi
$(\mathrm{Lung}(i(C)) = \mathrm{Lung}(C)\ \forall\, C \subset C_1)$

<u>Note</u>: 1) i isometria $\Rightarrow i^{-1}$ isometria ($\rightsquigarrow$ equivalenza isometrica)
2) i isometria $\Rightarrow i$ diff. regolare (i^{-1} differenziabile)
(γ param. locale regolare $\Rightarrow i \circ \gamma$ param. locale regolare)

<u>Prop</u>. $C \subset R^2$ curva regolare connessa, $\ell = \mathrm{Lung}(C) \leq \infty$

$\ell < \infty \Rightarrow C$ isometricamente equivalente a $S^1_{\ell/2\pi}$ o $]0, \ell[$

$\ell = \infty \Rightarrow C$ isometricamente equivalente $]0, \infty[$ o R

(se ha lungh. ∞ in uno solo o entrambi i versi)

<u>Dim</u>. $\alpha : I \to C$ parametrizazione naturale globale

$\rightsquigarrow i = \alpha/\!\sim_\alpha : S^1_{\ell/2\pi} \to C$ isometria se α è periodica

$i : I \to C$ isometria con $I = \,]0, \ell[\ , \ ]0, \infty[\ , R$ altrimenti

<u>Lemma</u>. $\forall\, \kappa : I \to R$ funzione diff. con $0 \in I \subset R$ int. aperto

$\exists!\, \alpha : I \to R^2$ parametrizzazione naturale (loc. iniettiva)

t.c. $\alpha(0) = 0\,, T(0) = e_x$ e $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)\ \forall\, s \in I$

<u>Dim</u>. $\vartheta(s) = \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} T(s) = (\cos\vartheta(s), \sin\vartheta(s)) \\ N(s) = (-\sin\vartheta(s), \cos\vartheta(s)) \end{cases} \text{unica soluzione}$$

$$\text{del probl. di Cauchy: } \begin{cases} T'(s) = \kappa(s)\, N(s),\ T(0) = e_x \\ N'(s) = -\kappa(s)\, T(s),\ N(0) = e_y \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \alpha(s) = \int_0^s T(\sigma) d\sigma$ unica soluzione

del problema di Cauchy: $\alpha'(s) = T(s)\ ,\ \alpha(0) = 0$

<u>Teorema fondamentale</u>

$C_1, C_2 \subset R^2$ curve regolari orientate connesse

sono equivalenti:

1) $\exists\, h \in \mathrm{Isom}\, R^2$ tale che $C_2 = h(C_1)$ (come curve orientate)

2) $\exists\, i : C_1 \to C_2$ isometria tale che $\kappa_2(i(p)) = \pm\, \kappa_1(p)\ \forall\, p \in C_1$

3) $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 : I \to R^2$ parametrizzazioni naturali globali di C_1, C_2

tali che $\kappa_2(s) = \pm\, \kappa_1(s)\ \forall\, s \in I$

<u>Dim</u>. 1) $\Rightarrow$ 2) $i = h_{|C_1} : C_1 \to C_2$

2) $\Rightarrow$ 3) α_1 param. nat. di $C_1 \rightsquigarrow \alpha_2 = i \circ \alpha_1$ param. nat. di C_2

3) $\Rightarrow$ 1) possiamo supporre $0 \in I$ (a meno di traslaz. in R)

e $\kappa_2(s) = \kappa_1(s)\ \forall\, s \in I$ (a meno di riflessioni di R^2)

$h_1, h_2 \in \mathrm{Isom}^+ R^2$ t.c. $h_i(\alpha_i(0)) = 0\,, h_i(T_i(0)) = e_x$

$\Rightarrow h_2(C_2) = h_1(C_1) \rightsquigarrow h = h_2^{-1} \circ h_1$

Note: 1) nei punti 2 e 3 si ha il segno $+ \Leftrightarrow h \in \mathrm{Isom}^+ R^2$

2) $\kappa_2(s) = \pm\, \kappa_1(s)$ non si può sostituire con $|\kappa_2(s)| = |\kappa_1(s)|$

3) $\exists\, h \in \mathrm{Isom}^+ R^2 \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2$ t.c. $\kappa_2(s) = \kappa_1(s)\ \forall\, s \in I$

4) date $\alpha_1 : I_1 \to R^2$ e $\alpha_2 : I_2 \to R^2$ parametriz. naturali

$\exists\, h \in \mathrm{Isom}\, R^2 \Leftrightarrow \kappa_2(s) = \pm\, \kappa_1(s + c)\ \forall\, s \in I_2$

$\exists\, h \in \mathrm{Isom}^+ R^2 \Leftrightarrow \kappa_2(s) = \kappa_1(s + c)\ \forall\, s \in I_2$

