Rette nel piano euclideo

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\, t \\ y = y_0 + \mu\, t \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} v = (\lambda, \mu) \neq (0,0) \text{ vettore t.c. } v \parallel r \\ P_0 = (x_0, y_0) \text{ punto di } r \end{cases}$$

equazione parametrica (con parametro t)

$$a\,x + b\,y = c \leftrightsquigarrow \begin{cases} n = (a, b) \neq (0,0) \text{ vettore t.c. } n \perp r \\ c = a\,x_0 + b\,x_0 \text{ con } P_0 = (x_0, y_0) \in r \end{cases}$$

equazione cartesiana (a, b, c a meno di fattore $k \neq 0$)

Note: 1) $v = (\lambda, \mu) \rightsquigarrow n = (-\mu, \lambda)$, $n = (a, b) \rightsquigarrow v = (-b, a)$
2) $s, s' \subset r$ semirette uscenti da $P_0 \leftrightsquigarrow t \lesseqgtr 0$
3) σ, σ' semipiani uscenti da $r \leftrightsquigarrow a\,x + b\,y \lesseqgtr c$
4) equaz. param. $\leftrightsquigarrow$ forma esplicita $\leftrightsquigarrow$ equaz. cartesiana
5) $r \cap r' \leftrightsquigarrow$ sistema + eventuale eliminazione parametri

Condizione di parallelismo (in senso debole)

$$r \parallel r' \Leftrightarrow v \parallel v' \Leftrightarrow \text{esiste } k \neq 0 \text{ t.c. } \lambda' = k\,\lambda \text{ e } \mu' = k\,\mu \Leftrightarrow \lambda\,\mu' = \lambda'\,\mu$$
$$\Leftrightarrow n \parallel n' \Leftrightarrow \text{esiste } k \neq 0 \text{ t.c. } a' = k\,a \text{ e } b' = k\,b \Leftrightarrow a\,b' = a'\,b$$

Condizione di perpendicolarità

$$r \perp r' \Leftrightarrow v \perp v' \Leftrightarrow \langle v, v' \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda\,\lambda' + \mu\,\mu' = 0$$
$$\Leftrightarrow n \perp n' \Leftrightarrow \langle n, n' \rangle = 0 \Leftrightarrow a\,a' + b\,b' = 0$$

Angolo (convesso) tra due rette (orientate)

$$\widehat{rr'} = \widehat{vv'} = \arccos((\lambda\,\lambda' + \mu\,\mu')/\sqrt{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda'^2 + \mu'^2)})$$
$$= \widehat{nn'} = \arccos((a\,a' + b\,b')/\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)})$$

Distanza punto-retta (con segno dipendente da n)

$$d(P, r) = \langle n/\|n\|, [\overrightarrow{P_0P}] \rangle = (ax_P + by_P - c)/\sqrt{a^2 + b^2}$$

Note: 1) Asse di $\overline{P_1P_2} = \{P \in \text{piano t.c. } d(P, P_1) = d(P, P_2)\}$
$\leftrightsquigarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$
2) Bisettrice di $\widehat{r_1r_2}$ (rette orientate) $\leftrightsquigarrow P_0 = r_1 \cap r_2$,
$v = v_1/\|v_1\| + v_2/\|v_2\|$, $n = n_1/\|n_1\| + n_2/\|n_2\|$

Circonferenze nel piano euclideo

$$\begin{cases} x = x_0 + r\,\cos t \\ y = y_0 + r\,\sin t \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} C = (x_0, y_0) \text{ centro} \\ r > 0 \text{ raggio} \end{cases}$$

equazione parametrica (con parametro t)

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \leftrightsquigarrow \begin{cases} C = (-a/2, -b/2) \\ r = \sqrt{(a^2 + b^2)/4 - c} \end{cases}$$

equazione cartesiana (con $c < (a^2 + b^2)/4$)

Note: 1) a, b, c sono univocamente determinati
2) circonferenza passante per tre punti non allineati
(passaggio per un punto $\leftrightsquigarrow$ condizione lineare in a, b, c)

