V *spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ (*in particolare* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$\rightsquigarrow P = P(V) \overset{\text{def}}{=\!=} \{R \subset V$ *sottosp. vett. con* $\dim R = 1\}$

spazio proiettivo su V

$\dim P \overset{\text{def}}{=\!=} \dim V - 1$ *dimensione* di P come spazio proiettivo

($\dim P = 1 \leftrightsquigarrow$ *retta proiettiva*, $\dim P = 2 \leftrightsquigarrow$ *piano proiettivo*)

P *spazio proiettivo reale, complesso* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Note: 1) $V = \{0_V\} \rightsquigarrow P(V) = \varnothing$ spazio proiettivo con $\dim \varnothing = -1$

2) $P(V) \leftrightarrow (V - \{0_V\})/\sim$ con $\sim$ relazione di equiv. definita

$v \sim w \Leftrightarrow$ esiste $k \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che $w = k\,v$

(corrisp. biuniv. definita $\langle v \rangle \leftrightarrow [v] = \langle v \rangle - \{0_V\}\ \forall\, v \neq 0_V$)

Esempi: 1) $P = \{$rette dello spazio euclideo uscenti da $p_0\}$

piano proiettivo reale (dei raggi di vista da $p_0 =$ oss.)

2) $P^n(\mathbb{K}) \overset{\text{def}}{=\!=} P(\mathbb{K}^{n+1})$ *sp. proiett. numerico* di dim n su $\mathbb{K}$

$L \subset P = P(V)$ *sottospazio proiettivo*

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} L = P(U)$ con $U \subset V$ sottospazio vettoriale

iperpiano proiettivo $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{codim}_P L \overset{\text{def}}{=\!=} \dim P - \dim L = 1$

Note: 1) $L_1 \subset L_2 \subset P$ sottospazi proiettivi $\Rightarrow \dim L_1 \leq \dim L_2$

(e $\dim L_1 = \dim L_2$ se e solo se $L_1 = L_2$)

2) $L_1, L_2 \subset P$ sottospazi proiettivi con $L_i = P(U_i)\,,\ U_i \subset V$

$\rightsquigarrow L_1 \cap L_2$ sottospazio proiettivo $(L_1 \cap L_2 = P(U_1 \cap U_2))$

$L_1 + L_2 \overset{\text{def}}{=\!=} P(U_1 + U_2)$ sottospazio proiettivo

Esempi: 1) $L = \{$rette dello sp. eucl. uscenti da p_0 contenute in $\pi\}$

retta proiettiva (per esempio la linea di orizzonte)

2) $L \subset P^n(\mathbb{K})$ sottospazio proiettivo di dimensione k

$\Leftrightarrow L = \{[x] \in P^n(\mathbb{K}) \mid A \cdot x = 0\}$

con $A \in M_{n-k,n+1}\mathbb{K}\,,\ \operatorname{rg} A = n - k$

$\Leftrightarrow L = \{[x] \in P^n(\mathbb{K}) \mid x = M \cdot t\,,\ t \in \mathbb{K}^{k+1} - \{0\}\}$

con $M \in M_{n+1,k+1}\mathbb{K}\,,\ \operatorname{rg} M = k + 1$

3) $H_i = \{[x_0, \ldots, x_n] \in P^n(\mathbb{K}) \mid x_i = 0\}$ *iperpiano coord.*

$S \subset P = P(V)$ sottoinsieme $\rightsquigarrow \langle S \rangle_{\mathrm{Pro}}$ <u>sottosp. proiett. generato</u> da S

$\langle S \rangle_{\mathrm{Pro}} \overset{\text{def}}{=\!=}$ più piccolo sottospazio proiettivo di P contenente S

$=\!=$ *intersezione di tutti i sottosp. proiett. di* P *contenenti* S

$=\!=$ $P(U)$ con $U = \langle \{ v \in V \mid [v] \in S \} \rangle \subset V$

<u>Note</u>: 1) $L_1, L_2 \subset P$ sottospazi proiettivi $\Rightarrow L_1 + L_2 = \langle L_1 \cup L_2 \rangle_{\mathrm{Pro}}$

2) $\nexists$ ordine sulle rette proiett. reali $\rightsquigarrow \nexists$ segmenti/semispazi

<u>Prop</u>. P spazio proiettivo, $L_1, L_2 \subset P$ sottospazi proiettivi

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

<u>relazione di Grassmann proiettiva</u>

<u>Dim</u>. $L_i = P(U_i) \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = \dim(U_1 + U_2) - 1$

$$= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) - 1$$

$$= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

<u>Nota</u>: la relaz. di Grassmann proiettiva vale anche se $L_1 \cap L_2 = \varnothing$

$L_1, L_2 \subset P$ sottospazi proiettivi

<u>incidenti</u> $\overset{\text{def}}{\iff} L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ e $L_i \not\subset L_j$

<u>trasversali</u> $\overset{\text{def}}{\iff} L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ e $L_1 + L_2 = P$

<u>complementari</u> $\overset{\text{def}}{\iff} L_1 \cap L_2 = \{\mathrm{p}\}$ e $L_1 + L_2 = P$

<u>sghembi</u> $\overset{\text{def}}{\iff} L_1 \cap L_2 = \varnothing$

<u>Note</u>: 1) $\dim L_1 + \dim L_2 \geq \dim P \Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$

(*due rette distinte nel piano proiettivo sono incidenti*)

2) L_1, L_2 trasversali $\Leftrightarrow \dim L_1 + \dim L_2 \geq \dim P$ e

$\dim(L_1 \cap L_2)$ è minima possibile

<u>Applicazioni proiettive</u>

$\varphi : P \to Q$ con $P = P(V), Q = P(W)$ spazi proiettivi su $\mathbb{K}$

<u>applicazione proiettiva</u> $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \varphi_\# : V \to W$ appl. lineare (<u>iniettiva</u>)

t.c. $\varphi([v]) = [\varphi_\#(v)]\ \forall\, v \in V - \{0_V\}$

<u>isomorfismo proiettivo</u> $\overset{\text{def}}{\iff} \varphi_\#$ isomorfismo

<u>Nota</u>: $\varphi_\#$ è determinata a meno di fattore $k \in \mathbb{K} - \{0\}$

$P \cong Q \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \varphi : P \to Q$ isomorfismo proiettivo
↳ spazi proiettivi isomorfi

