$\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ campo (*in particolare* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$V = (V, + : V \times V \to V, \cdot : \mathbb{K} \times V \to V)$
<u>spazio vettoriale</u> su $\mathbb{K}$ (o $\mathbb{K}$-spazio vettoriale)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) (V,+) gruppo commutativo con elemento neutro 0_V
cioè: 1a) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3, \forall v_1, v_2, v_3 \in V$
1b) $v + 0_V = u = 0_V + v, \forall v \in V$
1c) $\forall v \in V \; \exists \bar{v} \in V$ t.c. $v + \bar{v} = 0_V = \bar{v} + v$
1d) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1, \forall v_1, v_2 \in V$
2) $a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2, \forall a \in \mathbb{K} \; \forall v_1, v_2 \in V$
3) $(a_1 + a_2) \cdot v = a_1 \cdot v + a_2 \cdot v, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K} \; \forall v \in V$
4) $(a_1 \cdot a_2) \cdot v = a_1 \cdot (a_2 \cdot v), \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K} \; \forall v \in V$
5) $1_{\mathbb{K}} \cdot v = v, \forall v \in V$

<u>Note</u>: 1) 0_V e $-v = \bar{v}$ (opposto di v) sono unici
2) $a \cdot 0_V = 0_V$ per ogni $a \in \mathbb{K}$
3) $0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_V$ per ogni $v \in V$
4) $(-1)_{\mathbb{K}} \cdot v = -v$ per ogni $v \in V$

<u>Esempi</u>: 1) V = *insieme dei vettori liberi del piano/spazio con le operazioni geometriche* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
2) $\mathbb{K}^n$ con le operazioni definite per componenti
↳ <u>$\mathbb{K}$-spazio vettoriale numerico</u>
3) $\mathbb{K}[x]$ = *insieme dei polinomi in* x a coeff. *in* $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}$-spazio vett. con le operazioni usuali

$U \subset V$ <u>sottospazio vettoriale</u> (su $\mathbb{K}$)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ U è uno spazio vett. con le operaz. di V ristrette a U
$\Longleftrightarrow U \neq \varnothing$ e 1) $v_1, v_2 \in U \Rightarrow v_1 + v_2 \in U$
2) $a \in \mathbb{K}, v \in U \Rightarrow a\,v \in U$

<u>Esempi</u>: 1) π piano nello spazio $\rightsquigarrow V(\pi) \subset V(\text{spazio})$
2) $\mathbb{K}^m \subset \mathbb{K}^n$ $((x_1, \ldots, x_m) \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0))$
3) $\mathbb{K}[x]_m \subset \mathbb{K}[x]$ polinomi di grado $\leq m$
4) $V \subset V$ e $\{0_V\} \subset V$ (sottospazio nullo)

$S \subset V$ sottoinsieme $\rightsquigarrow \langle S \rangle$ sottospazio vett. generato da S

$\langle S \rangle \overset{\text{def}}{=\!=}$ più piccolo sottospazio vett. di V contenente S

$=$ intersezione di tutti i sottospazi vett. di V contenenti S

$= \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{K}, v_i \in S, n \geq 0\}$

combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ da intendersi $= 0_V$ per $n = 0$ ($\Rightarrow \langle \varnothing \rangle = \{0_V\}$)

Basi e dimensione

$S \subset V$ insieme di generatori $\overset{\text{def}}{\iff} V = \langle S \rangle$

V finitamente generato $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, S \subset V$ insieme finito di generatori

$v_1, \ldots, v_n \in V$ vettori linearmente dipendenti

$\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli t.c. $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V$

$\iff \exists\, v_i$ combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$

$S \subset V$ linearmente dipendente $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, v_1, \ldots, v_n \in S$ distinti lin. dip.

linearmente indipendente $\overset{\text{def}}{\iff} \nexists\, v_1, \ldots, v_n \in S$ dist. lin. dip.

$B \subset V$ base di V $\overset{\text{def}}{\iff}$ B insieme di generatori lin. indip.

