**Euclide, $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$ (*Elementi*), $\sim$ 300 a.C.**

*Definizioni*

1. Punto è ciò che non ha parti.
2. Linea è ciò che ha lunghezza senza larghezza.
3. Estremi di una linea sono punti.
4. Retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa.
5. Superficie è ciò che ha solo lunghezza e larghezza.
6. Estremi di una superficie sono linee.
7. Piano è una superficie che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa.
8. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee in un piano che si incontrino e non giacciano in una retta.
9. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.
10. Quando una retta innalzata a partire da un'altra retta forma con essa angoli adiacenti uguali, ciascuno di questi è retto, e la retta si chiama perpendicolare a quella su cui si è innalzata.
11. Ottuso è un angolo maggiore di un angolo retto.
12. Acuto è un angolo minore di un angolo retto.
13. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.
14. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.
15. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea (che si chiama circonferenza) tale che tutte le rette che terminano su di essa a partire da un medesimo punto fra quelli interni alla figura siano uguali fra loro.
16. Quel punto si chiama centro del cerchio.
17. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da entrambe le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio a metà.
18. Semicerchio è la figura compresa da un diametro e dalla circonferenza da esso tagliata, e centro del semicerchio è lo stesso punto che è anche centro del cerchio.
19. Figure rettilinee sono quelle comprese da rette: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere comprese da quattro rette e multilatere quelle comprese da più di quattro rette.
20. Delle figure trilatere, si chiama triangolo equilatero una che ha i tre lati uguali, triangolo isoscele una che ha due lati uguali, triangolo scaleno una che ha i tre lati disuguali.
21. Inoltre, si chiama triangolo rettangolo una figura trilatera che ha un angolo retto, triangolo ottusangolo una che ha un angolo ottuso e triangolo acutangolo una che ha i tre angoli acuti.
22. Delle figure quadrilatere, si chiama quadrato una che ha i lati uguali e gli angoli retti, rettangolo una che ha gli angoli retti ma i lati diseguali, rombo una che ha i lati uguali ma gli angoli non retti, romboide una che ha lati e angoli opposti uguali ma non è un rettangolo o un rombo. Ogni altra figura quadrilatera si chiama trapezio.
23. Parallele sono due rette giacenti in uno stesso piano che, prolungate illimitatamente in entrambe le direzioni, non si incontrino fra loro da nessuna delle due parti.

*Postulati*

1. È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto.
2. È possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.
3. È possibile tracciare un cerchio con qualsiasi centro e distanza (raggio) qualsiasi.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.
5. Se, in un piano, una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette, se indefinitamente prolungate, finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

*Nozioni comuni*

1. Cose uguali a un'altra sono uguali tra loro.
2. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.
3. Se a cose uguali si tolgono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.
4. Cose che possono essere portate a sovrapporsi l'una con l'altra sono uguali tra loro.
5. Il tutto è maggiore della parte.

**David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (*Fondamenti della geometria*), 1899**

*Concetti primitivi*

Oggetti: punto, retta, piano.

Relazioni: appartenenza, ordinamento (essere “tra”), parallelismo, congruenza.

*Assiomi di appartenenza*

1. Dati due punti distinti $P$ e $Q$, esiste una retta $r = PQ$ tale che $P$ e $Q$ appartengono a $r$.
2. Tali punti $P$ e $Q$ determinano univocamente la retta $r$.
3. A ogni retta appartengono almeno due punti.
4. Dati tre punti non allineati $P$, $Q$ e $R$, esiste un piano $\alpha = PQR$ tale che $P$, $Q$ e $R$ appartengono ad $\alpha$.
5. Tali punti $P$, $Q$ e $R$ determinano univocamente il piano $\alpha$.
6. A ogni piano appartengono almeno tre punti non allineati (cioè non appartenenti a una stessa retta).
7. Se due punti $P$ e $Q$ di una retta $r$ appartengono a un piano $\alpha$, allora tutti i punti di $r$ appartengono ad $\alpha$ (cioè la retta $r$ è contenuta nel piano $\alpha$).
8. Se due piani $\alpha$ e $\beta$ contengono un punto $P$, allora esiste almeno un altro punto $Q$ appartenente ad $\alpha$ e $\beta$.
9. Esistono almeno quattro punti non complanari (cioè non appartenenti a uno stesso piano).

