Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2022/2023

# TEORIA DEI NODI

*prof. Riccardo Piergallini*

## *Registro delle lezioni*

*Lezione 1.* (22 settembre, 2 ore)

Definizioni di base: nodi e link, orientazioni, equivalenza topologica e isotopica. Nodi simmetrici e nodi invertibili. Teorema di approssimazione differenziabile di immersioni, omeomorfismi e isotopie tra aperti di $R^m$ con $m \leq 3$. Caratterizzazione degli omeomorfismi dello spazio realizzabili mediante isotopie in termini di orientazioni.

*Lezione 2.* (28 settembre, 2 ore)

Deformazioni di nodi, equivalenza per deformazioni, deformazioni docili. Esempi di nodi selvaggi e deformazioni selvagge. Nodi docili, intorni tubolari topologici, rappresentazione dei nodi docili come nodi lisci e poligonali a meno di $\varepsilon$-isotopie. Deformazioni docili, realizzazioni delle deformazioni docili come deformazioni lisce e poligonali, estensione delle deformazioni docili a isotopie dello spazio.

*Lezione 3.* (3 ottobre, 2 ore)

Classificazione di nodi lisci a meno di diffeomorfismi e isotopie lisce, caratterizzazione dei diffeomorfismi dello spazio realizzabili mediante isotopie lisce in termini di orientazioni. Nodi banali, $K$ nodo connesso banale se e solo se bordo di un disco docile, $K$ nodo banale se e solo se ogni componente è banale e separata (anelli di Borromeo).

*Lezione 4.* (5 ottobre, 2 ore)

Diagrammi di nodi lisci e poligonali, esistenza a meno di $\varepsilon$-isotopie, determinazione del nodo a meno di isotopie verticali. Equivalenza di diagrammi, movimenti di Reidemeister.

*Lezione 5.* (10 ottobre, 2 ore)

Gruppo $G(K)$ di un nodo $K$, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione $H(K) = \mathrm{Ab}(G(K))$ e numero $n(K)$ delle componenti di $K$. $K$ nodo connesso banale se e solo se $G(K)$ abeliano se e solo se $G(K) \cong \mathbb{Z}$ (lemma del cappio). Esempi di classi di nodi: tori torici, nodi Pretzel, nodi razionali. Unione separata di nodi e somma connessa $K_1 \# K_2$ di nodi connessi $K_1$ e $K_2$.

*Lezione 6.* (12 ottobre, 2 ore)

Numero $c(K)$ di incroci necessari per rappresentare $K$, $K$ banale se e solo se $c(K) = 0$ (teorema di Schönfließ), tabelle dei nodi primi basate su $c(K)$. Banalizzazione di nodi mediante inversione di incroci, indice di banalizzazione $u(K)$. Banalità dei nodi in $R^n$ con $n > 3$. Superfici di Seifert, costruzione basata sui diagrammi. Genere $g(K)$ di un nodo $K$, $K$ banale se e solo se $g(K) = 0$.

*Lezione 7.* (17 ottobre, 2 ore)

Additività del genere, decomposizione in nodi primi. Indice di allacciamento $\ell(K_1, K_2)$ tra nodi orientati $K_1$ e $K_2$, invarianza isotopica (link di Hopf $H$ non banale), simmetria, dipendenza dall'orientazione, $K_1$ e $K_2$ separati implica $\ell(K_1, K_2) = 0$ ma non viceversa (link di Whitehead $W$). Calcolo dell'indice di allacciamento sui diagrammi.

*Lezione 8.* (19 ottobre, 2 ore)

Invariante di Arf-Casson $a(K)$ di un nodo connesso (orientato) $K$, definizione ricorsiva sui diagrammi. Invarianza isotopica, simmetria, indipendenza dall'orientazione, additività rispetto alla somma connessa. Esempi $a(T) = 1$ e $a(E) = -1$ (quindi $T \ncong E$ non banali).

*Lezione 9.* (24 ottobre, 2 ore)

Quandle e colorazioni di diagrammi, invarianza per movimenti di Reidemeister. Numero $q_n(K)$ delle $n$-colorazioni ridotte, invarianza isotopica, moltiplicatività rispetto alla somma connessa, esempi di nodi non equivalenti (link di Whitehead $W$ non banale).

