Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 7 – 14 marzo 2024

1) Sia $f : R \to R$ l'applicazione definita

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{se } \ t > 0\,; \\ 0 & \text{se } \ t \leq 0\,. \end{cases}$$

Verificare che f è differenziabile (cioè ammette derivate di ogni ordine) e mostrare come può essere utilizzata per ottenere una parametrizzazione differenziabile (non regolare) di qualunque poligonale.

2) Sia $G(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid y = f(x)\}$ il grafico di una funzione $f : I \to R$ con $I \subset R$ intervallo aperto (eventualmente illimitato). Provare che $G(f)$ è una curva regolare in R^2 con retta tangente ovunque non parallela all'asse y se e solo se f differenziabile. In tal caso, esprimere la curvatura di $G(f)$ in termini di f e delle sue derivate.

3) Determinare per quali valori di $m, n \in \mathbb{Z}$ i sottospazi $C_{m,n} = \{(x, y) \in R^2 \mid x^m = y^n\}$ sono curve regolari in R^2 e in tal caso calcolarne la curvatura.

4) Sia $C \subset R^2$ una curva regolare avente equazione cartesiana regolare $f(x, y) = 0$. Per ogni punto $(x, y) \in R^2$ si consideri il vettore $V(x, y) = \nabla f(x, y)/\|\nabla f(x, y)\|$. Verificare che C può essere orientata in modo che il versore normale $N(p)$ coincida con $V(p)$ in ogni punto $p \in C$ e che con tale orientazione si ha $\kappa_C(p) = -\mathrm{div} V(p)$.

5) Classificare le curve regolari descritte dalle seguenti equazioni parametriche, al variare di $a, b > 0$, sia dal punto di vista intrinseco (a meno di isometrie intrinseche) che dal punto di vista euclideo (a meno di isometrie euclidee del piano):

$$\begin{cases} x = at^b \cos t \\ y = at^b \sin t \end{cases} \quad \text{con parametro } t \in \,]0, \infty[\,;$$

$$\begin{cases} x = ab^t \cos t \\ y = ab^t \sin t \end{cases} \quad \text{con parametro } t \in R\,.$$

6) Sia $C \subset R^2$ una curva regolare e sia $\alpha : I \to C$ una sua parametrizzazione naturale. Fissato $p = \alpha(s_0) \in C$, si consideri la funzione $\varphi_p : I \to R$ definita $\varphi_p(s) = d_e(p, \alpha(s))^2 = \|\alpha(s) - \alpha(s_0)\|^2$ per ogni $s \in I$. Provare che φ_p differenziabile in un intorno di s_0 ed esprimere la curvatura $\kappa(p)$ di C in p in termini della funzione φ_p e delle sue derivate.