Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2022/2023

GEOMETRIA SUPERIORE

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (20 settembre, 2 ore)

Introduzione al corso. Richiami sulle varietà topologiche, carte e atlanti, metrizzabilità, teorema di immersione in R^n, teoremi di invarianza della dimensione e dei domini.

Lezione 2. (21 settembre, 2 ore)

Richiami sul calcolo differenziale in R^m, diffeomorfismi e teorema della funzione inversa, teorema di Sard. Carte differenziabilmente compatibili, atlanti e strutture differenziabili, esistenza e unicità della struttura differenziabile generata da un atlante differenziabile. Varietà differenziabili, esempi (R^m, S^m, T^m, P^m).

Lezione 3. (27 settembre, 2 ore)

Unioni topologiche e prodotti di varietà differenziabili, rivestimenti di varietà differenziabili. Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra varietà. Confronto di diverse strutture differenziabili su R. Quozienti di varietà differenziabili mediante azioni differenziabili propriamente discontinue.

Lezione 4. (28 settembre, 2 ore)

Atlanti orientati e orientazioni su varietà differenziabili, varietà orientabili e varietà orientate. Orientazioni su una varietà orientabile connessa. Applicazioni differenziabili tra varietà che conservano/invertono l'orientazione. Esempi di varietà oriantabili e non orientabili (orientazioni standard su R^m, S^m e T^m; P^m orientabile se e solo se m è dispari).

Lezione 5. (3 ottobre, 2 ore)

Sottovarietà differenziabili, carte locali adattate; equazioni locali regolari e parametrizzazioni locali regolari; curve e superfici in R^2 e R^3, esempi di curve differenziabili e non differenziabili in R^2.

Lezione 6. (10 ottobre, 2 ore)

Caratterizzazione delle sottovarietà differenziabili di R^n come grafici di funzioni differenziabili. Partizioni dell'unità differenziabili. Teorema di approssimazione differenziabile.

Lezione 7. (12 ottobre, 2 ore)

Immersioni differenziabili regolari di varietà differenziabili in R^n, intorni tubolari. Richiami di calcolo differenziale in R^m, vettori tangenti e derivazioni, spazi tangenti e cotangenti, applicazioni tangenti e cotangenti, differenziali di funzioni.

Lezione 8. (17 ottobre, 2 ore)

Vettori tangenti ad una varietà differenziabile come classi di curve e come derivazioni. Spazi tangenti e applicazioni tangenti su varietà. Sottospazi tangenti a sottovarietà, equazioni e parametrizzazioni.

Lezione 9. (19 ottobre, 2 ore)

Teorema di Sard sulle varietà. Trasversalità, teorema di approssimazione trasversale, intersezione di sottovarietà trasversali. Fibrato tangente come varietà differenziabile orientata. Teorema di immersione di Whitney.

Lezione 10. (24 ottobre, 2 ore)

Campi di vettori, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili. Parentesi di Lie, identità di Jacobi, algebra di Lie dei campi di vettori. Curve integrali per un campo di vettori, esistenza e unicità.

Lezione 11. (26 novembre, 2 ore)

Campi di riferimenti e campi di riferimenti coordinati, caratterizzazione dei campi di riferimenti coordinati in termini di parentesi di Lie. Spazi e applicazioni cotangenti su varietà; differenziali di funzioni su varietà.

Lezione 12. (2 novembre, 2 ore)

Fibrato cotangente come varietà differenziabile orientata. Forme differenziali lineari, prodotto esterno e algebra di Grassmann. Forme differenziali in coordinate, cambiamenti di coordinate, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

Lezione 13. (7 novembre, 2 ore)

Differenziale esterno, definizione in coordinate, esistenza e unicità. Forme chiuse e forme esatte, lemma di Poincaré (forma chiusa $\Leftrightarrow$ localmente esatta).

Lezione 14. (9 novembre, 2 ore)

Chiusi ammissibili in varietà differenziabili, varietà differenziabili con bordo. Integrale di una funzione a supporto compatto su un chiuso ammissibile di R^m.

Lezione 15. (14 novembre, 2 ore)

Integrale di una m-forma a supporto compatto su un chiuso ammissibile in una m-varietà differenziabile orientata. Forme di volume e orientazioni. Integrazione di funzioni in una varietà differenziabile con una forma di volume (caso speciale: R^m con la forma di volume euclidea).

Lezione 16. (16 novembre, 2 ore)

Integrazione di forme su sottovarietà differenziabili. Bordo di un chiuso ammissibile, orientazione indotta. Teorema di Stokes. Forme differenziali e calcolo vettoriale in R^2 e R^3. Conseguenze del teorema di Stokes: formule di Green, teorema di Gauss, teorema di Stokes classico.