5) $C \subset R^2$ curva regolare connessa con curvatura costante

$\Leftrightarrow C =$ segmento $(\kappa = 0)$ o arco di circonferenza $(\kappa \neq 0)$

Corol. $C_1, C_2 \subset R^2$ curve regolari orientate connesse

$\exists\, h \in \mathrm{Isom}\, R^2$ tale che $C_2 = h(C_1)$ (come curve orientate)

$\Leftrightarrow \exists\, \gamma_1, \gamma_2 : I \to R^2$ parametrizzazioni regolari di C_1, C_2

tali che $v_2(t) = v_1(t)$ e $\kappa_2(t) = \pm\, \kappa_1(t)\ \forall\, t \in I$

Dim. $v_2(t) = v_1(t) \rightsquigarrow s_2(t) = \int_{t_0}^t v_2(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t v_1(\tau) d\tau = s_1(t)$

$\rightsquigarrow \alpha_1, \alpha_2 : J \to R^2$ parametrizazioni naturali di C_1, C_2

tali che $\kappa_2(s) = \pm\, \kappa_1(s)\ \forall\, s \in J$

Note: 1) $\exists\, h \in \mathrm{Isom}^+ R^2 \Leftrightarrow \exists\, \gamma_1, \gamma_2$ t.c. $v_2(t) = v_1(t)\,,\ \kappa_2(t) = \kappa_1(t)$

2) date $\gamma_1 : I_1 \to R^2$ e $\gamma_2 : I_2 \to R^2$ parametriz. regolari

$\exists\, h \in \mathrm{Isom}\, R^2 \Leftrightarrow \exists\, \varphi : I_2 \to I_1$ diff. con $\varphi'(t) > 0\ \forall\, t$ t.c.

$v_2(t) = v_1(\varphi(t))\varphi'(t)\,,\ \kappa_2(t) = \pm\, \kappa_1(\varphi(t))$

$\exists\, h \in \mathrm{Isom}^+ R^2 \Leftrightarrow \exists\, \varphi : I_2 \to I_1$ diff. con $\varphi'(t) > 0\ \forall\, t$ t.c.

$v_2(t) = v_1(\varphi(t))\varphi'(t)\,,\ \kappa_2(t) = \kappa_1(\varphi(t))$

Curvatura e rotazione totale

$C \subset R^2$ arco di curva regolare orientato

$\alpha : [0, \ell\,] \to R^2$ parametrizzazione naturale di C con $\ell = \mathrm{Lung}(C)$

$T : [0, \ell\,] \to S^1 \rightsquigarrow \vartheta : [0, \ell\,] \to R$ sollevamento di T mediante

$p : R \to S^1$ rivestimento def. $p(t) = (\cos t, \sin t)$

Note: 1) $\vartheta(s)$ ben definito a meno di $2k\pi$ (dipende da $\vartheta(0)$)

2) $\vartheta'(s) = \kappa(s)$ univocamente determinato

$(T(s) = (\cos \vartheta(s), \sin \vartheta(s)) \Rightarrow T'(s) = \vartheta'(s)\, N(s))$

$K(C) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_0^\ell |\kappa(s)|\, ds \longleftarrow$ <u>curvatura totale</u>

$\rho(C) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_0^\ell \kappa(s) ds = \int_0^\ell \vartheta'(s) ds = \vartheta(\ell) - \vartheta(0) \longleftarrow$ <u>rotazione totale</u>

<u>Note</u>: 1) $\rho(C)$ dipende dall'orientazione di C
(orientazione opposta $\rightsquigarrow$ rotazione opposta)

2) $K(C) \geq |\rho(C)|$ non dipende dall'orientazione di C

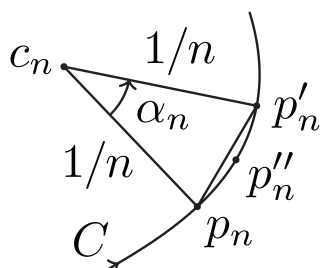
3) $\gamma : [a,b] \to R^2$ parametrizzazione regolare di C

$$\rightsquigarrow K(C) = \int_0^\ell |\kappa(s)| ds = \int_a^b |\kappa(t)| v(t) dt$$
$$\rho(C) = \int_0^\ell \kappa(s) ds = \int_a^b \vartheta'(s) s'(t) dt$$
$$= \int_a^b \vartheta'(t) dt = \vartheta(b) - \vartheta(a)$$

$C \subset R^2$ curva di Jordan regolare orientata
$\gamma : R \to R^2$ parametrizzazione regolare periodica di C
$\rightsquigarrow h_\gamma = \gamma/\!\sim\, : S^1 \to C$ omeomorfismo indotto da γ