Note: 1) $\mathrm{id}_P : P \to P$ isomorfismo proiettivo
2) $\varphi : P \to Q$ e $\psi : Q \to R$ proiett. $\Rightarrow \psi \circ \varphi : P \to R$ proiett.
3) $\varphi : P \to Q$ isom. proiett. $\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1} : Q \to P$ isom. proiett.
↳ $\cong$ "relazione di equivalenza" tra spazi proiettivi

Prop. $P = P(V)$, $Q = P(W)$ spazi proiettivi su $\mathbb{K}$
$\forall\, \psi : V \to W$ applicazione lineare iniettiva
$\exists!\, \varphi = P(\psi) : P \to Q$ applicazione proiettiva t.c. $\varphi_\# = \psi$

Dim. $\varphi([v]) = [\psi(v)]$ per ogni $v \in V - \{0_V\}$ ($\Rightarrow \psi(v) \neq 0_W$)

Corol. $P \cong Q \Leftrightarrow \dim P = \dim Q$ (spazi proiettivi sullo stesso $\mathbb{K}$)

Note: 1) $\exists\, \varphi : P \to Q$ applicazione proiettiva $\Leftrightarrow \dim P \leq \dim Q$
2) $\varphi : P^n(\mathbb{K}) \to P^m(\mathbb{K})$ applicazione proiettiva
$\Leftrightarrow \varphi([x]) = [M \cdot x]$ con $M \in M_{m+1,n+1}\mathbb{K}$ e $\mathrm{rg}\, M = n+1$
3) M def. a meno di fatt. $k \in \mathbb{K} - \{0\}$ ($[M \cdot x] = [k\, M \cdot x]$)

Prop. $\varphi : P \to Q$ applicazione proiettiva
1) $P' \subset P$ sottosp. pro. $\Rightarrow Q' = \varphi(P') \subset Q$ sottosp. pro.
2) $Q' \subset Q$ sottosp. pro. $\Rightarrow P' = \varphi^{-1}(Q') \subset P$ sottosp. pro.
$\rightsquigarrow \varphi_| : P' \to Q'$ appl. proiettiva (isom. nel primo caso)

Dim. 1) $P' = P(U') \Rightarrow Q' = P(\varphi_\#(U'))$, $\varphi_{\#|} : U' \to \varphi_\#(U')$ isom.
2) $Q' = P(U') \Rightarrow P' = P(\varphi_\#^{-1}(U'))$, $\varphi_{\#|} : \varphi_\#^{-1}(U') \to U'$ lin.

Trasformazioni proiettive

$P = P(V)$ spazio proiettivo su $\mathbb{K}$

$\mathrm{Pro}\, P \overset{\text{def}}{=} (\{\varphi : P \to P \mid \varphi \text{ isomorfismo proiettivo}\}, \circ)$
↳ gruppo delle proiettività di P

Prop. $\Phi : \mathrm{Aut}\, V \to \mathrm{Pro}\, P$ def. $\psi \mapsto \varphi = P(\psi)$ omomorf. di gruppi
tale che $\ker \Phi = \mathrm{Dil}_0\, V = \{k\, \mathrm{id}_V : v \mapsto k\, v \mid k \in \mathbb{K} - \{0\}\}$

Dim. $\psi \in \mathrm{Dil}_0 V \Rightarrow \varphi([v]) = [k\,v] = [v] \ \forall\, [v] \in P \Rightarrow \varphi = \mathrm{id}_P$

$\varphi = \mathrm{id}_P \Rightarrow \psi(v) = k_v\, v \ \forall\, v \in V \Rightarrow k_{v_1} = k_{v_2} \ \forall\, v_1, v_2 \in V$

$\rightsquigarrow \psi(v) = k\, v \ \forall\, v \in V \Rightarrow \psi \in \mathrm{Dil}_0 V$

Corol. $P = P(V)$ spazio proiettivo $\Rightarrow \mathrm{Pro}\, P \cong \mathrm{Aut}\, V / \mathrm{Dil}_0 V$

Dualità proiettiva

$P = P(V)$ spazio proiettivo di dimensione $n < \infty$ su $\mathbb{K}$

$\rightsquigarrow P^* = P(V^*)$ spazio proiettivo duale

Nota: $\dim V = \dim V^* \Rightarrow \dim P = \dim P^* \Rightarrow P^* \cong P$

dualità lineare su $V \rightsquigarrow$ dualità proiettiva su $P = P(V)$

$\{$sottosp. proiett. di $P\} \leftrightarrow \{$sottosp. proiett. di $P^*\}$

corrisp. biunivoca definita $L = P(U) \subset P \leftrightarrow L' = P(\mathrm{Nil}\, U) \subset P^*$

$\mathrm{Pro}\, P \leftrightarrow \mathrm{Pro}\, P^*$ isom. di gruppi definito $\varphi \leftrightarrow \varphi' \Leftrightarrow (\varphi')_\# = (\varphi_\#^{-1})^*$

t.c. 1) $\dim L' = \mathrm{codim}_P\, L - 1$, $\forall\, L \subset P$ sottospazio proiettivo

2) $L_1 \subset L_2 \Leftrightarrow L_2' \subset L_1'$, $\forall\, L_1, L_2 \subset P$ sottospazi proiettivi

3) $(L_1 + L_2)' = L_1' \cap L_2'$, $\forall\, L_1, L_2 \subset P$ sottospazi proiettivi

4) $(L_1 \cap L_2)' = L_1' + L_2'$, $\forall\, L_1, L_2 \subset P$ sottospazi proiettivi

5) $\varphi(L)' = \varphi'(L')$, $\forall\, \varphi \in \mathrm{Pro}\, P$, $\forall\, L \subset P$ sottospazio proiettivo

Note: 1) $\{$iperpiani di $P\} \leftrightarrow P^*$ corrisp. biounivoca definita

$H \subset P$ iperpiano $\leftrightarrow H' = [\lambda] \in P^*$ tale che $H = P(\ker \lambda)$

2) $L' \subset P^*$ sottosp. proiett. $\leftrightsquigarrow$ sistema linerare di iperpiani

(fascio se $\dim L' = 1$)

Esempi: 1) $L \subset P$ sottospazio $\leftrightarrow L' = \{[\lambda] \in P^* \mid L \subset P(\ker \lambda)\}$

$\leftrightarrow \{H \subset P \text{ iperpiano} \mid L \subset H\}$

sistema lin. degli iperp. per L

2) $\mathrm{codim}_P\, L = 2 \Rightarrow \dim L' = 1 \rightsquigarrow$ fascio degli iperp. per L

Nota: E enunciato proiettivo $\rightsquigarrow E^*$ enunciato duale

(E^* ottenuto da E con $\dim \leftrightarrow \mathrm{codim} - 1$, $\subset \leftrightarrow \supset$, $\cap \leftrightarrow +$)

E vale in ogni spazio pro. $\Leftrightarrow E^*$ vale in ogni spazio pro.

