V spazio vettoriale reale di dimensione finita

$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ prodotto scalare

$\overset{\text{def}}{\iff}$ forma bilineare simmetrica definita positiva (pos $=\dim V$)

cioè: 1) $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_1, w\rangle$, $\forall\, v_1, v_2, w \in V$

$\langle a\, v, w\rangle = a\,\langle v, w\rangle$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ e $\forall\, v, w \in V$

$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$, $\forall\, v, w_1, w_2 \in V$

$\langle v, a\, w\rangle = a\,\langle v, w\rangle$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ e $\forall\, v, w \in V$

2) $\langle w, v\rangle = \langle v, w\rangle$, $\forall\, v, w \in V$

3) $\langle v, v\rangle > 0$, $\forall\, v \in V - \{0_V\}$

$V = (V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ spazio vettoriale euclideo

$U \subset V$ sottospazio vettoriale

$\rightsquigarrow$ $U = (U, \langle \cdot , \cdot \rangle_{|U\times U})$ sottospazio vettoriale euclideo

Esempi: 1) $V =$ spazio dei vettori liberi del piano/spazio

$\langle v, w\rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \widehat{vw}$ (prodotto scalare geometrico)

2) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)$

spazio vett. euclideo numerico (prod. scal. canonico)

Prop. (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$\langle v, w\rangle^2 \le \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ $\forall\, v, w \in V$ spazio vettoriale euclideo

e vale $=$ se e solo se $v \parallel w$ (cioè v e w linearmente dipend.)

Dim. se $v = 0$ o $w = 0$ allora tutto nullo, altrimenti

$\langle a\, v + b\, w, a\, v + b\, w\rangle \ge 0$ con $a = \langle w, w\rangle$ e $b = -\langle v, w\rangle$

$\Leftrightarrow \langle w, w\rangle^2\langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle\langle v, w\rangle^2 \ge 0 \Leftrightarrow \langle v, w\rangle^2 \le \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$

$V = (V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ spazio vettoriale euclideo

$\rightsquigarrow$ $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ norma associata a $\langle \cdot , \cdot \rangle$

definita $v \mapsto \|v\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v, v\rangle}$, $\forall\, v \in V$

Note: 1) $\|v\| \ge 0$ (e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$) , $\forall\, v \in V$

2) $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ (e vale $= \Leftrightarrow v \upuparrows w$) , $\forall\, v, w \in V$

disuguaglianza triangolare

$(\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \le (\|v\| + \|w\|)^2)$

3) $\|a\,v\| = |a|\,\|v\|\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ e $\forall\, v \in V$

4) $\|\cdot\| \rightsquigarrow \langle\cdot,\cdot\rangle\ (\,\langle v,w\rangle = (\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)/2\,)$

$V = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio vettoriale euclideo

$v \in V$ <u>versore</u> $\overset{\text{def}}{\iff} \|v\| = 1$

$v, w \in V$ vettori <u>ortogonali</u> $(v \perp w) \overset{\text{def}}{\iff} \langle v,w\rangle = 0$

<u>Note</u>: 1) $v \in V - \{0_V\} \rightsquigarrow v/\|v\|$ versore di v ($v \leftrightsquigarrow (v/\|v\|, \|v\|)$)

2) $v \perp w \Leftrightarrow \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (<u>identità pitagorica</u>)

3) $v, w \in V - \{0_V\} \rightsquigarrow |\widehat{vw}| \overset{\text{def}}{=\!=} \arccos(\langle v,w\rangle/(\|v\|\cdot\|w\|)) \geq 0$

<u>misura dell'angolo convesso</u> $\widehat{vw}$

4) $\perp$ (misura angoli) $\not\rightsquigarrow \langle\cdot,\cdot\rangle$ (= per $k\,\langle\cdot,\cdot\rangle\,,\ k \in \mathbb{R} - \{0\}$)

<u>Prop</u>. $V = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio vettoriale euclideo

$\rightsquigarrow V \to V^*$ isomorfismo canonico (indotto da $\langle\cdot,\cdot\rangle$)

definito $v \mapsto v^\top$ con $v^\top(w) = \langle v,w\rangle\ \forall\, v, w \in V$

<u>Dim</u>. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilin. definito positivo $\Rightarrow v \mapsto v^\top$ lineare iniettiva

$V = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio vettoriale euclideo

$U_1, U_2 \subset V$ sottospazi vettoriali <u>ortogonali</u> $(U_1 \perp U_2)$

$\overset{\text{def}}{\iff} \langle u_1, u_2\rangle = 0\,,\ \forall\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$

$U \subset V$ sottospazio vettoriale

$\rightsquigarrow U^\perp \overset{\text{def}}{=\!=} \{v \in V \mid \langle u,v\rangle = 0\ \forall\, u \in U\}$ <u>ortogonale</u> di U in V

(sottospazio vettoriale massimale ortogonale ad U)

<u>Prop</u>. $V = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio vettoriale euclideo

$U \subset V$ sottospazio vettoriale $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

