Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 1 – 12 ottobre 2023

1) Verificare che la famiglia degli intervalli semiaperti $[a, b[\subset R$ con $a < b$ è base di una topologia $\mathcal{S}$ su R più fine della usuale topologia euclidea $\mathcal{E}$. Provare che $R_{\mathcal{S}}$ è unione topologica delle due semirette $]-\infty, 0[$ e $[0, +\infty[$ dotate della topologia indotta.

2) Dati due spazi topologici X e Y e due sottoinsiemi $A \subset X$ e $B \subset Y$, dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:
$$\mathrm{Int}_{X \times Y} A \times B = \mathrm{Int}_X A \times \mathrm{Int}_Y B \ ,$$
$$\mathrm{Cl}_{X \times Y} A \times B = \mathrm{Cl}_X A \times \mathrm{Cl}_Y B \ .$$
Esprimere inoltre $\mathrm{Fr}_{X \times Y} A \times B$ in termini di $\mathrm{Fr}_X A$ e $\mathrm{Fr}_Y B$.

3) Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici. Verificare che le equazioni:
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$
$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$
$$d''((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$
definiscono metriche equivalenti su $X_1 \times X_2$, infatti si ha:
$$(X_1 \times X_2, \langle d \rangle) = (X_1 \times X_2, \langle d' \rangle) = (X_1 \times X_2, \langle d'' \rangle) = (X_1, \langle d_1 \rangle) \times (X_2, \langle d_2 \rangle) \ .$$

4) Dato uno spazio topologico X, si consideri l'insieme $F = \{f : X \to [0, 1]\}$ e il suo sottoinsieme $C = \{f \in F \mid f \text{ è continua}\}$. Provare che l'uguaglianza
$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$
definisce una metrica su F rispetto alla quale C risulta chiuso in F.

5) Sia X uno spazio topologico la cui topologia è indotta dalla distanza d. Dimostrare che, per ogni punto $p \in X$ e per ogni sottoinsieme $S \subset X$, le senguenti funzioni sono continue:
$$\varphi_p : X \to R \ \text{ definita } \ \varphi_p(x) = d(x, p) \, ,$$
$$\varphi_S : X \to R \ \text{ definita } \ \varphi_S(x) = d(x, S) = \inf_{s \in S} d(x, s) \, .$$

6) Verificare che $R^m - \{0\} \cong S^{m-1} \times R_+ \cong S^{m-1} \times R$ per ogni $m \geq 1$ e che $R^m - R^n \cong S^{m-n-1} \times R^{n+1}$ per ogni $m > n \geq 1$. Concludere, ragionando per induzione su m, che esiste un'immersione di T^m in $R^{m+1} - R^{m-1}$ e quindi in R^{m+1} per ogni $m \geq 1$.