Spazi proiettivi e spazi affini

$P = P(V)$ spazio proiettivo, $H = P(U) \subset P$ iperpiano
$\rightsquigarrow A = P - H \leftrightarrow L$ per ogni $L \subset V$ laterale di U con $L \neq U$
corrisp. biuniv. definita $p = [v] \leftrightarrow v_L \in [v] \cap L$
$\rightsquigarrow A = P - H$ spazio affine su U t.c. $A \leftrightarrow L$ isomorfismo affine
$(p = [v]\,, q = [w] \ \rightsquigarrow\ \overrightarrow{pq} \overset{\text{def}}{=\!=} \overrightarrow{v_L w_L} = w_L - v_L)$

Note: 1) la struttura affine indotta su $A = P - H$ non dipende da L a meno di un fattore $k \in \mathbb{K} - \{0\}$ (teor. di Talete)
2) $\dim A = \dim U = \dim V - 1 = \dim P$

Prop. $P = P(V)$ sp. proiett., $H = P(U) \subset P$ iperpiano, $A = P - H$
$\{P' \subset P$ sottosp. pro. $\mid P' \not\subset H\} \leftrightarrow \{A' \subset A$ sottosp. aff.$\}$
corrisp. biuniv. def. $P' \leftrightarrow A' = P' \cap A$ t.c. $\dim A' = \dim P'$
$P'_1 \subset P'_2 \Leftrightarrow A'_1 \subset A'_2\,,\ P'_1 \cap P'_2 \leftrightarrow A'_1 \cap A'_2\,,\ P'_1 + P'_2 \leftrightarrow \langle A'_1 \cup A'_2 \rangle_{\text{Aff}}$

Dim. $L \subset V$ laterale di U con $L \neq U$
$P' = P(V') \Rightarrow L' = V' \cap L \subset L$ sottospazio affine
$\Rightarrow A' = P' \cap A \subset A$ sottospazio affine
$A' \subset A$ sottospazio affine $\rightsquigarrow L' \subset L$ sottospazio affine
$\rightsquigarrow P' = P(V' = \langle L' \rangle)$ unico sottosp. proiett. t.c. $P' \cap A = A'$
$\operatorname{Dir} A' = \operatorname{Dir} L' = V' \cap U \Rightarrow \dim A' = \dim V' - 1 = \dim P'$
le altre proprietà seguono dalle def. (attenzione: $P'_1 \cap P'_2 \not\subset H$)

Note: 1) $H' = P' \cap H \subset P'$ iperpiano proiettivo $\rightsquigarrow A' = P' - H'$
$A' \subset A$ e $A' \subset P'$ inducono la stessa strutt. affine su A'
2) $A'_1 \parallel A'_2$ in $A \Leftrightarrow H'_i \subset H'_j$ $(H' = P(V' \cap U) = P(\operatorname{Dir} A'))$
3) $\{$rette di P per $p \in H\} \leftrightarrow \{$rette di A con $\operatorname{Dir} = p \subset U\}$
(P piano proiett. $\rightsquigarrow$ fascio (improprio) di rette parallele)

Prop. $P = P(V)$ sp. proiett., $H = P(U) \subset P$ iperpiano, $A = P - H$
$\operatorname{Pro}_H P = \{\varphi \in \operatorname{Pro} P \mid \varphi(H) = H\} \leftrightarrow \operatorname{Aff} A$
isom. di gruppi definito $\varphi : P \to P \ \leftrightarrow\ \varphi_{|A} : A \to A$

Dim. $\varphi \in \operatorname{Pro}_H P \rightsquigarrow \varphi_\# \in \operatorname{Aut} V$ unica $\varphi_\#$ t.c. $\varphi_\#(L) = L$
$\rightsquigarrow \varphi_{\#|L} \in \operatorname{Aff} L \Rightarrow \varphi_{|A} \in \operatorname{Aff} A$

$$\psi \in \operatorname{Aff} A \rightsquigarrow \rho \in \operatorname{Aff} L \rightsquigarrow \sigma \in \operatorname{Aut} V \text{ t.c. } \sigma_{|L} = \rho \ \ (\sigma_{|U} = \rho_*)$$
$$\rightsquigarrow \varphi = P(\sigma) \in \operatorname{Pro}_H P \text{ unica proiett. t.c. } \varphi_{|A} = \psi$$

A spazio affine su V spazio vett. su $\mathbb{K}$

$\rightsquigarrow \widetilde{A} \overset{\text{def}}{=\!=} P(\mathbb{K} \times V)$ <u>completamento proiettivo</u> di A ($\dim \widetilde{A} = \dim A$)

$A_\infty \overset{\text{def}}{=\!=} P(\{0\} \times V) \subset \widetilde{A}$ <u>iperpiano all'∞</u> (<u>punti impropri</u> di A)

$A \leftrightarrow \{1\} \times V \leftrightarrow \widetilde{A} - A_\infty$ isom. affine (def. a meno di trasl.)

$\rightsquigarrow \widetilde{A} = A \cup A_\infty$ (identificando A con $\widetilde{A} - A_\infty$)

<u>Note</u>: 1) $A_\infty \leftrightarrow \{$direzioni di $A\} = \{$fasci di rette parallele in $A\}$

2) $A' \subset A$ sottosp. aff. $\rightsquigarrow \widetilde{A}' \subset \widetilde{A}$ sottosp. pro. ($A'_\infty = \widetilde{A}' \cap A_\infty$)

3) $\varphi \in \operatorname{Aff} A \rightsquigarrow \widetilde{\varphi} \in \operatorname{Pro} \widetilde{A}$ tale che $\widetilde{\varphi}(A_\infty) = A_\infty$

<u>Esempio</u>: $P^n(\mathbb{K})$ completamento proiettivo di $A^n(\mathbb{K})$

$A^n(\mathbb{K})_\infty = \{[(0,x)] \mid x \in \mathbb{K}^n\}$ (punti impropri)