$\rightsquigarrow \pi_U : V \to U$ <u>proiezione ortogonale</u> $(v = u + u^\perp \mapsto u)$

$\sigma_U : V \to V$ <u>riflessione</u> rispetto a U $(v = u + u^\perp \mapsto u - u^\perp)$

<u>Dim</u>. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definito positivo $\Rightarrow U \cap U^\perp = \{0_V\}$

$(U^\perp)^\top = \mathrm{Nil}\,U \Rightarrow \dim U^\perp = \dim V - \dim U$

<u>Note</u>: 1) $U \leftrightarrow U^\perp : \{$sottosp. vett. di $V\} \leftrightarrow \{$sottosp. vett. di $V\}$

<u>dualità euclidea</u> ($\overset{\top}{\leftrightarrow}$ dualità lineare)

2) $\perp$ = involuzione $((U^\perp)^\perp = U\,,\ \forall\, U \subset V$ sottosp. vett.)

3) $U \subset V$ sottospazio vettoriale, $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

4) $U_1, U_2 \subset V$ sottospazi vettoriali, $U_1 \subset U_2 \Leftrightarrow U_1^\perp \supset U_2^\perp$

5) $U_1, \dots, U_n \subset V$ sottospazi vettoriali,
$(U_1 \cap \dots \cap U_n)^\perp = U_1^\perp + \dots + U_n^\perp$
$(U_1 + \dots + U_n)^\perp = U_1^\perp \cap \dots \cap U_n^\perp$

<u>Basi ortonormali</u>

$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ spazio vettoriale euclideo
<u>insieme ortogonale</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $v_i \neq 0$ e $v_i \perp v_j$, $\forall\, i \neq j$
<u>insieme ortonormale</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\|v_i\| = 1$ e $v_i \perp v_j$, $\forall\, i \neq j$

<u>Note</u>: 1) $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale

2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonale $\Rightarrow$ linearmente indipendente
(ortog. $\Leftrightarrow \langle v_i \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle^\perp \ \ \forall\, i = 1, \dots, n$)

3) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogon. $\rightsquigarrow \{v_1/\|v_1\|, \dots, v_n/\|v_n\|\}$ ortonorm.

4) teorema di Sylvester $\Rightarrow \exists$ base ortonormale di V

5) $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale di V
$\Leftrightarrow \{v_1^*, \dots, v_n^*\} = \{v_1^\top, \dots, v_n^\top\}$ in V^*
$\Leftrightarrow v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle\, v_i \ \forall\, v \in V$ (componenti = proiezioni)

6) $\perp \rightsquigarrow \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ a meno di fattore $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ($\rightsquigarrow$ mis. angoli)
($\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle'$ altro prodotto scalare che induce stessa relaz. $\perp$
$\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonor. per $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle \Rightarrow$ ortogon. per $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle'$
$\Rightarrow \langle v_i, v_i \rangle' = k_i \rightsquigarrow \langle v_i + v_j, v_i - v_j \rangle' = 0 \Rightarrow k_i = k_j$)

<u>Prop</u>. (Metodo di ortonormalizzazione di Gramm-Schmidt)
V spazio vett. euclideo, $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ linearm. indipend.
$\rightsquigarrow \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ unico insieme ortonormale
t.c. 1) $\langle w_1, \dots, w_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ per ogni $1 \leq i \leq n$
2) $\langle v_i, w_i \rangle > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$

<u>Dim</u>. w_i definito per induzione a partire da $w_1 = v_1/\|v_1\|$
$i > 1 \rightsquigarrow u_i = v_i - \sum_{j<i} \langle v_i, w_j \rangle\, w_j \rightsquigarrow w_i = u_i/\|u_i\|$

<u>Note</u>: 1) $\{v_1, \dots, v_k\}$ ortonormale $\Rightarrow w_1 = v_1, \dots, w_k = v_k$

2) alternativa: $u_i = v_i - \sum_{j<i} \langle v_i, u_j \rangle\, u_j / \langle u_j, u_j \rangle$

Corol. V spazio vettoriale euclideo, $\dim V = n$
$\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ insieme ortonormale
$\rightsquigarrow \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ base ortonormale

Dim. $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linearm. indip. $\rightsquigarrow \{v_1, \ldots, v_k, v'_{k+1}, \ldots, v'_n\}$ base
$\rightsquigarrow \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormale (Gramm-Schmidt + nota 1)

Applicazioni lineari isometriche

$\varphi : V \to W$ con V, W spazi vettoriali euclidei
appl. lineare isometrica $\overset{\text{def}}{\iff} \langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$
$\iff \|\varphi(v)\| = \|v\|$, $\forall\, v \in V$ $(\| \cdot \| \rightsquigarrow \langle \cdot , \cdot \rangle)$
isometria (lineare) $\overset{\text{def}}{\iff} \varphi$ isometrica e biiettiva

$V \cong W \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \varphi : V \to W$ isometria
$\hookrightarrow$ spazi vettoriali euclidei isomorfi o isometrici