*Assiomi di ordinamento*

10. Se un punto $Q$ sta tra i punti $P$ e $R$, allora $Q$ sta anche tra $R$ e $P$; in tal caso i punti $P$, $Q$ e $R$ sono allineati.
11. Dati due punti distinti $P$ e $R$, esistono almeno un punto $Q$ tra $P$ e $R$ e un punto $S$ tale che $R$ sta tra $P$ e $S$.
12. Dati tre punti distinti e allineati, ce n'è uno e solo uno che sta tra gli altri due.
13. Quattro punti distinti e allineati $P$, $Q$, $R$ e $S$ possono essere permutati in modo che $Q$ stia tra $P$ e $R$ e tra $P$ e $S$, e $R$ stia tra $P$ e $S$ e tra $Q$ e $S$.
14. *Assioma di Pasch.* Siano $P$, $Q$ e $R$ tre punti non allineati e sia $r$ una retta contenuta nel piano $PQR$ e non contenente nessuno di questi punti; se $r$ contiene un punto tra $P$ e $Q$, allora contiene anche un punto tra $P$ e $R$ o tra $Q$ e $R$.

Dagli assiomi precedenti segue che un punto $O$ su una retta $r$ individua due semirette uscenti da $O$ (origine) e contenute in $r$, queste corrispondono alle due classi di equivalenza della relazione $P \sim Q$ se e solo se $O$ non sta tra $P$ e $Q$, definita per ogni $P$ e $Q$ punti di $r$ distinti da $O$. Si definisce semiretta (aperta) $OP$ quella che contiene il punto $P$.

*Assioma delle parallele*

15. Dati una retta $r$ e un punto $P$ non appartenente a $r$, esiste un'unica retta $s$ tale che $P$ appartiene a $s$ e inoltre $s$ è complanare con $r$ ma nessun punto di $r$ appartiene a $s$ ($s$ è la parallela a $r$ passante per $P$).

*Assiomi di congruenza*

16. Dati due punti distinti $P$ e $Q$, per ogni retta $r$ e ogni punto $P'$ di $r$ esiste un (unico) punto $Q'$ di $r$ in ciascuna delle due semirette di $r$ uscenti da $P'$, tale che i segmenti $PQ$ e $P'Q'$ (intesi come coppie di punti) sono congruenti.
17. La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva.
18. Dati tre punti $P$, $Q$ e $R$ tali che $Q$ sta tra $P$ e $R$ e tre punti $P'$, $Q'$ e $R'$ tali che $Q'$ sta tra $P'$ e $R'$, se i segmenti $PQ$ e $P'Q'$ sono congruenti e i segmenti $QR$ e $Q'R'$ sono congruenti, allora i segmenti $PR$ e $P'R'$ sono congruenti.
19. Dato un angolo $P\widehat{O}Q$ (inteso come coppia di semirette $OP$ e $OQ$ uscenti da $O$), per ogni piano $\alpha$ e ogni semiretta $O'P'$ in $\alpha$, esistono esattamente due semirette $O'Q'$ e $O'Q''$ uscenti da $O'$ in $\alpha$, tali che gli angoli $P\widehat{O}Q$, $P'\widehat{O'}Q'$ e $P'\widehat{O'}Q''$ sono congruenti.
20. La relazione di congruenza tra angoli è transitiva.
21. Se due triangoli $PQR$ e $P'Q'R'$ (intesi come triple di punti) hanno congruenti tra loro i lati $PQ$ e $P'Q'$, i lati $QR$ e $Q'R'$ (tutti intesi come segmenti) e gli angoli $P\widehat{Q}R$ e $P'\widehat{Q'}R'$, allora hanno congruenti tra loro anche gli angoli $Q\widehat{R}P$ e $Q'\widehat{R'}P'$ e gli angoli $R\widehat{P}Q$ e $R'\widehat{P'}Q'$ (e quindi anche i lati $PR$ e $P'R'$).