$A^n(\mathbb{K}) \subset P^n(\mathbb{K})$ ($x \leftrightarrow [\widetilde{x}] = [(1,x)]$ punti propri)

<u>Teorema di Desargues</u>

P spazio proiettivo

$p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3 \in P$ punti distinti

$R_1, R_2, R_3, R'_1, R'_2, R'_3 \subset P$ rette distinte

$p_i, p_j \in R_k$ e $p'_i, p'_j \in R'_k$ per ogni i, j, k tutti distinti

$q_i = R_i \cap R'_i$, $S_i = \langle p_i, p'_i \rangle_{\text{Pro}}$ per ogni $i = 1, 2, 3$

q_1, q_2, q_3 allineati $\Leftrightarrow S_1, S_2, S_3$ passano per uno stesso punto

<u>Dim</u>. $\Leftarrow$) $p \in P$ (unico) punto per cui passano S_1, S_2, S_3

$H \subset P$ iperpiano tale che $q_1, q_2 \in H$

se H contiene una retta R_i, R'_i o S_i allora $q_3 \in H$

altrimenti in $A = P - H$ si ha (trascurando $\cap A$)

$S_1 \parallel S_2 \parallel S_3$ (se $p \in H$) o $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \varnothing$ (se $p \notin H$)

$R_1 \parallel R'_1, R_2 \parallel R'_2 \Rightarrow R_3 \parallel R'_3$ (teor. di Desargues affine)

$\Rightarrow q_3 \in H \Rightarrow q_1, q_2, q_3$ allineati (per l'arbitrarietà di H)

$\Rightarrow$) $q_1, q_2, q_3 \in R \subset P$ retta $\rightsquigarrow L = R + R_1 + R'_1 \subset P$

L contiene tutta la configurazione e $\dim L = 2, 3$

$\dim L = 2 \rightsquigarrow$ le implicazioni $\Leftarrow$ e $\Rightarrow$ sono duali

$\dim L = 3 \rightsquigarrow L_i = R_i + R'_i \subset L$ piani t.c. $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing$

Riferimenti proiettivi

$P = P(V)$ spazio proiettivo su $\mathbb{K}$
$p_0 = [v_0], \ldots, p_n = [v_n] \in P$ proiettivamente indipendenti
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $v_0, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti in V
$\iff \dim\langle p_0, \ldots, p_n\rangle_{\text{Pro}} = n \;\; (\langle p_0, \ldots, p_n\rangle_{\text{Pro}} = P(\langle v_0, \ldots, v_n\rangle))$
$\iff p_i \notin \langle p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n\rangle_{\text{Pro}}, \; \forall\, i = 1, \ldots, n$

Note: 1) $p_0, \ldots, p_n \in P$ proiettiv. indipendenti $\Rightarrow n \leq \dim P$
$\langle p_0, \ldots, p_n\rangle_{\text{Pro}}$ unico sottosp. pro. n-dim. conten. $p_0, \ldots, p_n$
2) $p_0, \ldots, p_n \in A = P - H$ con $H \subset P$ iperpiano
$p_0, \ldots, p_n$ aff. indip. in $A \Leftrightarrow p_0, \ldots, p_n$ pro. indip. in P

Esempi: 1) p_0, p_1 proiettivamente indipendenti $\Leftrightarrow$ distinti
$\langle p_0, p_1\rangle_{\text{Pro}} =$ retta proiettiva passante per p_0 e p_1
2) p_0, p_1, p_2 proiettivamente indipendenti $\Leftrightarrow$ non allineati
$\langle p_0, p_1, p_2\rangle_{\text{Pro}} =$ piano proiettivo passante per p_0, p_1 e p_2
3) p_0, p_1, p_2, p_3 proiettiv. indipend. $\Leftrightarrow$ non complanari

$S \subset P$ sottoinsieme in posizione generale
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $p_0, \ldots, p_n$ proiett. indip. $\forall\, p_0, \ldots, p_n \in S$ distinti con $n \leq \dim P$

Prop. $P = P(V)\,, Q = P(W)$ spazi proiettivi di dim. $n < \infty$ su $\mathbb{K}$
$\{p_0, \ldots, p_{n+1}\} \subset P$ e $\{q_0, \ldots, q_{n+1}\} \subset Q$ in posizione generale
$\Rightarrow \exists!\, \varphi : P \to Q$ isomorfismo proiettivo t.c. $\varphi(p_i) = q_i$

Dim. $\{p_i = [v_i]\}_{i=0,\ldots,n+1}$ e $\{q_i = [w_i]\}_{i=0,\ldots,n+1}$ in pos. gen.
$\Rightarrow \{v_0, \ldots v_n\}$ base di V e $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n a_i v_i$ con $a_i \in \mathbb{K} - \{0\}$
$\{w_0, \ldots w_n\}$ base di V e $w_{n+1} = \sum_{i=0}^n b_i w_i$ con $b_i \in \mathbb{K} - \{0\}$
$\rightsquigarrow \varphi : P \to Q$ unico isomorfismo proiettivo
tale che $\varphi_\#(a_i v_i) = b_i w_i$ per ogni $i = 0, \ldots, n$

$P = P(V)$ spazio proiettivo di dimensione $n < \infty$ su $\mathbb{K}$

$\{p_0, \ldots, p_n, p_{n+1}\} \subset P$ in posizione generale
$\rightsquigarrow R = ((p_0, \ldots, p_n), p_{n+1})$ riferimento proiettivo
con punti base $p_0, \ldots, p_n$ e punto unità p_{n+1}

$\rightsquigarrow p_i = [v_i]$ t.c. $B = (v_0, \dots, v_n)$ base ordinata di V, $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n v_i$
$(v_0, \dots, v_n, v_{n+1}$ univoc. determ. a meno di fattore $k \in \mathbb{K} - \{0\})$
$\rightsquigarrow \gamma_R = P(\gamma_B) : P \to P^n(\mathbb{K})$ isom. pro. (coord. proiettive/omogenee)
$(\gamma_R$ univoc. determ. da R, $\gamma_R(p_i) = [e_i]$ e $\gamma_R(p_{n+1}) = [1, \dots, 1])$

Note: 1) $R = (B, U)$ e $R' = (B', U')$ riferimenti proiettivi su P
$\rightsquigarrow \gamma_{R,R'} = \gamma_{R'} \circ \gamma_R^{-1} : [x] \mapsto [M_{B,B'} \cdot x]$
cambiamento di coordinate proiettive