Note: 1) $\varphi : V \to W$ appl. lineare isometrica $\Rightarrow \varphi$ iniettiva
2) $\varphi : V \to W$ appl. isom. $\Rightarrow \varphi_{|U} : U \to \varphi(U)$ appl. isom.
3) $\varphi : V \to W$ isometria $\Leftrightarrow \varphi$ isometrica e $\dim V = \dim W$
4) $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{incl}_{U \subset V} : U \to V$ e $\sigma_U : V \to V$ sono isom.
5) $\varphi : V \to W$ e $\psi : W \to U$ isom. $\Rightarrow \psi \circ \varphi : V \to U$ isom.
6) $\varphi : V \to W$ isometria $\Rightarrow \varphi^{-1} : W \to V$ isometria
$\hookrightarrow \cong$ "relazione di equivalenza" tra spazi vettoriali euclidei

Prop. $\varphi : V \to W$ appl. lineare con V, W spazi vettoriali euclidei
isometrica $\Leftrightarrow \exists\, \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ base ortonormale tale che
$\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\} \subset W$ insieme ortonormale
$\Leftrightarrow \forall\, \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ base ortonormale si ha
$\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\} \subset W$ insieme ortonormale

Dim. $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ e $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\} \subset W$ ortonormali
$\Rightarrow \|\varphi(v)\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = \|v\|^2$, $\forall\, v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$

Corol. $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Nota: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ appl. lineare isometrica
$\Leftrightarrow \varphi(x) = M \cdot x$ con $M \in M_{m,n}\mathbb{R}$ t.c. $M^* \cdot M = I_n$

V spazio vettoriale euclideo

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonorm. ord. di $V \leftrightsquigarrow \gamma_B : V \to \mathbb{R}^n$ isom.
$v \leftrightarrow \gamma_B(v) = (x_1, \ldots, x_n)$ <u>coordinate lineari ortogonali</u> su V

B' altra base orton. ord. di $V \rightsquigarrow \gamma_{B,B'} = \gamma_{B'} \circ \gamma_B^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isom.
$\gamma_{B,B'} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x'_1, \ldots, x'_n)$ <u>camb. di coordinate ortogonali</u>

<u>Note</u>: 1) $v \leftrightarrow x = (x_1, \ldots, x_n)\,,\ w \leftrightarrow y = (y_1, \ldots, y_n)$
$\Rightarrow \langle v, w\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n\,,\ \|v\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$
2) $U \subset V$ sottospazio vett. $\leftrightsquigarrow x = M \cdot t \leftrightsquigarrow A \cdot x = 0$
$\rightsquigarrow U^\perp \leftrightsquigarrow x = A^* \cdot t \leftrightsquigarrow M^* \cdot x = 0$
3) $U_1, U_2 \subset V$ sottospazi vett. $\leftrightsquigarrow x = M_i \cdot t \leftrightsquigarrow A_i \cdot x = 0$
$U_1 \perp U_2 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A_i^* | M_j) = \mathrm{rg}\, A_i^* \Leftrightarrow M_i^* \cdot M_j = 0$
U_i complementari $\rightsquigarrow U_1 \perp U_2 \Leftrightarrow A_i \cdot A_j^* = 0$

<u>Automorfismi isometrici</u>

V spazio vettoriale euclideo

$\mathrm{Iso}_0\, V = \{\varphi \in \mathrm{Aut}\, V \mid \varphi \text{ isometria}\} \subset \mathrm{Aut}\, V$ (sottogr. non norm.)
↳ <u>gruppo delle isometrie (lineari)</u> di V

$\mathrm{Iso}_0^+\, V = \{\varphi \in \mathrm{Iso}_0\, V \mid \varphi \text{ cons. orient.}\} \subset \mathrm{Iso}_0\, V$ (sottogr. norm.)
↳ <u>gruppo delle isometrie (lineari) positive</u> di V

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonormale ordinata di V
$\rightsquigarrow \mathrm{Iso}_0\, V \cong \mathrm{Iso}_0\, \mathbb{R}^n$ isom. def. $\varphi \leftrightarrow \varphi_B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varphi_{B,B} = \gamma_B \circ \varphi \circ \gamma_B^{-1}$
↳ φ in coord. lin. indotte da B

<u>Nota</u>: B' altra base ortonorm. ord. di $V \rightsquigarrow \varphi_{B'} = \gamma_{B,B'} \circ \varphi_B \circ \gamma_{B,B'}^{-1}$

$\mathrm{Iso}_0\, \mathbb{R}^n \cong \mathrm{O}(n) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid M^{-1} = M^*\} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$
↳ <u>gruppo ortogonale</u> (M <u>matrice ortogonale</u>)

$\mathrm{Iso}_0^+\, \mathbb{R}^n \cong \mathrm{SO}(n) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{M \in \mathrm{O}(n) \mid \det M = 1\} \subset \mathrm{O}(n)$ (sottogr. nor.)
↳ <u>gruppo ortogonale speciale</u> o gruppo delle <u>rotazioni</u>