Intersezione circonferenza-retta $\leftrightsquigarrow$ sistema di 2° grado
$\rightsquigarrow$ retta secante $(\Delta > 0)$, tangente $(\Delta = 0)$, esterna $(\Delta < 0)$

Nota: la condizione di tangenza è di 2° grado nei coefficienti
(rette/circonferenze tangenti a circonferenze/rette date)

Trasformazioni geometriche del piano

Traslazioni $v = (v_x, v_y) \rightsquigarrow \tau_v = \begin{cases} x' = x + v_x \\ y' = y + v_y \end{cases}$

Rotazioni intorno all'origine

(r, ϑ) coordinate polari $\rightsquigarrow \begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \pm\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$

$$\rho_\alpha = \begin{cases} r' = r \\ \vartheta' = \vartheta + \alpha \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Riflessioni rispetto agli assi coordinati

$$\sigma_x = \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad \sigma_y = \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Nota: le trasformazioni $\tau_v, \rho_\alpha, \sigma_y$ con $v \in V$ e $0 < \alpha < 2\pi$ generano il gruppo Iso delle isometrie del piano

Dilatazioni con centro l'origine $\delta_k = \begin{cases} x' = k\,x \\ y' = k\,y \end{cases}$

Nota: le trasformazioni $\tau_v, \rho_\alpha, \sigma_y, \delta_k$ con $v \in V$, $0 < \alpha < 2\pi$ e $k > 0$ generano il gruppo Sim delle similitudini del piano

Riscalature degli assi coordinati $\delta_{k_x,k_y} = \begin{cases} x' = k_x x \\ y' = k_y y \end{cases}$

Scorrimenti paralleli agli assi coordinati

$$\eta_{x,h} = \begin{cases} x' = x \\ y' = y + h\,x \end{cases} \qquad \eta_{y,h} = \begin{cases} x' = x + h\,y \\ y' = y \end{cases}$$

Nota: le trasformazioni $\tau_v, \rho_\alpha, \sigma_y, \delta_{1,k}, \eta_{y,k}$ con $v \in V$, $0 < \alpha < 2\pi$ e $k > 0$ generano il gruppo Aff delle affinità del piano

Cambiamenti di coordinate del piano

(x, y) coordinate cartesiane determinate da (O, U_x, U_y)

(x', y') coordinate cartesiane determinate da (O', U'_x, U'_y)

$\rightsquigarrow \varphi : P \mapsto P'$ unica affinità t.c. $\varphi(O, U_x, U_y) = (O, U'_x, U'_y)$

$\rightsquigarrow f : (x_P, y_P) \mapsto (x_{P'}, y_{P'})$ espressione di φ in coord. (x, y)

$$\rightsquigarrow \begin{cases} (x, y) = f(x', y') \\ (x', y') = f^{-1}(x, y) \end{cases} \qquad (x_P, y_P) = (x'_{P'}, y'_{P'})$$

formule di cambiamento delle coordinate

Coniche nel piano euclideo

Curve piane del 2° ordine $\leftrightsquigarrow$ equazioni di 2° grado in x, y

Esempi: 1) circonferenze $\leftrightsquigarrow x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$

2) $r \cup r' \leftrightsquigarrow (a\,x + b\,y - c)(a'x + b'y - c') = 0$

3) $x^2 + y^2 = 0 \leftrightsquigarrow \{(0, 0)\}$, $x^2 + y^2 + 1 = 0 \leftrightsquigarrow \varnothing$

<u>Ellissi</u> = luoghi dei punti del piano per cui è costante
la somma delle distanze da due punti (fuochi)

$F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ (con $a > c > 0$)
$\rightsquigarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (equazione canonica con $b^2 = a^2 - c^2$)

<u>Note</u>: 1) ellissi sono limitate (nel rettangolo $[-a, a] \times [-b, b]$)
2) a, b (lunghezze semiassi) invarianti per isometrie
a/b, $e = c/a < 1$ (eccentricità) invarianti per similitudini
$a = b$ (c = e = 0) $\leftrightsquigarrow F_1 = F_2 \leftrightsquigarrow$ circonferenza
3) $\rightsquigarrow$ classificazione delle ellissi (affine, simile, euclidea)