*Lezione 10.* (26 ottobre, 2 ore)

Risoluzione di incroci e stati di un diagramma. Parentesi di Kauffman, formula ricorsiva sulle risoluzioni, invarianza per isotopia regolare. Indice di arricciamento. Polinomio di Kauffman $P_K(t)$, dipendenza dall'orientazione, polinomi di Kauffman di nodi simmetrici e della somma connessa.

*Lezione 11.* (2 novembre, 2 ore)

Equazione caratteristica del polinomio di Kauffman, parità delle potenze che vi compaiono. Polinomio di Jones $V_K(x)$, equazione caratteristica, esempi (non simmetria dei nodi trifoglio).

*Lezione 12.* (7 novembre, 2 ore)

Diagrammi alternanti, colorazioni a scacchiera, nodi alternanti e non-alternanti. Proprietà del polinomio di Jones di nodi alternanti, dimostrazione della congettura di Tait.

*Lezione 13.* (9 novembre, 2 ore)

Trecce e isotopia di trecce, gruppo $\mathcal{B}_n$ delle $n$-trecce. Spazio delle $\Gamma_n R^2$ delle $n$-configurazioni del piano, rivestimento delle $n$-uple ordinate (coefficienti e radici di polinomi complessi). $\mathcal{B}_n \cong \pi_1(\Gamma_n R^2)$, omomorfismo $\phi_n : \mathcal{B}_n \to \Sigma_n$, $\mathcal{B}_1 \cong 0$ e $\mathcal{B}_2 \cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{B}_n$ non commutativo per $n > 2$. Diagrammi di trecce lisce e poligonali. Presentazione standard dei gruppi di trecce.

*Lezione 14.* (14 novembre, 2 ore)

Trecce chiuse, teorema di Alexander, relazioni tra trecce e movimenti di Reidemeister. Algoritmo di Vogel, numero minimo di stringhe per rappresentare un nodo $K$ e numero minimo di dischi di Seifert di un diagramma di $K$.

*Lezione 15.* (16 novembre, 2 ore)

Teorema di Markov, stabilizzazione e coniugio di trecce. Rappresentazioni del gruppo delle trecce, rappresentazione simmetrica e sua deformazione di Burau, somma degli esponenti.

*Lezione 16.* (28 novembre, 2 ore)

Algebre di Hecke, teorema di struttura (forma normale), tracce sulle algebra di Hecke.

*Lezione 17.* (30 novembre, 2 ore)

Generalizzazione del polinomio di Jones al polinomio in due variabili $W_K(x, y)$. Equazione caratteristica di $W_K(x, y)$, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie e alla somma connessa.

*Lezione 18.* (5 dicembre, 2 ore)

Primo gruppo di omologia di una superficie di Seifert. Forme e matrici di Seifert di un nodo orientato, polinomio di Alexander $\Delta_K(t)$, invarianza isotopica.

*Lezione 19.* (7 dicembre, 2 ore)

Polinomio di Conway $\nabla_K(y)$, equazione caratteristica, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie a alla somma connessa, relazione tra polinomio di Conway e genere.

*Lezione 20.* (12 dicembre, 2 ore)

Nodi "slice" e nodi "ribbon", congettura slice $\Rightarrow$ ribbon. Polinomio di Alexander di nodi a fetta, segnature e determinanti di nodi a fetta.

*Lezione 21.* (14 dicembre, 2 ore)

Nodi singolari, movimenti di isotopia liscia, inversione di incroci e singolarità doppie trasversali.

Invarianti di Vassiliev, equazione caratteristica e conseguenze. Esempi derivati dai coefficienti del polinomio di Conway.

*Lezione 22.* (19 dicembre, 2 ore)

Invarianti di ordine finito. Diagrammi di Gauss, relazioni tra diagrammi e diagrammi base, determinazione dei diagrammi base di ordine 2, 3 e 4. Teorema di Vassiliev-Kontsevich, simboli. Calcolo degli invarianti di ordine finito.