

Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 3 – 9 novembre 2023

- 1) Sia X uno spazio topologico II numerabile localmente compatto. Provare che X è unione di una successione di compatti $\{C_n \subset X \mid n \in \mathbb{N}\}$ tale che $C_n \subset \text{Int } C_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.
- 2) Siano X e Y spazi di Hausdorff localmente compatti con Y non compatto e sia \widehat{Y} la compattificazione di Alexandroff di Y . Data un'applicazione $f : A \rightarrow Y$, con $A \subset X$ aperto *relativamente compatto* (cioè: $\text{Cl}_X A$ compatto), si denoti con $\widehat{f} : X \rightarrow \widehat{Y}$ l'estensione di f definita da $\widehat{f}(X - A) = \infty$. Verificare che \widehat{f} è continua se e solo se f è continua e *propria* (cioè: $K \subset Y$ compatto $\Rightarrow f^{-1}(K) \subset A$ compatto).
- 3) Si consideri lo spazio metrico $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]\}$ con la metrica definita $d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ per ogni $f, g \in F$. Provare che F è completo ma non localmente compatto.
- 4) Provare che nessuna applicazione continua $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva, mentre esiste una applicazione $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sup}}$ continua ed iniettiva (si consideri l'inversa della parametrizzazione $\alpha : [0, 2\pi[\rightarrow S^1$ definita $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ per ogni $t \in [0, 2\pi[$).
- 5) Dimostrare che uno spazio topologico X è connesso se e solo se ogni applicazione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ *localmente costante* (cioè: per ogni $x \in X$ esiste un intorno I di x in X tale che $f|_I$ è costante) è costante.
- 6) Sia $X = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ con la topologia generata dagli "intervalli aperti" rispetto all'ordine lessicografico (definito $(x, y) <_l (x', y')$ se e solo se $x < x'$ oppure $x = x'$ e $y < y'$), cioè dagli insiemi:

$$] (a, b), (c, d)]_l = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1] \mid (a, b) <_l (x, y) <_l (c, d)\} \text{ con } (a, b) <_l (c, d).$$

Dimostrare che X è connesso ma non connesso per archi.