<u>Note</u>: 1) $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ base ortonormale $\Leftrightarrow (v_1 \ldots v_n) \in \mathrm{O}(n)$
2) $M \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow \det M = \pm 1$ $((\det M)^2 = \det(M^* \cdot M) = 1)$
3) $B, B' \subset \mathbb{R}^n$ basi orton. $\Rightarrow M_{B,B'} = (\langle w_i, v_j\rangle)_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n} \in \mathrm{O}(n)$

4) V spazio vettoriale euclideo orientato, $\dim V = n$
$v_1, \ldots, v_n \in V \rightsquigarrow \mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_n) \overset{\text{def}}{=\!=} \det(\gamma_B(v_1)\ \ldots\ \gamma_B(v_n))$
volume euclideo orientato

Prop. $\varphi \in \mathrm{Iso}_0\, V$ con V spazio vettoriale euclideo, $\dim V = n$
$\rightsquigarrow V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_k}$ sottosp. ortog. invar. per φ
con $V_{\pm 1}$ = autosp. dell'autoval. ± 1 ($= \{0_V\}$ altrimenti)
$\dim V_{\alpha_i} = 2$, $\varphi_| : V_{\alpha_i} \to V_{\alpha_i}$ rotazione di α_i radianti

Dim. per induzione su $n \geq 1$ ($n \leq 2$ banale)
$V = \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = M \cdot x$ con $M \in \mathrm{O}(n)$
$k \in \mathbb{C}$ soluzione dell'equaz. caratteristica $\det(M - t\, I_n) = 0$
$k \in \mathbb{R} \Rightarrow k = \pm 1$ autovalore di φ con $x \in \mathbb{R}^n$ autovettore
$\Rightarrow \mathbb{R}^n = \langle x \rangle \oplus U$ sottospazi invarianti per φ
con $U = \langle x \rangle^\perp$ ($\Rightarrow \dim U = n - 1$)
$k \notin \mathbb{R} \rightsquigarrow \bar{k}$ soluzione dell'equaz. caratteristica
$\rightsquigarrow z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tale che $M \cdot z = k\, z$ e $M \cdot \bar{z} = \bar{k}\, \bar{z}$
$\rightsquigarrow x, y \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti con $z = x + y\, i$
$\Rightarrow \mathbb{R}^n = \langle x, y \rangle \oplus U$ sottospazi invarianti per φ
con $\varphi_| : \langle x, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ rotazione
e $U = \langle x, y \rangle^\perp$ ($\Rightarrow \dim U = n - 2$)

Corol. $\forall\, \varphi \in \mathrm{Iso}_0\, V$ con V spazio vettoriale euclideo
$\exists\, B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonormale ordinata di V
t.c. $M(\varphi_B) \in \mathrm{O}(n)$ matrice diagonale a blocchi
con blocchi univoc. determ. a meno dell'ordine
del tipo (± 1) e $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \neq 0, \pi$

Dim. basi ortonormali di $V_1, V_{-1}, V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k} \rightsquigarrow B$
autovalori di $\varphi \rightsquigarrow$ blocchi a meno dell'ordine

Note: 1) $\varphi \in \mathrm{Iso}_0^+\, V \Rightarrow \varphi =$ comp. di rotazioni (una se $\dim V \leq 3$)
($-I_2$ = rotazione di π radianti $\rightsquigarrow V_{-1} = \{0_V\}$)
2) $\varphi \in \mathrm{Iso}_0\, V \Rightarrow \varphi =$ comp. di riflessioni ($V = V_1 \oplus V_{-1}$)
(ogni rotazione è composizione di due riflessioni)

Similitudini lineari

V spazio vettoriale euclidei

$\mathrm{Sim}_0 V = \{k\,\varphi \in \mathrm{Aut}\,V \mid k > 0\,,\ \varphi \in \mathrm{Iso}_0\,V\} \subset \mathrm{Aut}\,V$
gruppo delle similitudini (lineari) di V

$\mathrm{Sim}_0^+ V = \{\varphi \in \mathrm{Sim}_0 V \mid \varphi$ cons. orient.$\} \subset \mathrm{Sim}_0 V$ (sottogr. norm.)
gruppo delle similitudini (lineari) positive di V

Note: 1) $\mathrm{Sim}_0 V = \{\varphi \in \mathrm{Aut}\,V \mid |\widehat{\varphi(v_1)\varphi(v_2)}| = |\widehat{v_1 v_2}|\ \ \forall\, v_1, v_2 \in V\}$
$= \{\varphi \in \mathrm{Aut}\,V \mid \varphi(v_1) \perp \varphi(v_2)\ \forall\, v_1 \perp v_2 \in V\}$

2) $\mathrm{Iso}_0 V \subset \mathrm{Sim}_0 V$, $\mathrm{Iso}_0^+ V \subset \mathrm{Sim}_0^+ V$ sottogruppi normali

Forme bilineari e operatori simmetrici

V spazio vettoriale euclideo
$\varphi \in \mathrm{End}\,V$ operatore simmetrico
$\overset{\text{def}}{\iff} \langle \varphi(v), w\rangle = \langle v, \varphi(w)\rangle\,,\ \forall\, v, w \in V$

Note: 1) $\varphi \in \mathrm{End}\,V$ operatore simmetrico
$\Leftrightarrow \exists\, B$ base ortonorm. ord. di V t.c. $M(\varphi_B)$ mat. simm.
$\Leftrightarrow \forall\, B$ base ortonorm. ord. di V si ha $M(\varphi_B)$ mat. simm.