2) $\varphi : P \to Q$ appl. pro., R e S riferim. proiettivi su P e Q
$\rightsquigarrow \varphi_{R,S} : P^n(\mathbb{K}) \to P^m(\mathbb{K})$ appl. pro. def. $\varphi_{R,S} = \gamma_S \circ \varphi \circ \gamma_R^{-1}$
φ in coord. pro. indotte da R e S

3) R', S' altri rif. pro. su $P, Q \rightsquigarrow \varphi_{R',S'} = \gamma_{S,S'} \circ \varphi_{R,S} \circ \gamma_{R,R'}^{-1}$

$R = ((p_0, \dots, p_n), p_{n+1})$ riferimento proiettivo su $P = P(V)$
$\rightsquigarrow p_i = [v_i] \rightsquigarrow U = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subset V \rightsquigarrow H = P(U) \subset P$ iperpiano
$\rightsquigarrow R_A = (p_0 = [v_0], B_U = (v_1, \dots, v_n))$ riferim. affine su $A = P - H$
t.c. 1) $p \in H \Leftrightarrow \gamma_R(p) = [0, x_1, \dots, x_n]$ $(H \leftrightarrow H_0 \subset P^n(\mathbb{K}))$
2) $p \in A \Rightarrow \gamma_R(p) = [x_0, \dots, x_n] \rightsquigarrow \gamma_{R_A}(p) = (x_1, \dots, x_n)/x_0$
$\gamma_{R_A}(p) = (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \gamma_R(p) = [1, x_1, \dots, x_n]$

$R = (p_0, B = (v_1, \dots, v_n))$ riferimento affine su A sp. affine su V
$\rightsquigarrow \widetilde{R} = ((p_0, \dots, p_n), p_{n+1})$ riferim. proiettivo su $\widetilde{A}$ t.c. $\widetilde{R}_A = R$
con $p_0 = [1, 0_V]$, $p_1 = [0, v_1]$, ..., $p_n = [0, v_n]$, $p_{n+1} = [1, \sum_{i=1}^n v_i]$

Equazioni di sottospazi

$P = P(V)$ spazio proiettivo di dimensione $n < \infty$ su $\mathbb{K}$
$R = ((p_0, \dots, p_n), p_{n+1})$ riferimento proiettivo
$\rightsquigarrow \gamma_R : P \to P^n(\mathbb{K}) = P(\mathbb{K}^{n+1})$ coordinate proiettive
$L \subset P$ sottosp. proiettivo $\xleftrightarrow{\gamma_R} \gamma_R(L) \subset P^n(\mathbb{K})$ sottosp. proiettivo
$\rightsquigarrow L = P(U) \leftrightarrow \gamma_R(L) = P(\gamma_{R\#}(U)) \rightsquigarrow \dim L = \dim \gamma_R(L)$

$L_1, L_2 \subset P$ sottosp. proiettivi incidenti/trasv./compl./sghembi
$\Leftrightarrow \gamma_R(L_1), \gamma_R(L_2) \subset P^n(\mathbb{K})$ incidenti/trasv./compl./sghembi

$\rightsquigarrow$ basta considerare i sottospazi proiettivi di $P^n(\mathbb{K}) = P(\mathbb{K}^{n+1})$

$p_0, p_1, \ldots, p_k \in P^n(\mathbb{K})$
$\rightsquigarrow p_0 = [v_0]\,, \ldots, p_k = [v_k]$ con $v_0, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^{n+1}$

$p_0, p_1, \ldots, p_k$ proiettivamente indipendenti
$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(v_0 \ldots v_k) = k+1$ con $v_0, \ldots, v_k \in M_{n+1,1}\mathbb{K}$

Equazione parametrica di $\langle p_0, p_1, \ldots, p_k \rangle_{\text{Pro}}$

$x = t_0 v_0 + \ldots + t_k v_k$ con $[x] = [x_0, \ldots, x_n]$ coordinate omogenee
$t_0, \ldots, t_k$ parametri non tutti nulli
$([t] = [t_0, \ldots, t_k]$ param. pro. in $P^k(\mathbb{K}))$
$\leftrightsquigarrow x = M \cdot t$ con $x = (x_0, \ldots, x_n)$ e $t = (t_0, \ldots, t_k)$ vettori colonna
$M = (v_0 \ldots v_k) \in M_{n+1,k+1}\mathbb{K}\,,\ \operatorname{rg} M = k+1$

Equazione omogenea di $\langle p_0, p_1, \ldots, p_k \rangle_{\text{Pro}}$

$\operatorname{rg}(v_0 \ldots v_k\ x) = k+1$ con $[x] = [x_0, \ldots, x_n]$ coordinate omogenee
$\leftrightsquigarrow \det M_1 = \ldots = \det M_{n-k} = 0$ con $M_1, \ldots, M_{n-k}$ orlati di $Q \subset M$
mat. quadrata con $\operatorname{rg} Q = k+1$
$\leftrightsquigarrow A \cdot x = 0$ con x vettore colonna, $A \in M_{n-k,n+1}\mathbb{K}\,,\ \operatorname{rg} A = n-k$

<u>Note</u>: 1) $L = \{[x] = [x_0, x_1, \ldots, x_n] \in P^n(\mathbb{K}) \mid A \cdot x = 0\} \subset P^n(\mathbb{K})$
$\rightsquigarrow L \cap A^n(\mathbb{K}) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in A^n(\mathbb{K}) \mid A \cdot \widetilde{x} = 0\}$
$L \cap A^n(\mathbb{K})_\infty = L \cap H_0 = \{[x] \in P^n(\mathbb{K}) \mid A \cdot x = 0\,, x_0 = 0\}$
2) $L = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in A^n(\mathbb{K}) \mid A \cdot x = B\} \subset A^n(\mathbb{K})$
$\rightsquigarrow \widetilde{L} = \{[x] = [x_0, x_1, \ldots, x_n] \in P^n(\mathbb{K}) \mid (-B|A) \cdot x = 0\}$
$$L_\infty = \widetilde{L} \cap H_0 = \left\{ [x] \in P^n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \begin{cases} x_0 = 0 \\ A \cdot (x_1, \ldots, x_n)^* = 0 \end{cases} \right\}$$