$\iff$ B insieme di generatori minimale

$\iff$ B linearmente indipendente massimale

Nota: B base di $V \Leftrightarrow$ ogni vettore di V si può esprimere in modo unico come comb. lineare di vettori di B

Esempi: 1) $\varnothing$ base per lo spazio vettoriale nullo $\{0_V\}$

2) $\{v_1, v_2\}$ base per V(piano) $\Leftrightarrow v_i \neq 0_V$ non allineati

3) $\{v_1, v_2, v_3\}$ base per V(spazio) $\Leftrightarrow v_i \neq 0_V$ non compl.

4) $\{e_i = (0, \ldots, 0, 1_i, 0, \ldots, 0)\}_{i=1,\ldots,n}$ base canonica di $\mathbb{K}^n$

5) $\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$ base (infinita) di $\mathbb{K}[x]$ (non fin. gen.)

Prop. V spazio vettoriale (fin. gen.) $\Rightarrow$ esiste $B \subset V$ base di V

infatti: 1) ogni insieme di generatori contiene una base

2) ogni insieme lin. indip. è contenuto in una base

Dim. V fin. gen. $\Rightarrow \exists \{v_1, \ldots, v_n\}$ insieme finito di generatori

S ins. gen. $\rightsquigarrow B \subset S$ finito minimale che genera $v_1, \ldots, v_n$
S lin. indip. $\rightsquigarrow B = S \cup \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ con k min t.c. B gen. V

Prop. V spazio vettoriale (finitamente generato)
$\Rightarrow$ tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità

Dim. V finitamente generato $\Rightarrow$ ogni base di V è finita
$\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ basi con $n \le m$
$k \ge 0$ max t.c. $\exists \{w_1, \ldots, w_k, v_{i_{k+1}}, \ldots, v_{i_n}\}$ gen. di V
$k < n \rightsquigarrow w_{k+1} = \sum_{h \le k} a_h w_h + \sum_{h > k} b_h v_{i_h}$ con $b_j \neq 0$
$\rightsquigarrow \{w_1, \ldots, w_{k+1}, v_{i_{k+2}}, \ldots, v_{i_n}\}$ gen. di $V \rightsquigarrow$ assurdo
$k = n \Rightarrow \{w_1, \ldots, w_n\}$ gen. di $V \Rightarrow n = m$

$\dim V \overset{\text{def}}{=\!=}$ cardinalità delle basi di V
dimensione di V (come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$)

Esempi: 1) $\dim V(\text{piano}) = 2$, $\dim V(\text{spazio}) = 3$
2) $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathbb{K}[x]_n = n + 1$, $\dim \mathbb{K}[x] = \aleph_0$
3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ ($\{1, i\}$ base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vett.)
4) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \aleph_1$ ($\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$)

Corol. V spazio vett. fin. gener. $\Leftrightarrow V$ ha dim. finita ($\dim V < \infty$)
in tal caso: 1) $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ ins. di gener. $\Rightarrow n \ge \dim V$
e vale $n = \dim V \Leftrightarrow \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V
2) $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ ins. lin. indip. $\Rightarrow n \le \dim V$
e vale $n = \dim V \Leftrightarrow \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V

Corol. $U \subset V$ sottospazio vett. $\Rightarrow \dim U \le \dim V$
e vale $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$

Applicazioni lineari e isomorfismi

$\varphi : V \to W$ con V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$
applicazione lineare (omomorfismo di spazi vettoriali)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$
2) $\varphi(a\, v) = a\, \varphi(v)$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ e $v \in V$
isomorfismo (lineare) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ lineare e biiettiva

$V \cong W \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \varphi : V \to W$ isomorfismo

$\hookleftarrow$ spazi vettoriali <u>isomorfi</u>

<u>Esempi</u>: 1) $\pi_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ def. $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ lineare

2) $\varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ def. $\varphi(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$ (iso) lineare

3) $\varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ def. $\varphi(x, y) = (x + y + 1, xy)$ non lineare

4) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ def. $\varphi(z) = \overline{z}$ è $\mathbb{R}$-lineare, ma non $\mathbb{C}$-lineare