*Assiomi di continuità*

22. *Assioma di Archimede.* Se $P_0$ e $P_1$ sono punti distinti su una retta $r$ e $Q$ è un qualunque punto di $r$ tale che $P_1$ sta tra $P_0$ e $Q$, allora esistono dei punti $P_2, \ldots, P_n$ su $r$ tali che $P_i$ sta tra $P_{i-1}$ e $P_{i+1}$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, i segmenti $P_{i-1}P_i$ con $i = 1, \ldots, n$ sono tutti congruenti tra loro, e $Q$ sta tra $P_0$ e $P_n$.
23. *Assioma di completezza lineare.* Aggiungendo un punto a una retta, si ottiene un oggetto che non soddisfa più tutti gli assiomi 3 (a ogni retta appartengono almeno due punti), 9-12, 14-16 e 21.

**Henri Poincaré, *Pourquoi l'espace à trois dimensions*, 1912**

Fonderò la determinazione del numero di dimensioni sulla nozione di taglio. Immaginiamo una curva chiusa, cioè un continuo a una dimensione; se su questa curva fissiamo due punti qualunque per i quali vietiamo di passare, la curva risulterà tagliata in due parti, nel senso che sarà impossibile passare da una parte all'altra restando sulla curva e senza passare per i punti vietati.

Consideriamo al contrario una superficie chiusa, cioè un continuo a due dimensioni; possiamo fissare su questa superficie uno, due, un qualunque numero finito di punti vietati; la superficie non risulterà decomposta in due parti, sarà possibile passare da un punto all'altro di questa superficie senza incontrare ostacoli, infatti si potrà sempre girare intorno ai punti vietati.

Ma se tracciamo sulla superficie una o più curve chiuse e le consideriamo come tagli che vietiamo di attraversare, la superficie risulterà decomposta in più parti.

Veniamo ora al caso dello spazio; non lo si può decomporre in più parti, né vietando il passaggio per certi punti, né vietando di attraversare certe linee; si potrà sempre girare intorno a questi ostacoli. Sarà necessario vietare di attraversare certe superfici, cioè effettuare tagli a due dimensioni; ed è per questo che diciamo che lo spazio ha tre dimensioni.

Noi sappiamo ora cosa significa che un continuo ha $n$ dimensioni. Un continuo ha $n$ dimensioni quando uno lo può decomporre in più parti praticando uno o più tagli lungo continui a $n-1$ dimensioni. La nozione di continuo a $n$ dimensioni risulta così definita mediante quella di continuo a $n-1$ dimensioni; questa è una definizione per induzione.

*Definiamo*

i volumi come porzioni dello spazio,
le superfici come bordi dei volumi,
le linee come bordi delle superfici,
i punti come bordi delle linee.

**Hermann Weyl, *Raum-Zeit-Materie* (*Spazio-tempo-materia*), 1918**

*Nozioni preliminari*

Campo ordinato dei numeri reali $\mathbb{R} = (\mathbb{R},\ +\ ,\ \cdot\ ,\ \leq\ )$, definito come completamento del campo ordinato dei numeri razionali $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q},\ +\ ,\ \cdot\ ,\ \leq\ )$, caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1. $(\mathbb{R},\ +\ )$ è un gruppo commutativo (con elemento neutro 0).
2. $(\mathbb{R} - \{0\},\ \cdot\ )$ è un gruppo commutativo (con elemento neutro 1).
3. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$.
4. $\leq$ è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{R}$.
5. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$.
6. $0 \leq a$ e $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.
7. *Proprietà di Archimede.* Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un numero naturale $n$ tale che $-n \leq a \leq n$.
8. *Completezza.* Dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}$ con $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$ (il numero $c$ è detto elemento separatore tra $A$ e $B$).