<u>Note</u>: 1) $\{$iperpiani di $P^n(\mathbb{K})\} \leftrightarrow P^n(\mathbb{K})$ corrisp. biunivoca
definita $L = \{[x] \mid \sum a_i x_i = 0\} \leftrightarrow [a_0, \ldots, a_n]$
2) $L = \{[x] \in P^n(\mathbb{K}) \mid A \cdot x = 0\} \subset P^n(\mathbb{K})$
$\rightsquigarrow (k_1 A^1 + \ldots + k_{n-k} A^{n-k}) \cdot x = 0$ con $k_i \in \mathbb{K}$ non tutti 0
equazione del sistema lineare degli iperpiani per L
$(\dim L = n-2 \rightsquigarrow (k_1 A^1 + k_2 A^2) \cdot x = 0$ equaz. fascio$)$

Proiettività in coordinate

$P = P(V)$ spazio proiettivo di dimensione $n < \infty$ su $\mathbb{K}$
$R = ((p_0, \dots, p_n), p_{n+1})$ riferimento proiettivo
$\rightsquigarrow \gamma_R : P \to P^n(\mathbb{K}) = P(\mathbb{K}^{n+1})$ coordinate proiettive
$\rightsquigarrow \operatorname{Pro} P \cong \operatorname{Pro} P^n(\mathbb{K})$ isom. def. $\varphi \leftrightarrow \varphi_R \overset{\text{def}}{=\!=} \gamma_R \circ \varphi \circ \gamma_R^{-1}$
φ in coord. omog. indotte da R

Note: 1) R' altro riferimento proiettivo $\rightsquigarrow \varphi_{R'} = \gamma_{R,R'} \circ \varphi_R \circ \gamma_{R,R'}^{-1}$
2) $\varphi : P^n(\mathbb{K}) \to P^n(\mathbb{K})$ proiettività
$\Leftrightarrow [y] = \varphi([x]) = [M \cdot x]$ con $M \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$
3) $\gamma_{R,R'}$ cambiamento di coord. omogenee ha questa forma

$\operatorname{Pro} P^n(\mathbb{K}) \cong \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K}) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})/\{k\, I_{n+1} \mid k \in \mathbb{K} - \{0\}\}$
gruppo proiettivo di grado $n+1$ su $\mathbb{K}$

Note: 1) $\mathbb{K} = \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C}) = \mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$
2) $\mathbb{K} = \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R}) = \mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{R})$ se n pari
($\nexists$ orientazioni sugli spazi proiettivi reali di dim. pari)
3) $\operatorname{Aff} A^n(\mathbb{K}) \cong \operatorname{Pro}_{H_0} P^n(\mathbb{K}) \subset \operatorname{Pro} P^n(\mathbb{K})$
$\rightsquigarrow \mathrm{A}(n, \mathbb{K}) \subset \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$ sottogruppo (non normale)
$(y = M \cdot x + C \leftrightsquigarrow [\widetilde{y}] = [\widetilde{M} \cdot \widetilde{x}]$ con $\widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C & M \end{array}\right))$

Equivalenza proiettiva

P spazio proiettivo, $X, Y \subset P$ sottoinsiemi
$X \cong_{\mathrm{Pro}} Y \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \varphi \in \operatorname{Pro} P$ tale che $Y = \varphi(X)$
X e Y proiettivamente equivalenti

Nota: $P = \widetilde{A}$ completamento proiettivo di A spazio affine
$\rightsquigarrow X \cong_{\mathrm{Aff}} Y \Rightarrow X \cong_{\mathrm{Pro}} Y$ per ogni $X, Y \subset A$
($\Leftarrow$ non vale, es. rette parallele/incidenti)

Esempi: 1) $L \cong_{\mathrm{Pro}} L' \Leftrightarrow \dim L = \dim L'$, $\forall\, L, L' \subset P$ sottosp. pro.
($\varphi \in \operatorname{Pro} P^n(\mathbb{K})$ t.c. $\varphi(L) = L'$, $\varphi([x]) = [N \cdot x]$
$L\colon x = M \cdot t \rightsquigarrow L'\colon x = (N \cdot M) \cdot t$
$L\colon A \cdot x = 0 \rightsquigarrow L'\colon (A \cdot N^{-1}) \cdot x = 0$)

2) $\{p_0, \dots, p_{n+1}\} \cong_{\mathrm{Pro}} \{q_0, \dots, q_{n+1}\}$ $\forall \{p_i\}, \{q_i\}$ in pos. gen.
(P piano proiett. $\rightsquigarrow$ quadrilat. in pos. gen. pro. equiv.)

$\mathcal{P}$ proprietà riferita ai sottoinsiemi di uno spazio proiettivo P
<u>proprietà proiettiva</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ prop. invariante per proiettività di P
(cioè: $\mathcal{P}$ vale per $X \Leftrightarrow \mathcal{P}$ vale per $\varphi(X)$ $\forall \varphi \in \mathrm{Pro}\, P$)

<u>Note</u>: 1) $\mathcal{P}$ proprietà di $X \subset P$ è proiettiva $\Leftrightarrow$ si può esprimere in termini della struttura proiettiva di P (soltanto)
2) $\mathcal{P}$ proprietà di $X \subset P$ definita in coordinate omogenee proiettiva $\Leftrightarrow$ non dip. dalla scelta del riferim. proiettivo

<u>Esempi</u>: 1) indip. pro. e pos. gen. di $X \subset P$ sono prop. proiettive
2) parallelismo di rette non è una proprietà proiettiva
3) convessità di $X \subset P$ sp. pro. reale non è prop. proiett.

<u>Quadriche proiettive</u>

P spazio proiettivo di dimensione $n < \infty$ su $\mathbb{K}$, $\mathrm{car}\, \mathbb{K} \neq 2$

$Q \subset P$ <u>quadrica</u> proiettiva
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Q ha equaz. omogenea di grado 2 in un sistema di coord. pro.
$\Longleftrightarrow$ Q ha equaz. omogenea di grado 2 in ogni sistema di coord. pro.
$\Longleftrightarrow$ Q ha equaz. omog. scalare di grado 2 in $L \subset P$ sottosp. proiett.
(Q è una <u>ipersuperficie quadrica</u> in L, $\dim Q \overset{\text{def}}{=\!=} \dim L - 1$)

$Q, Q' \subset P$ quadriche con $\dim Q = \dim Q'$
$\rightsquigarrow$ $Q \subset L$, $Q' \subset L'$ ipersuperfici quadriche con $\dim L = \dim L'$
$\rightsquigarrow$ $Q, Q' \subset L$ ipersuperfici quadriche (a meno di affinità)
$\rightsquigarrow$ basta considerare ipersuperfici quadriche