<u>Note</u>: 1) $\mathrm{id}_V : V \to V$ e $0 : V \to W$ $(v \mapsto 0_W\,, \forall\, v \in V)$ sono lineari

2) $\varphi : V \to W$ e $\psi : W \to U$ lineari $\Rightarrow \psi \circ \varphi : V \to U$ lineare

3) $\varphi : V \to W$ isomorfismo $\Rightarrow \varphi^{-1} : W \to V$ isomorfismo

$\hookrightarrow \cong$ "relazione di equivalenza" tra spazi vettoriali

<u>Prop</u>. $\varphi : V \to W$ applicazione lineare

1) $V' \subset V$ sottosp. vett. $\Rightarrow W' = \varphi(V') \subset W$ sottosp. vett.

2) $W' \subset W$ sottosp. vett. $\Rightarrow V' = \varphi^{-1}(W') \subset V$ sottosp. vett.

$\rightsquigarrow \varphi_| : V' \to W'$ applicazione lineare

<u>Dim</u>. segue immediatamente dalla definizione di appl. lineare

$\varphi : V \to W$ applicazione lineare

$\rightsquigarrow \mathrm{Im}\,\varphi \overset{\text{def}}{=\!=} \varphi(V) \subset W$ (<u>immagine</u> di φ)

$\mathrm{Ker}\,\varphi \overset{\text{def}}{=\!=} \varphi^{-1}(0_W) \subset V$ (<u>nucleo</u> di φ)

<u>Nota</u>: φ iniettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = \{0_V\}$ (suriettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = W$)

<u>Prop</u>. V, W spazi vettoriali, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V

$\forall\, w_1, \ldots, w_n \in W\ \exists!\, \varphi : V \to W$ lineare t.c. $\varphi(v_i) = w_i$

<u>Dim</u>. $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \rightsquigarrow \varphi(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$ (<u>estensione lineare</u>)

<u>Nota</u>: φ suriettiva $\Leftrightarrow \{w_1, \ldots, w_n\}$ insieme di generatori di W

φ iniettiva $\Leftrightarrow \{w_1, \ldots, w_n\}$ insieme lin. indip. in W

φ isomorfismo $\Leftrightarrow \{w_1, \ldots, w_n\}$ base di W

<u>Corol</u>. $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$ (spazi vett. sullo stesso $\mathbb{K}$)

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ordinata di $V \leftrightsquigarrow \gamma_B : V \to \mathbb{K}^n$ isomorfismo
$v \leftrightarrow \gamma_B(v) = (x_1, \ldots, x_n)$ <u>coordinate lineari</u> su V

B' altra base ordinata di $V \rightsquigarrow \gamma_{B,B'} = \gamma_{B'} \circ \gamma_B^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ isom.
$\gamma_{B,B'} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x'_1, \ldots, x'_n)$ <u>cambiamento di coordinate</u>

<u>Somma (diretta) di sottospazi</u>

$U_1, \ldots, U_n \subset V$ sottospazi vettoriali
$\rightsquigarrow U_1 \cap \ldots \cap U_n \subset V$ sottospazio vettoriale
$U_1 + \ldots + U_n \overset{\text{def}}{=\!=} \{\sum_{i=1}^n u_i \mid u_i \in U_i\} \subset V$ sottosp. vett.
(infatti si ha $U_1 + \ldots + U_n = \langle U_1 \cup \ldots \cup U_n \rangle \subset V$)

<u>Prop</u>. $U_1, U_2 \subset V$ sottospazi vettoriali di dimensione finita
$\Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$
<u>relazione di Grassmann</u>

<u>Dim</u>. $\{v_1, \ldots, v_m\}$ base di $U_1 \cap U_2$
$\rightsquigarrow \{v_1, \ldots, v_m, v'_{m+1}, \ldots, v'_{n_1}\}$ base di U_1
$\{v_1, \ldots, v_m, v''_{m+1}, \ldots, v''_{n_2}\}$ base di U_2
$\Rightarrow \{v_1, \ldots, v_m, v'_{m+1}, \ldots, v'_{n_1}, v''_{m+1}, \ldots, v''_{n_2}\}$ base di $U_1 + U_2$