<u>Iperboli</u> = luoghi dei punti del piano per cui è costante
la differenza delle distanze da due punti (fuochi)

$F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ (con $0 < a < c$)
$\rightsquigarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (equazione canonica con $b^2 = c^2 - a^2$)

<u>Note</u>: 1) iperboli illimitate e non contenute in un semipiano
asintoti $x^2/a^2 - y^2/b^2 = (x/a + y/b)(x/a - y/b) = 0$
$\Rightarrow$ non affinemente equivalenti alle ellissi
2) a (semi-distanza vertici) e b invarianti per isometrie
a/b, $e = c/a > 1$ (eccentricità) invarianti per similitudini
3) $\rightsquigarrow$ classificazione delle iperboli (affine, simile, euclidea)

<u>Parabole</u> = luoghi dei punti del piano per cui sono uguali le
distanze da un punto (fuoco) e una retta (direttrice)

$F = (c, 0)$, $r : x = -c$, $d(P, F) = d(P, r)$ (con $c > 0$)
$\rightsquigarrow y^2 = 4c\,x$ (equazione canonica)

<u>Note</u>: 1) parabole illimitate, ma contenute in semipiani
$\Rightarrow$ non affinem. equiv. alle ellissi e alle iperboli
2) c (semi-distanza tra F e r) invariante per isometrie
3) $\rightsquigarrow$ classificazione delle parabole (affine, simile, euclidea)

Intersezione conica-retta $\leftrightsquigarrow$ sistema di 2° grado
$\rightsquigarrow$ retta secante ($\Delta > 0$), tangente ($\Delta = 0$), esterna ($\Delta < 0$)
(la condizione di tangenza è di 2° grado nei coefficienti)

Note: 1) coniche come sezioni piane di coni/cilindri circolari
2) significato geom. dell'eccentricità ($e = 1$ per la parabola)
e = (distanza da un fuoco)/(distanza da una direttrice)
$d(P,F) = e\, d(P,r)$ con $F = (c,0)$ e $r : x = -c/e$ per $e \neq 0$
3) esistono altre curve piane del 2° ordine?

Piani nello spazio euclideo

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \\ y = y_0 + \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 \\ z = z_0 + \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} v_i = (\lambda_i, \mu_i, \nu_i) \text{ t.c. } v_i \parallel \pi \text{ e } v_1 \nparallel v_2 \\ P_0 = (x_0, y_0, z_0) \text{ punto di } \pi \end{cases}$$

equazione parametrica (con parametri t_1, t_2)

$$a\,x + b\,y + c\,z = d \leftrightsquigarrow \begin{cases} n = (a,b,c) \neq (0,0,0) \text{ vettore t.c. } n \perp \pi \\ d = a\,x_0 + b\,x_0 + c\,z_0\ ,\ P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi \end{cases}$$

equaz. cart. (a, b, c, d a meno di fattore $k \neq 0$)

Note: 1) $v_1, v_2 \rightsquigarrow n = v_1 \times v_2$ ($n \leftrightsquigarrow$ orientazione di π)
2) semispazi uscenti da $\pi \leftrightsquigarrow a\,x + b\,y + c\,z \lesseqgtr d$
3) equaz. param. $\leftrightsquigarrow$ forma esplicita $\leftrightsquigarrow$ equaz. cartesiana
4) $\pi \cap \pi' \leftrightsquigarrow$ sistema + eventuale eliminazione parametri
($= \varnothing$ se $\pi \parallel \pi'$, piano se $\pi = \pi'$, retta altrimenti)

Condizione di parallelismo (in senso debole)
$\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow n \parallel n' \Leftrightarrow$ esiste $k \neq 0$ t.c. $a' = k\,a$, $b' = k\,b$ e $c' = k\,c$

Condizione di perpendicolarità
$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow n \perp n' \Leftrightarrow \langle n, n' \rangle = 0 \Leftrightarrow a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0$