<u>Lemma</u>. $k_\gamma : S^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to R^2$ definita $k_\gamma(s,t) = h_\gamma(s) + t\, N(s)$
è un'immersione diff. per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo

<u>Dim</u>. k_γ differenziabile ($\Rightarrow$ continua) per costruzione
k_γ non iniettiva per ogni $\varepsilon > 0$ (per assurdo)
$\Rightarrow \forall\, n\, \exists\, s_n \neq s'_n\, \exists\, t_n, t'_n \in [-1/n, 1/n]$ t.c. $k_\gamma(s_n, t_n) = k_\gamma(s'_n, t'_n)$

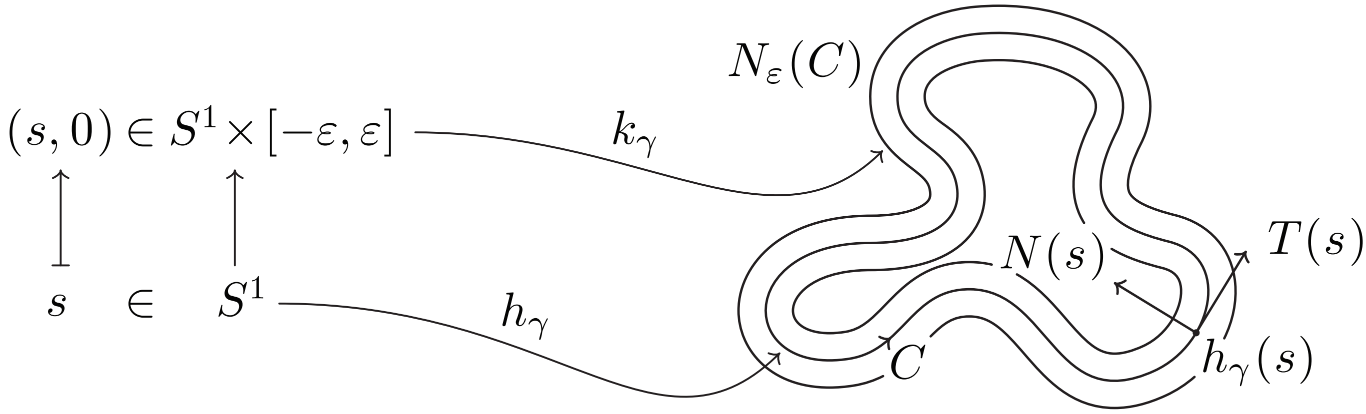


$c_n = k_\gamma(s_n, t_n) = k_\gamma(s'_n, t'_n)$
$p_n = h_\gamma(s_n) \in C$, $p'_n = h_\gamma(s'_n) \in C$
$\rightsquigarrow p''_n = h_\gamma(s''_n)$ con $s'_n \leq s''_n \leq s'_n$ tale che
$\kappa(p''_n) = \vartheta'(s''_n) \geq n/4 \cdot \alpha_n / \sin(\alpha_n/2)$
(Lung(arco p_n, p'_n) $\leq 4 \sin(\alpha_n/2)/n$)

$\exists\, s''_{n_i} \to \bar{s} \in S^1$ (compattezza per successioni)
$\bar{p} = h_\gamma(\bar{s}) = \lim p''_{n_i} \Rightarrow \kappa(\bar{p}) = \lim \kappa(p_{n_i}) = \infty$ (assurdo)

$N_\varepsilon(C) \stackrel{\text{def}}{=\!=} k_\gamma(S^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]) = \{x \in R^2 \mid d(x, C) \leq \varepsilon\}$
$\nwarrow$ <u>ε-intorno tubolare</u> di C ($\cong S^1 \times I$)

<u>Nota</u>: $N_\varepsilon(C)$ non dipende dalla parametrizzazione γ (neppure ε)



Lemma. $\rho(C) = 2\pi\, d(T\circ h_\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$

Dim.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\widetilde{T\circ h_\gamma}\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"] & R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & R \arrow[dl, "p"] \\
S^1 \arrow[r, "T\circ h_\gamma"] & S^1 &
\end{tikzcd}$$

γ param. periodica t.c. $h_\gamma\circ\pi = \gamma$

$\varphi(r) = 2\pi r \rightsquigarrow \vartheta = \varphi\circ(\widetilde{T\circ h_\gamma}\circ\pi)$

$\rho(C) = \vartheta(1) - \vartheta(0) = 2\pi\, d(T\circ h_\gamma)$

Prop. $C \subset R^2$ curva di Jordan regolare $\Rightarrow \rho(C) = \pm 2\pi$

Dim. $\gamma : R \to R^2$ parametriz. regolare periodica di C

$\rightsquigarrow T\circ h_\gamma \simeq \pm N\circ h_\gamma : S^1 \to S^1$ (rotazione di $\pm\pi/2$)