2) $\varphi \in \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$ simmetrico $\Leftrightarrow \varphi(x) = M \cdot x$ con $M \in M_{n,n}^{\mathrm{sim}}\mathbb{R}$

Esempi: 1) $\pi_U : V \to V$ (proiez. ortog. su $U \subset V$) operatore simm.
2) $\sigma_U : V \to V$ (rifles. risp. ad $U \subset V$) operatore simm.
3) rotazioni di angoli $\alpha \neq 0, \pi$ non sono operatori simm.

Prop. $\varphi \in \mathrm{End}\,V$ operatore simmetrico con V spazio vett. euclideo
$\Rightarrow$ tutti gli zeri di $p_\varphi(t) = \det(\varphi - t\,\mathrm{id}_V)$ sono reali
$\rightsquigarrow \mathrm{sp}\,\varphi \overset{\text{def}}{=\!=} \{k_1, \dots, k_n\} \subset \mathbb{R}$ (spettro di φ)
insieme (con molteplicità) degli autovalori di φ

Dim. $V = \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = M \cdot x$ con M matrice simmetrica
$k \in \mathbb{C}$ zero di $p_M(t) = \det(M - t\,I_n) \rightsquigarrow \bar{k}$ zero di $p_M(t)$
$\rightsquigarrow z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tale che $M \cdot z = k\,z$ e $M \cdot \bar{z} = \bar{k}\,\bar{z}$
$\Rightarrow \bar{z}^* \cdot M \cdot z = k \sum_i |z_i|^2$ e $z^* \cdot M \cdot \bar{z} = \bar{k} \sum_i |z_i|^2$
$\Rightarrow k = \bar{k} \Rightarrow k \in \mathbb{R}$

Teorema spettrale

$\varphi \in \operatorname{End} V$ operatore simmetrico con V spazio vett. euclideo
$\Rightarrow \exists\, B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonormale ordinata di V tale che
$M(\varphi_B) = \operatorname{Diag}(k_1, \ldots, k_n)$ $(\varphi(v_i) = k_i\, v_i\ \forall\, i = 1, \ldots, n)$

Dim. per induzione su $\dim V = n \geq 1$ $(n = 1$ banale$)$
$\rightsquigarrow v_1 \in V$ autovettore per φ t.c. $\|v_1\| = 1$ ($\exists$ per il lemma)
$\Rightarrow U = \langle v_1 \rangle^\perp \subset V$ sottospazio vett. invariante per φ
$\rightsquigarrow \psi = \varphi_| : U \to U$ con $\dim U = n - 1$
$\rightsquigarrow B' = (v_2, \ldots, v_n)$ base ortonorm. di U t.c. $M(\psi_{B'})$ diag.
$\Rightarrow B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonorm. di V t.c. $M(\varphi_B)$ diag.

Corol. $\varphi \in \operatorname{End} V$ operatore simmetrico con V spazio vett. euclideo
$\Rightarrow V = \oplus_{k \,\in\, \operatorname{sp} \varphi} V_k$ con $V_k \perp V_{k'}$ per ogni $k \neq k'$ autovalori

Nota: per ogni $A \in M^{\text{sim}}_{n,n}\mathbb{R}$ esiste $M \in \mathrm{O}(n)$ tale che
$A = M \cdot D \cdot M^{-1}$ e $D = M^* \cdot A \cdot M$ (equiv. + congr.)
$D = \operatorname{Diag}(k_1, \ldots, k_n)$ con $\{k_1, \ldots, k_n\} = \operatorname{sp} A \stackrel{\text{def}}{=\!=} \operatorname{sp}(x \mapsto A \cdot x)$

Corol. $\beta \in \operatorname{Bil} V$ simmetrica con V spazio vett. euclideo
$\Rightarrow \exists\, B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonormale ordinata di V t.c.
$M(\beta_B) = \operatorname{Diag}(k_1, \ldots, k_n)$ dove $\{k_1, \ldots, k_n\} = \operatorname{sp} A$
con $A =$ matrice di β risp. base ortonormale arbitraria

Nota: $\beta \in \operatorname{Bil} \mathbb{R}^n$ simmetrica, $\beta(x, y) = x^* \cdot A \cdot y$
$p_A(t) \rightsquigarrow \operatorname{rg} \beta$ e $\operatorname{pos} \beta$ (teorema di Cartesio)