<u>Corol</u>. $U_1, \ldots, U_n \subset V$ sottospazi vettoriali di dimensione finita
$\Rightarrow \dim(U_1 + \ldots + U_n) \leq \dim U_1 + \ldots + \dim U_n$
e vale $\dim(U_1 + \ldots + U_n) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_n$
$\Leftrightarrow U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1}) = \{0_V\}$ per ogni $i = 2, \ldots, n$
$\Leftrightarrow U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0_V\}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$

<u>Dim</u>. $U_1 + \ldots + U_{n-1} + U_n = (U_1 + \ldots + U_{n-1}) + U_n$
$\rightsquigarrow$ induzione su n (+ indipendenza dall'ordine)

$U_1, \ldots, U_n \subset V$ sottospazi vettoriali
<u>indipendenti</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0_V\}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$
$\rightsquigarrow U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \subset V$ <u>somma diretta</u>
<u>trasversali</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} U_1 + \ldots + U_n = V$
<u>complementari</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ indipend. e trasversali ($\Leftrightarrow V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$)

<u>Note</u>: 1) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di $V \Leftrightarrow V = \langle v_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle v_n \rangle$

2) $U_1, \ldots, U_n \subset V$ sottospazi vettoriali, B_i base di U_i

$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \Leftrightarrow B = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ base di U

3) ogni $v \in U$ ha unica espr. $v = u_1 + \ldots + u_n$ con $u_i \in U_i$

$\rightsquigarrow \pi_i : U \to U_i$ def. $\pi_i(v) = u_i$ (proiezione lineare)

<u>Prodotti e quozienti di spazi vettoriali</u>

$V_1, \ldots, V_n$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$\rightsquigarrow V_1 \times \ldots \times V_n$ spazio vettoriale <u>prodotto</u>

con operazioni definite per componenti

<u>Esempio</u>: $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$

<u>Prop</u>. $V_1, \ldots, V_n$ spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$

$\Rightarrow \dim(V_1 \times \ldots \times V_n) = \dim V_1 + \ldots + \dim V_n$

<u>Dim</u>. $\{v_1^i, \ldots, v_{m_i}^i\}$ base di $V_i \rightsquigarrow \{u_j^i\}_{j=1,\ldots,m_i}^{i=1,\ldots,n}$ base di $V_1 \times \ldots \times V_n$

con $u_j^i = (0_{V_1}, \ldots 0_{V_{i-1}}, v_j^i, 0_{V_{i+1}}, \ldots, 0_{V_n}) \in V_1 \times \ldots \times V_n$

<u>Note</u>: 1) $\pi_i : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_i$ proiezioni canoniche lineari

2) $U_i = \langle u_1^i, \ldots, u_{m_i}^i \rangle \subset V_1 \times \ldots \times V_n$ sottospazi vettoriali

tali che $\pi_{i|} : U_i \cong V_i$ e $V_1 \times \ldots \times V_n = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$

3) $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \subset V \Rightarrow U \cong U_1 \times \ldots \times U_n$ isom. definito

$u = u_1 + \ldots + u_n \leftrightarrow (u_1, \ldots, u_n)$

$U \subset V$ sottospazio vettoriale

$\rightsquigarrow v_1 \sim_U v_2 \overset{\text{def}}{\iff} v_1 - v_2 \in U$ (<u>congruenza</u> mod U)

$\rightsquigarrow [v]_U = U + v = \{u + v \mid u \in U\} \leftrightarrow U$ (<u>laterale</u> di U in V)

$\rightsquigarrow (U + v_1) + (U + v_2) = U + (v_1 + v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$

$a \cdot (U + v) = U + a \cdot v$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ e $v \in V$

$\rightsquigarrow V/U = (\{U + v \mid v \in V\}, +, \cdot)$ spazio vettoriale <u>quoziente</u>

<u>Prop</u>. V spazio vettoriale di dimensione finita

$U \subset V$ sottospazio vett. $\Rightarrow \dim V/U = \dim V - \dim U$

<u>Dim</u>. $\{v_1, \ldots, v_m\}$ base di $U \rightsquigarrow \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V