Angolo (convesso) tra due piani (orientati)
$\widehat{\pi\pi'} = \widehat{nn'} = \arccos((a\,a' + b\,b' + c\,c')/\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)})$

Distanza punto-piano (con segno dipendente da n)
$d(P,\pi) = \langle n/\|n\|, [\overrightarrow{P_0P}]\rangle = (ax_P + by_P + cz_P - d)/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

<u>Rette nello spazio euclideo</u>

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda t \\ y = y_0 + \mu t \\ z = z_0 + \nu t \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} v = (\lambda,\mu,\nu) \neq (0,0,0) \text{ t.c. } v \parallel r \\ P_0 = (x_0,y_0,z_0) \text{ punto di } r \end{cases}$$

equazione parametrica (con parametro t)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} n_i = (a_i,b_i,c_i) \text{ t.c. } n_i \perp r \text{ e } n_1 \nparallel n_2 \\ c_i = a_ix_0 + b_ix_0 + c_iz_0\,,\ (x_0,y_0,z_0) \in r \end{cases}$$

equaz. cart. (a_i, b_i, c_i, d_i a meno di fatt. $k_i \neq 0$)

<u>Note</u>: 1) $n_1, n_2 \rightsquigarrow v = n_1 \times n_2$

2) $s, s' \subset r$ semirette uscenti da $P_0 \leftrightsquigarrow t \lesseqgtr 0$

3) equaz. param. $\leftrightsquigarrow$ forma esplicita $\leftrightsquigarrow$ equaz. cartesiana

4) $r \cap r' \leftrightsquigarrow$ sistema + eventuale eliminazione parametri
(= $\varnothing$ se r, r' sghembe (= non complanari) o parallele)

Condizioni di parallelismo (in senso debole)
$r \parallel r' \Leftrightarrow v \parallel v' \Leftrightarrow$ esiste $k \neq 0$ t.c. $\lambda' = k\,\lambda$, $\mu' = k\,\mu$ e $\nu' = k\,\nu$
$r \parallel \pi' \Leftrightarrow v \perp n' \Leftrightarrow \langle v, n'\rangle = 0 \Leftrightarrow a'\lambda + b'\mu + c'\nu = 0$

Condizioni di perpendicolarità (in senso debole)
$r \perp r' \Leftrightarrow v \perp v' \Leftrightarrow \langle v, v'\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda\,\lambda' + \mu\,\mu' + \nu\,\nu' = 0$
$r \perp \pi' \Leftrightarrow v \parallel n' \Leftrightarrow$ esiste $k \neq 0$ t.c. $a' = k\,\lambda$, $b' = k\,\mu$ e $c' = k\,\nu$

<u>Sfere nello spazio euclideo</u>

$$\begin{cases} x = x_0 + r\,\cos t_1 \cos t_2 \\ y = y_0 + r\,\sin t_1 \cos t_2 \\ z = z_0 + r\,\sin t_2 \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} C = (x_0,y_0,z_0) \text{ centro} \\ r > 0 \text{ raggio} \end{cases}$$

equazione parametrica (con parametri t_1, t_2)

$$x^2+y^2+z^2+a\,x+b\,y+c\,z+d=0 \leftrightsquigarrow \begin{cases} C=(-a/2,-b/2,-c/2) \\ r=\sqrt{(a^2+b^2+c^2)/4-d} \end{cases}$$

equazione cartesiana (con $d<(a^2+b^2+c^2)/4$)

<u>Note</u>: 1) a,b,c,d sono univocamente determinati

2) sfera passante per quattro punti non complanari (passaggio per un punto $\leftrightsquigarrow$ condiz. lineare in a,b,c,d)

Intersezione sfera-retta $\leftrightsquigarrow$ sistema di 2° grado
$\rightsquigarrow$ retta secante ($\Delta>0$), tangente ($\Delta=0$), esterna ($\Delta<0$)

