

## Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 4 – 23 novembre 2023

- 1) Dati uno spazio topologico  $X$  compatto di Hausdorff e uno spazio topologico  $Y$  metrizzabile con la metrica  $d_Y$ , sia  $C(X, Y)$  lo spazio delle applicazioni continue di  $X$  in  $Y$ , con la topologia indotta dalla metrica  $d(f, g) = \max\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ . Dimostrare che:  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  è un'omotopia  $\Leftrightarrow \eta : [0, 1] \rightarrow C(X, Y)$  definita da  $\eta(t)(x) = H(x, t)$  è continua  $\Leftrightarrow \alpha : X \rightarrow C([0, 1], Y)$  definita da  $\alpha(x)(t) = H(x, t)$  è continua.
- 2) Un sottospazio  $Y \subset X$  si dice *retrato di  $X$*  se esiste un'applicazione continua  $r : X \rightarrow Y$  tale che  $r(y) = y$  per ogni  $y \in Y$  (*retrazione continua*). Verificare che in tal caso:
  - a)  $Y$  può avere tipo di omotopia diverso da  $X$  (se  $i \circ r \neq \text{id}_X$ );
  - b)  $X$  semplicemente connesso  $\Rightarrow Y$  semplicemente connesso;
  - c)  $X$  contraibile  $\Rightarrow Y$  contraibile.
- 3) Siano  $X, X', Y$  e  $Y'$  spazi topologici. Provare che valgono le implicazioni: a)  $X \simeq X'$  e  $Y \simeq Y' \Rightarrow X \times Y \simeq X' \times Y'$ ; b)  $X \simeq X'$  e  $Y \simeq Y' \Rightarrow X \sqcup Y \simeq X' \sqcup Y'$ . Cosa si può dire delle implicazioni inverse?
- 4) Siano  $p : X \rightarrow Y$  e  $q : Y \rightarrow Z$  due applicazioni continue. Verificare che:
  - a)  $q \circ p$  e  $p$  rivestimenti  $\Rightarrow q$  rivestimento;
  - b)  $q \circ p$  e  $q$  rivestimenti  $\Rightarrow p$  rivestimento
  - c)  $p$  e  $q$  rivestimenti  $\not\Rightarrow q \circ p$  rivestimento.
- 5) Dimostrare che se  $p : X \rightarrow Y$  è un rivestimento tra spazi topologici connessi (non necessariamente connessi per archi), allora tutte le fibre  $F_y = p^{-1}(y)$  con  $y \in Y$  hanno la stessa cardinalità. Dimostrare inoltre che questa stessa proprietà vale anche senza l'ipotesi di connessione per rivestimenti regolari  $\pi : X \rightarrow X/G$  (indotti da un'azione propriamente discontinua di un gruppo  $G$  su  $X$ ), ma non in generale.
- 6) Sia  $X$  uno spazio connesso per archi con rivestimento universale  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ . Per ogni sottogruppo  $H \subset G_p \cong \pi_1(X)$ , sia  $X_H = \tilde{X}/H$  e sia  $p_H = p/H : X_H \rightarrow X$  l'applicazione che si ottiene passando  $p$  al quoziente. Dimostrare che l'applicazione  $H \mapsto p_H$  induce una corrispondenza biunivoca tra le classi di coniugio di sottogruppi di  $\pi_1(X)$  e i rivestimenti di  $X$  a meno di equivalenza topologica (due rivestimenti  $r : R \rightarrow X$  e  $r' : R' \rightarrow X$  sono equivalenti se esiste un omeomorfismo  $h : R \rightarrow R'$  tale che  $r = r' \circ h$ ).