$\Rightarrow \{U + v_{m+1}, \ldots, U + v_n\}$ base di V/U

Prop. $\varphi : V \to W$ applicazione lineare

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \cong V/\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V - \dim \operatorname{Ker}\varphi$

Dim. $\varphi \rightsquigarrow \overline{\varphi} : V/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ isom. definito $\overline{\varphi}(\operatorname{Ker}\varphi + v) = \varphi(v)$

Note: 1) $\pi : V \to V/U$ proiezione canonica lineare e $\operatorname{Ker}\pi = U$

2) $\varphi : V \to W$ appl. lineare, $\varphi(v) = w \Rightarrow \varphi^{-1}(w) = \operatorname{Ker}\varphi + v$

Forme lineari e spazio duale

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$\rightsquigarrow V^* \overset{\text{def}}{=\!=} \{\lambda : V \to \mathbb{K} \mid \lambda \text{ lineare}\}$ spazio vettoriale duale con operazioni definite puntualmente

λ: forma lineare

Prop. V spazio vettoriale di dimensione finita $\Rightarrow \dim V^* = \dim V$

Dim. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di $V \rightsquigarrow \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ base duale di V^*

definita $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ $(\lambda = \sum_{i=1}^n a_i v_i^* \Leftrightarrow a_i = \lambda(v_i))$

Note: 1) $\lambda : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ forma lineare $\Leftrightarrow$

$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ con $a_i = \lambda(e_i) \in \mathbb{K}$

2) $V \cong V^*$ isomorfismo non canonico (dipende dalla base)

non vale se $\dim V = \infty$ $(\lambda \in \mathbb{K}[x]^*$ def. $\lambda(p(x)) = p(1))$

3) $\varepsilon_V : V \cong V^{**}$ appl. lineare def. $\varepsilon_V(v) : \lambda \mapsto \lambda(v)$

isomorfismo canonico se V ha dimensione finita

$\varphi : V \to W$ applicazione lineare

$\rightsquigarrow \varphi^* : W^* \to V^*$ applicazione lineare duale o trasposta

definita $\varphi^* : (\lambda : W \to \mathbb{K}) \mapsto (\varphi^*(\lambda) = \lambda \circ \varphi : V \to \mathbb{K})$

Note: 1) φ^* appl. nulla $\Leftrightarrow \varphi$ appl. nulla e $\varphi^* = \mathrm{id}_{V^*} \Leftrightarrow \varphi = \mathrm{id}_V$

2) $\varphi : V \to W$ e $\psi : W \to U \Rightarrow (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* : U^* \to V^*$

3) φ^* isom. $\Leftrightarrow \varphi$ isom. e in tal caso $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ordinata di V

$\rightsquigarrow V^* \cong (K^n)^*$ isom. def. $\lambda \leftrightarrow \lambda_B = (\gamma_B^{-1})^*(\lambda) = \lambda \circ \gamma_B^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$

λ_B: λ in coord. lineari indotte da B

Nota: B' altra base ord. di $V \rightsquigarrow \lambda_{B'} = (\gamma_{B,B'}^{-1})^*(\lambda_B) = \lambda_B \circ \gamma_{B,B'}^{-1}$

$U \subset V$ sottospazio vettoriale
$\rightsquigarrow \operatorname{Nil} U = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(U) = 0_{\mathbb{K}}\} \subset V^*$ sottospazio <u>annullatore</u> di U

<u>Note</u>: 1) $\operatorname{Nil} U \rightsquigarrow U = \cap_{\lambda \in \operatorname{Nil} U} \operatorname{Ker} \lambda$ $(\lambda \in \operatorname{Nil} U \Leftrightarrow U \subset \operatorname{Ker} \lambda)$
2) $U_1, U_2 \subset V$ sottospazi vett., $U_1 \subset U_2 \Leftrightarrow \operatorname{Nil} U_1 \supset \operatorname{Nil} U_2$
3) $U_1, \ldots, U_n \subset V$ sottospazi vettoriali
$\operatorname{Nil}(U_1 \cap \ldots \cap U_n) = \operatorname{Nil} U_1 + \ldots + \operatorname{Nil} U_n$
$\operatorname{Nil}(U_1 + \ldots + U_n) = \operatorname{Nil} U_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Nil} U_n$