R riferimento proiettivo su P
$\rightsquigarrow$ $\gamma_R : P \to P^n(\mathbb{K}) = P(\mathbb{K}^{n+1})$ isomorfismo proiettivo
$Q \subset P$ (ipersuperf.) quadrica $\overset{\gamma_R}{\longleftrightarrow}$ $\gamma_R(Q)$ (ipersuperf.) quadrica
$Q, Q' \subset P$ (ipersup.) quadriche, $Q \cong_{\mathrm{Pro}} Q' \Leftrightarrow \gamma_R(Q) \cong_{\mathrm{Pro}} \gamma_R(Q')$
$\rightsquigarrow$ basta considerare ipersuperfici quadriche in $P^n(\mathbb{K}) = P(\mathbb{K}^{n+1})$

$Q \subset P^n(\mathbb{K})$ ipersuperficie quadrica, $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$

$\leftrightsquigarrow \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x_i x_j = 0$ equaz. omogenea con $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ non tutti 0
a meno di moltiplicazione per un fattore $k \in \mathbb{K} - \{0\}$

$\leftrightsquigarrow x^* \cdot A \cdot x = 0$ con $A \in M^{\text{sim}}_{n+1,n+1}\mathbb{K} - \{0\}$

Note: 1) $\{$ipersup. quadr. di $P^n(\mathbb{K})\} \leftrightarrow P^{n(n+3)/2}(\mathbb{K})$
corrisp. biunivoca def. $Q \leftrightarrow [(a_{i,j})_{0 \leq i \leq j \leq n}]$

2) $L \subset P^{n(n+3)/2}(\mathbb{K})$ sottospazio proiettivo $\leftrightsquigarrow$
sistema lineare di ipersup. quadr. (fascio se $\dim L = 1$)

Esempio: $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P^2(\mathbb{K})$ in posizione generale
$\rightsquigarrow \mathcal{F}$ fascio delle coniche per p_1, p_2, p_3, p_4
(passaggio per p_i = condizione lineare)
$Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}$ con $Q_1 \neq Q_2$ e $Q_i : x^* \cdot A_i \cdot x = 0$
$\rightsquigarrow \mathcal{F} = \{Q : x^* \cdot (k_1 A_1 + k_2 A_2) \cdot x = 0 \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{K}^2 - \{0\}\}$

Prop. $\operatorname{rg} A$ proprietà proiettiva di Q (indipendente dalle coord.)

Dim. $x = M \cdot x'$ con $M \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$
$\Rightarrow x^* \cdot A \cdot x = 0 \rightsquigarrow x'^* \cdot A' \cdot x' = 0$
con $A' = M^* \cdot A \cdot M \Rightarrow \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$
$A' = k\, A$ con $k \in \mathbb{K} - \{0\} \Rightarrow \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$

$\rightsquigarrow \operatorname{rg} Q \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{rg} A$ (rango della quadrica Q)

Note: 1) $1 \leq \operatorname{rg} Q \leq n+1$
Q quadr. singolare $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{rg} Q \leq n$ (degenere $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{rg} Q \leq 2$)

2) Q non sing. $\rightsquigarrow P^n(\mathbb{K}) \leftrightarrow P^n(\mathbb{K})^* \leftrightarrow \{$iperpiani di $P^n(\mathbb{K})\}$
isom. proiett. def. $p \mapsto H_p : (p^* \cdot A) \cdot x = 0$ (polarità)
t.c. $p \in H_p \Leftrightarrow p \in Q$ e $p \in H_q \Leftrightarrow q \in H_p$ per ogni p, q
($p \in Q \rightsquigarrow H_p \overset{\text{def}}{=\!=}$ iperpiano tangente a Q in p
$=\!=$ unione delle rette tangenti a Q in p)

3) Q singolare $\rightsquigarrow \operatorname{Sing} Q : A \cdot x = 0$ (sottospazio singolare)
$\operatorname{Sing} Q \subset Q$ sottosp. proiett. di $P^n(\mathbb{K})$ di dimens. $n - \operatorname{rg} Q$
Q = unione di sottosp. proiett. di $P^n(\mathbb{K})$ per $\operatorname{Sing} Q$

4) Q degenere $\Leftrightarrow$ Q = unione di due iperpiani di $P^n(\mathbb{K})$
distinti se $\operatorname{rg} Q = 2$, coincid. se $\operatorname{rg} Q = 1$

Prop. $Q \subset P^n(\mathbb{K})$ ipersuperficie quadrica, $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$
$\Rightarrow \exists\, R$ riferimento proiettivo con coordinate x tale che
Q ha equazione omogenea canonica $x^* \cdot A \cdot x = 0$
con $a_{i,j} = 0$ se $i \neq j$, $a_{i,i} = 0$ se $i \geq \operatorname{rg} Q$

Dim. $x = M \cdot x'$ t.c. $x^* \cdot A \cdot x \rightsquigarrow x'^* \cdot A' \cdot x'$ con A' diagonale
$\rightsquigarrow a_{i,j} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{i,i} = 0$ se $i \geq \operatorname{rg} Q$ ($\neq 0$ se $0 \leq i < \operatorname{rg} Q$)

$Q \subset P^n(\mathbb{R})$ ipersuperficie quadrica reale $\leftrightsquigarrow x^* \cdot A \cdot x = 0$

Prop. $\operatorname{sgn} A \overset{\text{def}}{=\!=} |\operatorname{rg} A - 2 \operatorname{pos} A| \geq 0$
proprietà proiettiva di Q (indipendente dall'equazione)

Dim. indipendenza dalle coordinate come per $\operatorname{rg} A$
$A' = k\, A$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$
$\Rightarrow \operatorname{pos} A' = \operatorname{pos} A$ o $\operatorname{rg} A - \operatorname{pos} A$ (se $k < 0$)

$\rightsquigarrow \operatorname{sgn} Q \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{sgn} A \geq 0$ (segnatura della quadrica Q)

Nota: $\operatorname{rg} Q \equiv_2 \operatorname{sgn} Q \leq \operatorname{rg} Q$