$C' = k_\gamma(S^1\times\{\mp\varepsilon\}) \simeq p \in I(C)$ in $I(C)$ sempl. connesso

$\rightsquigarrow H : S^1\times[0,1] \to \mathrm{Cl}\, I(C)$ omotopia tale che:

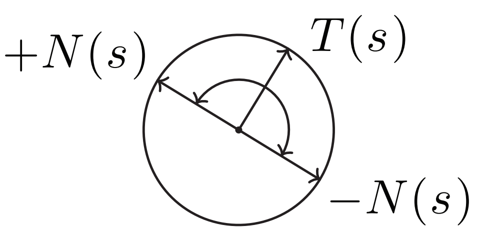
$h_0(s) = h_\gamma(s)\,, h_1(s) = p\,, h_t(s) = k_\gamma(s,\mp t)\ \forall s\ \forall t<\varepsilon$

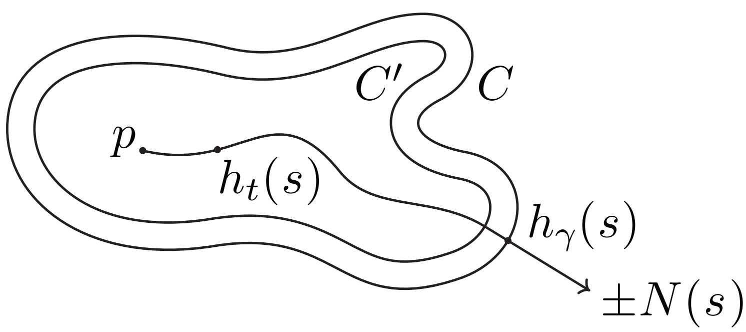
$\rightsquigarrow K : \pm N\circ h_\gamma \simeq \nu_p\circ h_\gamma$ omotopia definita:

$$k_0(s) = \pm N(h_\gamma(s))\,,\ k_t(s) = \frac{h_\gamma(s)-h_t(s)}{\|h_\gamma(s)-h_t(s)\|}\ \forall s\ \forall t>0$$

$\Rightarrow d(T\circ h_\gamma) = d(\pm N\circ h_\gamma) = d(\nu_p\circ h_\gamma) = i_pC = \pm 1$

$\Rightarrow \rho(C) = 2\pi\, d(T\circ h_\gamma) = \pm 2\pi$





Teorema di Fenchel

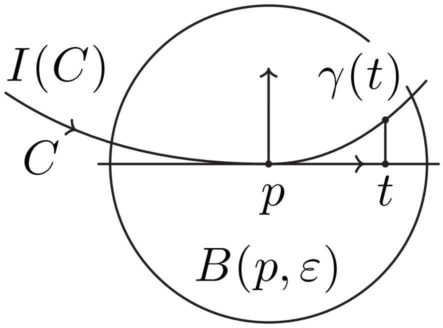
$C \subset R^2$ curva di Jordan regolare $\Rightarrow K(C) \geq 2\pi$

inoltre: $K(C) = 2\pi \Leftrightarrow I(C)$ convesso

Dim. $K(C) \geq |\rho(C)| = 2\pi$

$K(C) = 2\pi \Leftrightarrow \kappa(p) \geq 0 \ \forall\, p \in C$ (orientata opportunamente)

$\Leftrightarrow \forall\, p \in C \ \exists\, \varepsilon > 0$ tale che $I(C) \cap B(p, \varepsilon)$ convesso



$\gamma(t) = (t, f(t))$ con $f : I \to R$ diff.

$\rightsquigarrow \kappa(t) = f''(t)/(1 + f'(t)^2)^{3/2}$

$\rightsquigarrow \kappa(t) \geq 0 \Leftrightarrow f''(t) \geq 0 \ \forall\, t \in I$

$\Leftrightarrow f$ funz. convessa

$\Leftrightarrow I(C)$ convesso

$(p_0 \in I(C) \rightsquigarrow S = \{p \in I(C) \mid [p_0, p] \subset I(C)\}$

S aperto in $I(C)$: $p \in S \rightsquigarrow d([p_0, p], C) = \varepsilon > 0$

$\Rightarrow B(p, \varepsilon) \subset S$

S chiuso in $I(C)$: $p \in \mathrm{Cl}_{I(C)}\, S \rightsquigarrow p_n \to p$ con $p_n \in S$

$\Rightarrow [p_0, p_n] \to [p_0, p]$

$\Rightarrow [p_0, p] \subset I(C) \Rightarrow p \in S$

$\Rightarrow S = I(C) \ \forall\, p_0 \in I(C) \Rightarrow I(C)$ convesso$)$