<u>Prop</u>. V spazio vett. di dimensione finita, $U \subset V$ sottosp. vett.
$\Rightarrow \dim \operatorname{Nil} U = \operatorname{codim}_V U \overset{\text{def}}{=\!=} \dim V - \dim U$

<u>Dim</u>. $\{v_1, \ldots, v_m\}$ base di $U \rightsquigarrow \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V
$\rightsquigarrow \{v^*_{m+1}, \ldots, v^*_n\}$ base di $\operatorname{Nil} U$

<u>Corol</u>. $U \subset V$ sottosp. vett. di $\operatorname{codim}_V U = k \Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in V^*$
lin. indip. t.c. $U = \{v \in V \mid \lambda_1(v) = 0_{\mathbb{K}}, \ldots, \lambda_k(v) = 0_{\mathbb{K}}\}$

<u>Prop</u>. $\varphi : V \to W$ appl. lineare tra spazi vett. di dimensione finita
$\Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi^* = \operatorname{Nil}(\operatorname{Im} \varphi)$ e $\operatorname{codim}_{W^*} \operatorname{Ker} \varphi^* = \operatorname{codim}_V \operatorname{Ker} \varphi$
$\operatorname{Im} \varphi^* = \operatorname{Nil}(\operatorname{Ker} \varphi)$ e $\dim \operatorname{Im} \varphi^* = \dim \operatorname{Im} \varphi$

<u>Dim</u>. $\lambda \in \operatorname{Ker} \varphi^* \Leftrightarrow \varphi^*(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \circ \varphi = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \operatorname{Nil} \operatorname{Im} \varphi$
$\Rightarrow$ uguaglianze tra le dim $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi^* = \dim \operatorname{Nil}(\operatorname{Ker} \varphi)$
$\lambda \in \operatorname{Im} \varphi^* \Rightarrow \lambda = \mu \circ \varphi \Rightarrow \lambda(\operatorname{Ker} \varphi) = 0 \Rightarrow \lambda \in \operatorname{Nil} \operatorname{Ker} \varphi$

V spazio vettoriale di dimensione finita
$\operatorname{Nil} : \{\text{sottosp. vett. di } V\} \leftrightarrow \{\text{sottosp. vett. di } V^*\}$ <u>dualità lineare</u>
tale che $\subset \leftrightarrow \supset$, $+ \leftrightarrow \cap$, $\dim \leftrightarrow \operatorname{codim}$, $\varphi \leftrightarrow \varphi^*$, $\operatorname{Ker} \leftrightarrow \operatorname{Im}$
(biunivoca in quanto $\operatorname{Nil}(\operatorname{Nil} U) = e_V(U)$ per ogni $U \subset V$)

<u>Spazi di applicazioni lineari</u>

V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$
$\rightsquigarrow \operatorname{Hom}(V, W) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\varphi : V \to W \mid \varphi \text{ lineare}\}$
spazio vett. su $\mathbb{K}$ con operazioni definite puntualmente

<u>Nota</u>: $V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$

Prop. V e W spazi vett. di dimensione finita
$\Rightarrow \dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \dim W$

Dim. $\{v_1,\dots,v_n\}$ base di V, $\{w_1,\dots,w_m\}$ base di W
$\rightsquigarrow \{\varphi_{i,j} : v \mapsto v_j^*(v)\cdot w_i\}_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ base di $\mathrm{Hom}(V,W)$
$(\varphi = \sum_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n} a_{i,j}\,\varphi_{i,j} \Leftrightarrow a_{i,j} = w_i^*(\varphi(v_j)))$

Note: 1) $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ applicazione lineare $\Leftrightarrow$
$\varphi(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_m)$ con $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$
dove $(a_{1,j},\dots,a_{m,j}) = \varphi(e_j)\ \forall j = 1,\dots,n$
2) $\gamma_{B,B'}$ cambiamento di coordinate lineari ha questa forma con $n = m$ (+ condizione di invertibilità)