Spazi vettoriali euclidei complessi

V spazio vettoriale complesso di dimensione finita

$\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ forma sesquilineare
$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\beta(v_1 + v_2, w) = \beta(v_1, w) + \beta(v_1, w)\,,\ \forall\, v_1, v_2, w \in V$
$\beta(a\, v, w) = a\, \beta(v, w)\,,\ \forall\, a \in \mathbb{C}$ e $\forall\, v, w \in V$
2) $\beta(v, w_1 + w_2) = \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2),\ \forall\, v, w_1, w_2 \in V$
$\beta(v, a\, w) = \bar{a}\, \beta(v, w)\,,\ \forall\, a \in \mathbb{C}$ e $\forall\, v, w \in V$

$\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ <u>forma hermitiana</u>
$\overset{\text{def}}{\iff}$ forma sesquilineare t.c. $\beta(w,v) = \overline{\beta(v,w)}$, $\forall\, v,w \in V$
$(\Rightarrow \beta(v,v) \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, v \in V)$

<u>Note</u>: 2) $\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ forma sesquilineare
$\Leftrightarrow \beta(x,y) = x^* \cdot A \cdot \bar{y}$ con $A \in M_{n,n}\mathbb{C}$
1) $\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ forma hermitiana
$\Leftrightarrow \beta(x,y) = x^* \cdot A \cdot \bar{y}$ con $A^* = \bar{A}$ (<u>matrice hermitiana</u>)

$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ <u>prodotto scalare hermitiano</u>
$\overset{\text{def}}{\iff}$ forma hermitiana t.c. $\langle v,v\rangle > 0\,,\ \forall\, v \in V - \{0_V\}$

$V = (V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ <u>spazio vettoriale euclideo complesso</u>

<u>Esempio</u>: $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n, \langle x,y\rangle = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n)$
↳ <u>spazio vett. euclideo complesso numerico</u>

<u>Prop</u>. (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)
$|\langle v,w\rangle|^2 \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle\ \forall\, v,w \in V$ spazio vett. euclideo compl.
e vale $=$ se e solo se $v \parallel w$ (cioè v e w linearmente dipend.)

<u>Dim</u>. $\langle a\,v + b\,w, a\,v + b\,w\rangle \geq 0$ con $a = \langle w,w\rangle$ e $b = -\langle v,w\rangle$
$\leftrightsquigarrow \langle w,w\rangle^2\langle v,v\rangle - \langle w,w\rangle|\langle v,w\rangle|^2 \geq 0$
$\leftrightsquigarrow |\langle v,w\rangle|^2 \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$ se $w \neq 0$

$V = (V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ spazio vettoriale euclideo complesso
$\rightsquigarrow \|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ <u>norma</u> associata a $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$
definita $v \mapsto \|v\| \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{\langle v,v\rangle}\,,\ \forall\, v \in V$

<u>Note</u>: 1) $\|v\| \geq 0$ (e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$) , $\forall\, v \in V$
2) $\|a\,v\| = |a|\,\|v\|\,,\ \forall\, a \in \mathbb{C}$ e $\forall\, v \in V$
3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (e vale $= \Leftrightarrow v \upuparrows w$) , $\forall\, v,w \in V$
↳ <u>disuguaglianza triangolare</u>
$(\ \|v+w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2\ )$

$V = (V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ spazio vettoriale euclideo complesso
$v \in V$ <u>versore</u> $\overset{\text{def}}{\iff} \|v\| = 1$
$v,w \in V$ vettori <u>ortogonali</u> $(v \perp w) \overset{\text{def}}{\iff} \langle v,w\rangle = 0$

Note: 1) $v \in V - \{0_V\} \rightsquigarrow v/\|v\|$ versore di v ($v \leftrightsquigarrow (v/\|v\|, \|v\|)$)

2) $v \perp w \Leftrightarrow \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (identità pitagorica)

$V = (V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ spazio vettoriale euclideo complesso

$U \subset V$ sottospazio vettoriale

$\rightsquigarrow\ U = (U, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{|U\times U})$ sottospazio vettoriale euclideo complesso

$U_1, U_2 \subset V$ sottospazi vettoriali ortogonali ($U_1 \perp U_2$)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle u_1, u_2\rangle = 0\,,\ \forall\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$

$U \subset V$ sottospazio vettoriale

$\rightsquigarrow U^\perp \overset{\text{def}}{=\!=} \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0\ \forall\, u \in U\}$ ortogonale di U in V

(sottospazio vettoriale massimale ortogonale ad U)

Prop. $V = (V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ spazio vettoriale euclideo complesso

$U \subset V$ sottospazio vettoriale $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

$\rightsquigarrow \pi_U : V \to U$ proiezione ortogonale ($v = u + u^\perp \mapsto u$)

$\sigma_U : V \to V$ riflessione rispetto a U ($v = u + u^\perp \mapsto u - u^\perp$)

Dim. come nel caso reale

Note: 1) $U \leftrightarrow U^\perp : \{\text{sottosp. vett. di } V\} \leftrightarrow \{\text{sottosp. vett. di } V\}$

dualità euclidea compl. ($(U^\perp)^\perp = U \rightsquigarrow \perp =$ invol.)