Intersezione sfera-piano $\leftrightsquigarrow$ sistema di 2° grado
$\rightsquigarrow$ piano secante (circonferenza), tangente (punto), esterno ($\varnothing$)

<u>Nota</u>: le condizioni di tangenza sono di 2° grado nei coefficienti (rette-piani/sfere tangenti a sfere/rette-piani dati)

<u>Trasformazioni geometriche dello spazio</u>

<u>Traslazioni</u> $v=(v_x,v_y,v_z)\rightsquigarrow \tau_v=\begin{cases} x'=x+v_x \\ y'=y+v_y \\ z'=z+v_z \end{cases}$

<u>Rotazioni intorno agli assi</u>

(r,ϑ,z) <u>coord. cilindriche</u> $\rightsquigarrow \begin{cases} x=r\cos\vartheta \\ y=r\sin\vartheta \\ z=z \end{cases} \quad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta=\pm\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z=z \end{cases}$

$$\rho_{z,\alpha}=\begin{cases} r'=r \\ \vartheta'=\vartheta+\alpha \\ z'=z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \\ z'=z \end{cases}$$

$$\rho_{x,\alpha}=\begin{cases} x'=x \\ y'=y\cos\alpha-z\sin\alpha \\ z'=y\sin\alpha+z\cos\alpha \end{cases} \qquad \rho_{y,\alpha}=\begin{cases} x'=z\sin\alpha+x\cos\alpha \\ y'=y \\ z'=z\cos\alpha-x\sin\alpha \end{cases}$$

<u>Nota</u>: le rotazioni $\rho_{x,\pi/2}$ e $\rho_{z,\alpha}$ con $0<\alpha<2\pi$ generano le rotazioni intorno a tutte le rette per l'origine ($\rho_{y,\alpha}=\rho_{x,\pi/2}^{-1}\circ\rho_{z,\alpha}\circ\rho_{x,\pi/2}$, $\rho_{x,\alpha}=\rho_{z,\pi/2}\circ\rho_{y,\alpha}\circ\rho_{z,\pi/2}^{-1}$

(r,ϑ,φ) <u>coord. sferiche</u> $\rightsquigarrow \begin{cases} x=r\cos\vartheta\cos\varphi \\ y=r\sin\vartheta\cos\varphi \\ z=r\sin\varphi \end{cases}$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \vartheta=\pm\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2}\,) \\ \varphi=\arcsin(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,) \end{cases}$$

$$\rho_{\text{retta}(\vartheta,\varphi),\alpha}=\rho_{z,\vartheta}\circ\rho_{y,\varphi}^{-1}\circ\rho_{x,\alpha}\circ\rho_{y,\varphi}\circ\rho_{z,\vartheta}^{-1})$$

<u>Riflessioni rispetto ai piani coordinati</u>

$$\sigma_x=\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \\ z'=z \end{cases} \qquad \sigma_y=\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \\ z'=z \end{cases} \qquad \sigma_z=\begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=-z \end{cases}$$

<u>Nota</u>: le trasformazioni $\tau_v,\rho_{x,\pi/2},\rho_{z,\alpha},\sigma_z$ con $v\in V$ e $0<\alpha<2\pi$ generano il gruppo Iso delle isometrie dello spazio

<u>Dilatazioni con centro l'origine</u> $\delta_k=\begin{cases} x'=k\,x \\ y'=k\,y \\ z'=k\,z \end{cases}$

<u>Nota</u>: le trasf. $\tau_v,\rho_{x,\pi/2},\rho_{z,\alpha},\sigma_z,\delta_k$ con $v\in V$, $0<\alpha<2\pi$ e $k>0$ generano il gruppo Sim delle similitudini dello spazio

<u>Riscalature degli assi coordinati</u> $\delta_{k_x,k_y,k_z}=\begin{cases} x'=k_x x \\ y'=k_y y \\ z'=k_z z \end{cases}$