$B = (v_1,\dots,v_n)$ base ord. di V, $C = (w_1,\dots,w_m)$ base ord. di W
$\rightsquigarrow \mathrm{Hom}(V,W) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)$ isom. def. $\varphi \leftrightarrow \varphi_{B,C} = \gamma_C \circ \varphi \circ \gamma_B^{-1}$
φ in coord. lineari indotte da B e C

Nota: B', C' altre basi ord. di $U, V \rightsquigarrow \varphi_{B',C'} = \gamma_{C,C'} \circ \varphi_{B,C} \circ \gamma_{B,B'}^{-1}$

U, V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$
$\rightsquigarrow \mathrm{Hom}(U,V) \times \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(U,W)$ definita $(\varphi,\psi) \mapsto \psi \circ \varphi$

Note: 1) l'operazione di composizione non è lineare ma bilineare
cioè: $(\psi_1 + \psi_2)\circ\varphi = \psi_1\circ\varphi + \psi_2\circ\varphi$, $(a\,\psi)\circ\varphi = a(\psi\circ\varphi)$
$\psi\circ(\varphi_1+\varphi_2) = \psi\circ\varphi_1 + \psi\circ\varphi_2$, $\psi\circ(a\,\varphi) = a(\psi\circ\varphi)$
2) A, B, C basi ord. di $U, V, W \rightsquigarrow \psi_{B,C}\circ\varphi_{A,B} = (\psi\circ\varphi)_{A,C}$

Operatori lineari

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$
$\mathrm{End}\, V \overset{\text{def}}{=\!=} \mathrm{Hom}(V,V)$ spazio vett. degli operatori lineari su V
$\mathrm{Aut}\, V \overset{\text{def}}{=\!=} \{\varphi \in \mathrm{End}\, V \mid \varphi \text{ isom.}\}$ gruppo degli automorfismi di V con la composizione di appl.

Nota: $\mathrm{Aut}\, V$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}\, V$
né un gruppo rispetto alla somma puntuale $(0 \notin \mathrm{Aut}\, V)$

Esempio: $\varphi \in \mathrm{Aff}$ del piano/spazio $\Rightarrow \varphi_* \in \mathrm{Aut}\, V$(piano/spazio)

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ordinata di V

$\rightsquigarrow \operatorname{End} V \cong \operatorname{End} \mathbb{K}^n$ isom. def. $\varphi \leftrightarrow \varphi_B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varphi_{B,B} = \gamma_B \circ \varphi \circ \gamma_B^{-1}$

φ in coord. lin. indotte da B

$\rightsquigarrow \operatorname{Aut} V \cong \operatorname{Aut} \mathbb{K}^n \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ <u>gruppo lineare generale</u>

<u>Nota</u>: B' altra base ordinata di $V \rightsquigarrow \varphi_{B'} = \gamma_{B,B'} \circ \varphi_B \circ \gamma_{B,B'}^{-1}$

<u>Forme bilineari</u>

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ <u>forma bilineare</u>

$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) β lineare rispetto alla prima variabile

cioè: 1a) $\beta(v_1 + v_2, w) = \beta(v_1, w) + \beta(v_1, w)$, $\forall\, v_1, v_2, w \in V$

1b) $\beta(a\, v, w) = a\, \beta(v, w)$, $\forall\, a \in \mathbb{K}$ e $\forall\, v, w \in V$

2) β lineare rispetto alla seconda variabile

cioè: 2a) $\beta(v, w_1 + w_2) = \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2)$, $\forall\, v, w_1, w_2 \in V$

2b) $\beta(v, a\, w) = a\, \beta(v, w)$, $\forall\, a \in \mathbb{K}$ e $\forall\, v, w \in V$

<u>Esempi</u>: 1) $\lambda, \mu \in V^* \rightsquigarrow \beta(v, w) = \lambda(v) \cdot \mu(w)$ (prod. di forme lin.)