2) $U \subset V$ sottospazio vettoriale, $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

3) $U_1, U_2 \subset V$ sottospazi vettoriali, $U_1 \subset U_2 \Leftrightarrow U_1^\perp \supset U_2^\perp$

4) $U_1, \dots, U_n \subset V$ sottospazi vettoriali,

$(U_1 \cap \ldots \cap U_n)^\perp = U_1^\perp + \ldots + U_n^\perp$

$(U_1 + \ldots + U_n)^\perp = U_1^\perp \cap \ldots \cap U_n^\perp$

$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ spazio vettoriale euclideo complesso

insieme ortogonale $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} v_j \neq 0$ e $v_j \perp v_k\,,\ \forall\, j \neq k$

insieme ortonormale $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|v_j\| = 1$ e $v_j \perp v_k\,,\ \forall\, j \neq k$

Note: 1) $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{C}^n$ è ortonormale

2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonale $\Rightarrow$ linearmente indipendente

3) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogon. $\rightsquigarrow \{v_1/\|v_1\|, \dots, v_n/\|v_n\|\}$ ortonorm.

4) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormale di V
$\Leftrightarrow \{v_1^*, \ldots, v_n^*\} = \{v_1^\top, \ldots, v_n^\top\}$ in V^*
$\Leftrightarrow v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle\, v_i \ \forall\, v \in V$ (componenti = proiezioni)

Prop. (Metodo di ortonormalizzazione di Gramm-Schmidt)
V spazio vett. euclideo compl., $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ lin. indip.
$\rightsquigarrow \{w_1, \ldots, w_n\} \subset V$ insieme ortonormale (non unico)
t.c. $\langle w_1, \ldots, w_j \rangle = \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ per ogni $1 \leq j \leq n$

Dim. come nel caso reale, eccetto per la normalizzazione

Note: 1) $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ortonormale $\rightsquigarrow w_1 = v_1, \ldots, w_k = v_k$
2) w_j univoc. determ. a meno di fattore $e^{i\vartheta_j} \in \mathbb{C}$

Corol. V spazio vett. euclideo compl. di dimensione n
$\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ insieme ortonormale
$\rightsquigarrow \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ base ortonormale

Dim. come nel caso reale

$\varphi : V \to W$ con V, W spazi vettoriali euclidei complessi
appl. lineare isometrica $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$
isometria (lineare) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi$ isometrica e biiettiva

$V \cong W \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \varphi : V \to W$ isometria
$\hookrightarrow$ spazi vett. euclidei compl. isomorfi o isometrici

Prop. $\varphi : V \to W$ appl. lineare con V, W spazi vett. euclidei compl.
isometrica $\Leftrightarrow \exists\, \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ base ortonormale tale che
$\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\} \subset W$ insieme ortonormale
$\Leftrightarrow \forall\, \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ base ortonormale si ha
$\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\} \subset W$ insieme ortonormale

Dim. come nel caso reale

Corol. $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Nota: $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ appl. lineare isometrica
$\Leftrightarrow \varphi(x) = M \cdot x$ con $M \in M_{m,n}\mathbb{C}$ t.c. $M^* \cdot \overline{M} = I_n$

V spazio vettoriale euclideo complesso

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonorm. ord. di $V \rightsquigarrow \gamma_B : V \to \mathbb{C}^n$ isom.
$v \leftrightarrow \gamma_B(v) = (x_1, \ldots, x_n)$ <u>coordinate lineari ortogonali</u> su V

B' altra base orton. ord. di $V \rightsquigarrow \gamma_{B,B'} = \gamma_{B'} \circ \gamma_B^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ isom.
$\gamma_{B,B'} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x'_1, \ldots, x'_n)$ <u>camb. di coordinate ortogonali</u>

<u>Nota</u>: $v \overset{\gamma_B}{\leftrightarrow} x = (x_1, \ldots, x_n)$, $w \overset{\gamma_B}{\leftrightarrow} y' = (y_1, \ldots, y_n)$
$\Rightarrow \langle v, w\rangle = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$, $\|v\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$

V spazio vettoriale euclideo complesso

$\mathrm{Iso}_0 V = \{\varphi \in \mathrm{Aut}\, V \mid \varphi \text{ isometria}\} \subset \mathrm{Aut}\, V$ (sottogr. non norm.)
↳ <u>gruppo delle isometrie</u> (o <u>automorfismi unitari</u>) di V

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonormale ordinata di V
$\rightsquigarrow \mathrm{Iso}_0 V \cong \mathrm{Iso}_0 \mathbb{C}^n$ isom. def. $\varphi \leftrightarrow \varphi_B \overset{\text{def}}{=\!=} \varphi_{B,B} = \gamma_B \circ \varphi \circ \gamma_B^{-1}$
↳ φ in coord. lin. indotte da B