<u>Scorrimenti paralleli ai piani coordinati</u>

$$\eta_{x,v}=\begin{cases} x'=x \\ y'=y+x\,v_y \\ z'=z+x\,v_z \end{cases} \quad \eta_{y,v}=\begin{cases} x'=x+y\,v_x \\ y'=y \\ z'=z+y\,v_z \end{cases} \quad \eta_{z,v}=\begin{cases} x'=x+z\,v_x \\ y'=y+z\,v_y \\ z'=z \end{cases}$$

Nota: le trasf. $\tau_v, \rho_{x,\pi/2}, \rho_{z,\alpha}, \sigma_z, \delta_{1,1,k}, \eta_{z,(k,h)}$ con $v \in V$, $0 < \alpha < 2\pi$ e $k, h > 0$ generano il gruppo Aff delle affinità dello spazio

Cambiamenti di coordinate dello spazio

(x, y, z) coordinate cartesiane determinate da (O, U_x, U_y, U_z)
(x', y', z') coordinate cartesiane determinate da (O', U'_x, U'_y, U'_z)
$\rightsquigarrow \varphi : P \mapsto P'$ unica affinità t.c. $\varphi(O, U_x, U_y, U_z) = (O, U'_x, U'_y, U'_z)$
$\rightsquigarrow f : (x_P, y_P, z_P) \mapsto (x_{P'}, y_{P'}, z_{P'})$ espres. di φ in coord. (x, y, z)

$$\rightsquigarrow \begin{cases} (x, y, z) = f(x', y', z') \\ (x', y', z') = f^{-1}(x, y, z) \end{cases} \qquad (x_P, y_P, z_P) = (x'_{P'}, y'_{P'}, z'_{P'})$$

formule di cambiamento delle coordinate

Quadriche nello spazio euclideo

Superfici del 2° ordine $\leftrightsquigarrow$ equazioni di 2° grado in x, y, z

Esempi: 1) sfere $\leftrightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 + a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$
2) $\pi \cup \pi' \leftrightsquigarrow (a\,x + b\,y + c\,z - d)(a'x + b'y + c'\,z - d') = 0$
3) cilindri su coniche = superfici generate dalle rette uscenti da una conica contenuta in un piano parallele a una direzione trasversale al piano $(x^2 \pm y^2 = 1)$
4) coni su coniche = superfici generate dalle rette uscenti da una conica contenuta in un piano e passanti per un punto esterno al piano $(x^2 + y^2 = z^2)$

Ellissoidi = superfici generate ruotando un'ellisse intorno a un suo asse e riscalando in una direzione ortogonale

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ellisse nel piano x, y
rotazione intorno all'asse $x \rightsquigarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/b^2 = 1$
riscalatura $\rightsquigarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

Iperboloidi = superfici generate ruotando un'iperbole intorno a un suo asse e riscalando in una direzione ortogonale

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ iperbole nel piano x, y
rotazione intorno all'asse $x \rightsquigarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/b^2 = 1$
riscalatura $\rightsquigarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ (iperboloide ellittico)

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ iperbole nel piano x, y
rotazione intorno all'asse $y \rightsquigarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/a^2 = 1$
riscalatura $\rightsquigarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ (iperboloide iperbolico)

<u>Paraboloidi</u> = superfici generate traslando una parabola in modo che il suo vertice scorra lungo un'altra parabola con asse parallelo e contenuta in un piano ortogonale

$z = ax^2$ parabola nel piano x, z , $z = by^2$ parabola nel piano y, z
traslazione $\rightsquigarrow z = ax^2 + by^2$ (parab. ellittico/iperbolico se $a\,b \gtrless 0$)

Intersezione quadrica-retta $\leftrightsquigarrow$ sistema di 2° grado
$\rightsquigarrow$ retta secante $(\Delta > 0)$, tangente $(\Delta = 0)$, esterna $(\Delta < 0)$

Intersezione quadrica-piano $\leftrightsquigarrow$ sistema di 2° grado
$\rightsquigarrow$ piano secante (conica), tangente (punto/rette), esterno $(\varnothing)$
(le quadriche iperboliche sono "rigate" = generate da rette)

<u>Note</u>: 1) problema della classificazione delle quadriche
2) esistono altre superfici del 2° ordine?