*Spazio vettoriale reale*, definito come insieme $V$ (i cui elementi di chiamano vettori) con una somma vettoriale, denotata $v + w \in V$ per ogni $v, w \in V$, e di un prodotto per scalari, denotato $a\,v \in V$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, tali che:

1. $(V,\ +\ )$ è un gruppo commutativo (con elemento neutro $0_V$).
2. $a\,(v + w) = a\,v + a\,w$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $v, w \in V$.
3. $(a + b)\,v = a\,v + b\,v$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.
4. $(a \cdot b)\,v = a\,(b\,v)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.
5. $1\,v = v$ per ogni $v \in V$.

Diciamo che $V$ ha *dimensione* $n$ se esistono $n$ vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ che generano $V$ (cioè per ogni $v \in V$ esistono $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$), ma non ne esistono $n - 1$; equivalentemente, se esistono $n$ vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ linearmente indipendenti (cioè $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$), ma non ne esistono $n + 1$.

$W \subset V$ si dice sottospazio vettoriale di $V$, se $W$ con le operazioni indotte da quelle di $V$ per restrizione è esso stesso uno spazio vettoriale reale. In tal caso $\dim W \leq \dim V$ e vale l'uguaglianza solo se $W = V$.

*Spazio vettoriale euclideo*, definito come coppia $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, dove $V$ è uno spazio vettoriale reale e $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $V$, cioè un'applicazione $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ per ogni $v, w \in V$.
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ per ogni $u, v, w \in V$.
3. $\langle a\,v, w \rangle = a \cdot \langle v, w \rangle$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $v, w \in V$.
4. $\langle v, v \rangle > 0$ per ogni $v \in V - \{0_V\}$.

Per ogni $v \in V$ di chiama norma (o modulo) di $v$ il numero reale non negativo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

*Spazi affini reali*

Dato un spazio vettoriale reale $V$, uno spazio affine su $V$ è un insieme non vuoto $A$ (i cui elementi si chiamano punti) con un'applicazione $A \times A \to V$ che associa a ogni coppia di punti $P, Q \in A$ il vettore $\overrightarrow{PQ} \in V$, in modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

1. Per ogni punto $P \in A$ e ogni vettore $v \in V$ esiste un unico punto $Q \in A$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$.
2. *Identità di Charles.* $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ per ogni $P, Q, R \in A$.

La dimensione di $A$ è per definizione la dimensione di $V$.
Chiamiamo retta affine uno spazio affine di dimensione 1 e piano affine uno spazio affine di dimensione 2.

Per ogni punto $P \in A$ e ogni sottospazio vettoriale $W \subset V$, il sottospazio affine passante per $P$ e parallelo a $W$ è l'insieme $L = \{Q \in A \,|\, \overrightarrow{PQ} \in W\}$ (con l'applicazione $L \times L \to W$ restrizione di $A \times A \to V$ è uno spazio affine su $W$).

*Spazi euclidei*

Uno spazio euclideo $E$ di dimensione $n$ è uno spazio affine di dimensione $n$ su uno spazio vettoriale euclideo $V$ (cioè $V$ è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare). In particolare, una retta euclidea è uno spazio euclideo di dimensione 1 e un piano euclideo è uno spazio euclideo di dimensione 2.

Dati due punti $P, Q \in E$ si definisce distanza euclidea tra $P$ e $Q$ il numero reale non negativo $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$.
Si ottiene un tal modo una funzione distanza $d : E \times E \to [0, \infty)$, che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $d(P, Q) = 0$ se e solo se $P = Q$.
2. *Proprietà simmetrica.* $d(P, Q) = d(Q, P)$ per ogni $P, Q \in E$.
3. *Proprietà triangolare.* $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ per ogni $P, Q, R \in E$.