<u>Nota</u>: B' altra base ortonorm. ord. di $V \rightsquigarrow \varphi_{B'} = \gamma_{B,B'} \circ \varphi_B \circ \gamma_{B,B'}^{-1}$

$\mathrm{Iso}_0 \mathbb{C}^n \cong \mathrm{U}(n) \overset{\text{def}}{=\!=} \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid M^{-1} = \overline{M}^*\} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$
↳ <u>gruppo unitario</u> (M <u>matrice unitaria</u>)

<u>Note</u>: 1) $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{C}^n$ base ortonormale $\Leftrightarrow (v_1 \ \ldots \ v_n) \in \mathrm{U}(n)$
2) $M \in \mathrm{U}(n) \Rightarrow |\det M| = 1$ $(|\det M|^2 = \det(M^* \cdot \overline{M}) = 1)$
3) $B, B' \subset \mathbb{C}^n$ basi orton. $\Rightarrow M_{B,B'} = (\langle w_j, v_k\rangle)_{j=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,n} \in \mathrm{U}(n)$

<u>Prop</u>. $\forall\, \varphi \in \mathrm{Iso}_0 V$ con V spazio vett. euclideo complesso
$\exists\, B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonormale ordinata di V
tale che $M(\varphi_B) \in \mathrm{Diag}(e^{i\vartheta_1}, \ldots, e^{i\vartheta_n})$

<u>Dim</u>. per induzione su $\dim V = n \geq 1$ ($n = 1$ banale)
$V = \mathbb{C}^n$, $\varphi(x) = M \cdot x$ con $M \in \mathrm{U}(n)$
$k \in \mathbb{C}$ autovalore di $\varphi \Rightarrow |k| = 1$
$\rightsquigarrow k = e^{i\vartheta}$, $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ t.c. $\varphi(x) = e^{i\vartheta}x$
$\Rightarrow \mathbb{C}^n = \langle x\rangle \oplus U$ sottospazi invarianti per φ
con $U = \langle x\rangle^\perp$ ($\Rightarrow \dim U = n - 1$)

Nota: $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^{2n} \rightsquigarrow \mathrm{O}(n) \subset \mathrm{U}(n) \subset \mathrm{SO}(2n)$

(prod. hermit. di $\mathbb{C}^n$ si restringe al prod. scalare di $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$
norma hermit. di $\mathbb{C}^n$ coincide con la norma di $\mathbb{R}^{2n} \leftrightarrow \mathbb{C}^n$)

V spazio vettoriale euclideo complesso
$\varphi \in \operatorname{End} V$ operatore hermitiano
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle \varphi(v), w\rangle = \langle v, \varphi(w)\rangle$, $\forall\, v, w \in V$

Note: 1) $\varphi \in \operatorname{End} V$ operatore hermitiano
$\Leftrightarrow \exists\, B$ base ortonorm. ord. di V t.c. $M(\varphi_B)$ mat. hermit.
$\Leftrightarrow \forall\, B$ base ortonorm. ord. di V si ha $M(\varphi_B)$ mat. hermit.
2) $\varphi \in \operatorname{End} \mathbb{C}^n$ operatore hermitiano
$\Leftrightarrow \varphi(x) = M \cdot x$ con $M \in M_{n,n}\mathbb{C}$ matrice hermitiana

Prop. $\varphi \in \operatorname{End} V$ oper. hermitiano con V spazio vett. eucl. compl.
$\Rightarrow$ tutti gli autovalori $k_1, \ldots, k_n$ di φ sono reali
cioè $\operatorname{sp}\varphi \overset{\text{def}}{=\!=} \{k_1, \ldots, k_n\} \subset \mathbb{R}$ (spettro di φ)

Dim. $V = \mathbb{C}^n$, $\varphi(x) = M \cdot x$ con M matrice hermitiana
$k \in \mathbb{C}$ autovalore di φ
$\rightsquigarrow z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tale che $M \cdot z = k\, z$ e $\overline{M} \cdot \bar{z} = \bar{k}\, \bar{z}$
$\Rightarrow \bar{z}^* \cdot M \cdot z = k \sum_i |z_i|^2$ e $z^* \cdot \overline{M} \cdot \bar{z} = \bar{k} \sum_i |z_i|^2$
$\Rightarrow k = \bar{k} \Rightarrow k \in \mathbb{R}$

Teorema spettrale

$\varphi \in \operatorname{End} V$ oper. hermitiano con V spazio vett. eucl. complesso
$\Rightarrow \exists\, B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonormale ordinata di V tale che
$M(\varphi_B) = \operatorname{Diag}(k_1, \ldots, k_n)$ $(\varphi(v_i) = k_i\, v_i\ \forall\, i = 1, \ldots, n)$

Dim. come nel caso reale

Corol. $\varphi \in \operatorname{End} V$ oper. hermitiano con V spazio vett. eucl. compl.
$\Rightarrow V = \oplus_{k \,\in\, \operatorname{sp}\varphi} V_k$ con $V_k \perp V_{k'}$ per ogni $k \neq k'$ autovalori