Prop. $Q \subset P^n(\mathbb{R})$ ipersuperficie quadrica reale
$\Rightarrow \exists\, R$ riferimento proiettivo con coordinate x tale che
Q ha equazione omogenea canonica $x^* \cdot A \cdot x = 0$
con $a_{i,i} = \pm 1$ per ogni $i = 0, \ldots, \operatorname{rg} Q - 1$,
univocamente determinata da $\operatorname{rg} Q$ e $\operatorname{sgn} Q$
a meno di cambiamento di segno e permutazione delle x_i

Dim. segue dalla prop. precedente e dal teorema di Sylverster

Corol. $Q\,, Q' \subset P^n(\mathbb{R})$ ipersuperfici quadriche reali
$Q \cong_{\text{Pro}} Q' \Leftrightarrow \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q'$, $\operatorname{sgn} Q = \operatorname{sgn} Q'$

Dim. $Q \cong_{\text{Pro}} Q' \Leftrightarrow$ hanno la stessa equaz. omogenea canonica

Esempi: 1) $Q \subset P^2(\mathbb{R})$ conica proiettiva reale
classificata al variare di $(\operatorname{rg} Q, \operatorname{sgn} Q)$
$(3,3) \rightsquigarrow x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (conica non sing. pt. imm.)
$(3,1) \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$ (conica non singolare)
$(2,2) \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = 0$ (rette incidenti immaginarie)
$(2,0) \rightsquigarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$ (rette incidenti)
$(1,1) \rightsquigarrow x_1^2 = 0$ (rette coincidenti)

2) $Q \subset P^3(\mathbb{R})$ quadrica proiettiva reale
classificata al variare di $(\operatorname{rg} Q, \operatorname{sgn} Q)$
$(4,4) \rightsquigarrow x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (quad. non sing. pt. imm.)
$(4,2) \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2$ (quad. non sing. ellittica)
$(4,0) \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = x_0^2$ (quad. non sing. iperbolica)
$(3,3) \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = 0$ (cono a punti immaginari)
$(3,1) \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (cono)
$(2,2) \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = 0$ (piani incidenti immaginari)
$(2,0) \rightsquigarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$ (piani incidenti)
$(1,1) \rightsquigarrow x_1^2 = 0$ (piani coincidenti)

Prop. $Q \subset P^n(\mathbb{C})$ ipersuperficie quadrica complessa
$\Rightarrow \exists\, R$ riferimento proiettivo con coordinate x tale che
Q ha equaz. omogenea canonica $x^* \cdot A \cdot x = 0$
con $a_{i,i} = 1$ per ogni $i = 0, \dots, \operatorname{rg} Q - 1$

Dim. segue dalla prop. prec. e dalla diag. delle forme bilin. compl.

Corol. $Q\,, Q' \subset P^n(\mathbb{C})$ ipersuperfici quadriche complesse
$Q \cong_{\mathrm{Pro}} Q' \Leftrightarrow \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q'$

Dim. $Q \cong_{\mathrm{Pro}} Q' \Leftrightarrow$ hanno la stessa equaz. omogenea canonica

Esempi: 1) $Q \subset P^2(\mathbb{C})$ conica proiettiva complessa
classificata al variare di $\operatorname{rg} Q$
$3 \rightsquigarrow x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (conica non singolare)
$2 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = 0$ (rette incidenti)
$1 \rightsquigarrow x_1^2 = 0$ (rette coincidenti)

2) $Q \subset P^3(\mathbb{C})$ quadrica proiettiva complessa
classificata al variare di $\operatorname{rg} Q$
$4 \rightsquigarrow x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (quadrica non singolare)
$3 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = 0$ (cono)
$2 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = 0$ (piani incidenti)
$1 \rightsquigarrow x_1^2 = 0$ (piani coincidenti)

<u>Note</u>: 1) $Q = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0\} \subset A^n(\mathbb{K})$
$\rightsquigarrow \widetilde{Q} = \{[x] = [x_0, \ldots, x_n] \mid x^* \cdot \widetilde{A} \cdot x = 0\} \subset P^n(\mathbb{K})$
<u>completamento proiettivo</u> di Q
$\widetilde{Q} = Q \cup Q_\infty$ con $Q_\infty = \widetilde{Q} \cap A^n(\mathbb{K})_\infty \subset A^n(\mathbb{K})_\infty$
<u>ipersuperficie quadrica all'infinito</u>

2) $\widetilde{Q} \subset P^n(\mathbb{K})$ non singolare
$\rightsquigarrow p_\infty \overset{\text{def}}{=\!=} \text{polo di } A^n(\mathbb{K})_\infty \begin{cases} \underline{\text{centro}} \text{ di } Q \text{ se } p_\infty \in A^n(\mathbb{K}) \\ \text{tang. tra } Q \text{ e } A^n(\mathbb{K})_\infty \text{ altrim.} \end{cases}$
unico punto $[x]$ tale che $(B^*|A) \cdot x = 0$
proprietà affine di Q, non proprietà proiettiva di $\widetilde{Q}$

3) $Q, Q' \subset A^n(\mathbb{K})$ ipersuperfici quadriche affini
$\widetilde{Q}, \widetilde{Q}' \subset P^n(\mathbb{K})$ completamenti proiettivi
$Q \cong_{\text{Aff}} Q' \Leftrightarrow \widetilde{Q} \cong_{\text{Pro}} \widetilde{Q}'$ e $Q_\infty \cong_{\text{Pro}} Q'_\infty$ (in $A^n(\mathbb{K})_\infty$)

<u>Esempi</u>: 1) $Q \subset A^2(\mathbb{R})$ conica affine reale non singolare:
Q ellisse $\Leftrightarrow Q_\infty = \varnothing$ (due punti immaginari distinti)
Q iperbole $\Leftrightarrow Q_\infty =$ due punti distinti
Q parabola $\Leftrightarrow Q_\infty =$ due punti coincid. (tang. $A^2(\mathbb{R})_\infty$)
(ellissi e iperboli sono affinemente equivalenti su $\mathbb{C}$)

2) $Q \subset A^3(\mathbb{R})$ quadrica affine reale non singolare:
Q ellissoide $\Leftrightarrow Q_\infty = \varnothing$ (conica non sing. a punti imm.)
Q iperboloide $\Leftrightarrow Q_\infty =$ conica non singolare
Q paraboloide $\Leftrightarrow Q_\infty =$ conica singolare (tang. $A^3(\mathbb{R})_\infty$)
(ellissoidi e iperboloidi sono affinemente equiv. su $\mathbb{C}$
paraboloidi ellittici e iperbolici sono affin. equiv. su $\mathbb{C}$)