2) $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definita $\beta(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

(non è prodotto di forme lineari per $n > 1$)

3) V spazio dei vettori liberi del piano/spazio

$\beta(v, w) = \langle v, w \rangle$ (prodotto scalare)

$\rightsquigarrow \operatorname{Bil} V = \{\beta : V \times V \to \mathbb{K} \mid \beta \text{ bilineare}\}$

spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con operazioni definite puntualmente

<u>Prop</u>. V spazio vett. di dimensione finita $\Rightarrow \dim \operatorname{Bil} V = (\dim V)^2$

<u>Dim</u>. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di $V \rightsquigarrow$

$\{\beta_{i,j} : (v, w) \mapsto v_i^*(v) \cdot v_j^*(w)\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$ base di $\operatorname{Bil} V$

$(\beta = \sum_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n} a_{i,j} \beta_{i,j} \Leftrightarrow a_{i,j} = \beta(v_i, v_j))$

<u>Prop</u>. V spazio vett. di dimensione finita $\Rightarrow \operatorname{Bil} V \cong \operatorname{Hom}(V, V^*)$

<u>Dim</u>. $\beta \in \operatorname{Bil} V \leftrightarrow \eta \in \operatorname{Hom}(V, V^*)$ con $\eta(v)(w) = \beta(v, w)$

(β lineare in $v \Leftrightarrow \eta$ lineare, β lineare in $w \Leftrightarrow \eta(v) \in V^*$)

<u>Nota</u>: $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ forma bilineare $\Leftrightarrow$
$\beta(x,y) = \sum_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n} a_{i,j} x_i y_j$ dove $a_{i,j} = \beta(e_i, e_j)$

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ base ordinata di V
$\rightsquigarrow \operatorname{Bil} V \cong \operatorname{Bil} \mathbb{K}^n$ isom. def. $\beta \leftrightarrow \beta_B \overset{\text{def}}{=\!=} \beta \circ (\gamma_B^{-1} \times \gamma_B^{-1})$
β in coord. lineari indotte da B
$\rightsquigarrow \operatorname{Hom}(V, V^*) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ isom. def. $\eta \leftrightarrow \eta_B \overset{\text{def}}{=\!=} (\gamma_B^{-1})^* \circ \eta \circ \gamma_B^{-1}$
η in coord. lineari indotte da B

<u>Nota</u>: B' altra base ordinata di $V \rightsquigarrow \beta_{B'} = \beta_B \circ (\gamma_{B,B'}^{-1} \times \gamma_{B,B'}^{-1})$
$\eta_{B'} = (\gamma_{B,B'}^{-1})^* \circ \eta_B \circ \gamma_{B,B'}^{-1}$

$\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ forma bilineare
<u>simmetrica</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \beta(w,v) = \beta(v,w) \ \forall\, v,w \in V$
<u>antisimmetrica</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \beta(w,v) = -\beta(v,w) \ \forall\, v,w \in V$

<u>Nota</u>: 1) $\operatorname{Bil}^{\text{sim}} V, \operatorname{Bil}^{\text{antisim}} V \subset \operatorname{Bil} V$ sottosp. vettoriali
2) $\operatorname{Bil} V = \operatorname{Bil}^{\text{sim}} V \oplus \operatorname{Bil}^{\text{antisim}} V \subset \operatorname{Bil} V$ se $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$

$\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ forma bilineare simmetrica
$\rightsquigarrow \alpha : V \to \mathbb{K}$ definita $\alpha(v) = \beta(v,v) \ \forall\, v \in V$
<u>forma quadratica</u> associata a β

<u>Nota</u>: α forma quadratica associata a β
$\Rightarrow$ 1) $\alpha(v+w) = \alpha(v) + \alpha(w) + 2\beta(v,w) \ \forall\, v,w \in V$
2) $\alpha(a\,v) = a^2 \alpha(v) \ \forall\, a \in \mathbb{K}\ \forall\, v \in V$
$\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2 \Rightarrow$ 1) β è univocamente determinata da α
forma (bilin. simm.) <u>polare</u> di α
2) $\beta(v,w) = 0\ \forall\, v,w \in V \Leftrightarrow \alpha(v) = 0\ \forall\, v \in V$