Lezione 17. (28 novembre, 2 ore)

Coomologia di De Rham, struttura moltiplicativa, coomologia in dimensione 0 e m. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni differenziabili. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni continue, invarianza omotopica.

Lezione 18. (30 novembre, 2 ore)

Successione esatta di Mayer-Vietoris. Finitezza della coomologia delle varietà compatte. Numeri di Betti, caratteristica di Eulero, espressione in termini di decomposizioni poliedrali.

Lezione 19. (5 dicembre, 2 ore)

Coomologia delle sfere, teorema di non retrazione, teorema di punto fisso di Brouwer, teorema di invarianza della dimensione.

Lezione 20. (7 dicembre, 2 ore)

Teorema di separazione di Jordan in R^m. Teorema di invarianza del dominio, invarianza della dimensione, del bordo e dell'interno delle varietà con bordo.

Lezione 21. (12 dicembre, 2 ore)

Coomologia in dimensione m e orientabilità. Grado di applicazioni continue, invarianza omotopica, grado in termini di fibre regolari (anche mod 2). Campi di vettori non singolari sulle sfere.

Lezione 22. (14 dicembre, 2 ore)

Teorema di Hopf. Teorema di separazione per ipersuperfici lisce in R^m, non esistenza di ipersuperfici chiuse non orientabili in R^m.

Lezione 23. (27 febbraio, 2 ore)

Metriche riemanniane, elementi di lunghezza. Spazi modello (metriche euclidee, sferiche e iperboliche). Esistenza di metriche riemanniane sulle varietà, metriche riemanniane indotte su sottovarietà.

Lezione 24. (2 marzo, 2 ore)

Dualità riemanniana tra campi di vettori e forme differenziali lineari, formule di innalzamento e abbassamento degli indici, gradiente di funzioni, dualità tra fibrato tangente e cotangente. Elementi di volume riemanniani in varietà orientate, esistenza e unicità, misura delle lunghezze e dei volumi.

Lezione 25. (7 marzo, 2 ore)

Distanza geodetica, compatibilità con la topologia. Applicazioni isometriche simili e conformi, isometrie, similitudini e conformità tra varietà riemanniane. Gruppi di isometrie, similitudini e conformità di una varietà riemanniana.

Lezione 26. (9 marzo, 2 ore)

Rivestimenti e quozienti riemanniani. Varietà omogenee e localmente omogenee. Connessione di Levi-Civita, esistenza e unicità della derivata covariante, invarianza per similitudini, simboli di Christoffel.

Lezione 27. (14 marzo, 2 ore)

Derivata covariante in sottovarietà riemanniane. Campi di vettori paralleli, trasporto parallelo. Geodetiche, parametrizzazioni geodetiche, invarianza per similitudini locali.

Lezione 28. (16 marzo, 2 ore)

Applicazione esponenziale. Intorni convessi e coordinate normali. Campi di riferimenti ortogonali, esistenza locale, caratterizzazione delle metriche localmente euclidee (campi di riferimenti coordinati ortogonali o paralleli).

Lezione 29. (21 marzo, 2 ore)

Rigidità di isometrie e similitudini. Gruppi di isotropia, varietà isotrope e localmente isotrope. Sottovarietà totalmente geodetiche.

Lezione 30. (23 marzo, 2 ore)

Sottovarietà luogo di punti fissi di isometrie sono totalmente geodetiche. Sottovarietà totalmente geodetiche e curve geodetiche delle sfere e degli spazi iperbolici.

Lezione 31. (28 marzo, 2 ore)

Lemma di Gauss. Isometrie riemanniane come isometrie rispetto alla distanza geodetica.

Lezione 32. (30 marzo, 2 ore)

Geodetiche come curve di lunghezza localmente minima, equazioni di Eulero-Lagrange.

Lezione 33. (4 aprile, 2 ore)

Completezza geodetica, esistenza di archi geodetici di lunghezza minima, teorema di Hopf-Rinow e conseguenze.

Lezione 34. (6 aprile, 2 ore)

Operatore di curvatura sui campi di vettori, proprietà tensoriale, identità di Bianchi.

Lezione 35. (11 aprile, 2 ore)

Tensore di curvatura di Riemann, tensore di Ricci, proprietà di simmetria, invarianza per isometrie e similitudini.

Lezione 36. (13 aprile, 2 ore)

Curvature sezionali, curvature di Ricci e curvatura scalare. Curvature sezionali come curvature di superfici. Curvature sezionali di sottovarietà geodetiche.

Lezione 37. (18 aprile, 2 ore)

Curvatura delle metriche conformemente piatte, curvatura degli spazi euclidei, delle sfere e degli spazi iperbolici. Invarianza della curvatura per isometrie, riscalatura della curvatura per similitudini. Varietà a curvatura costante arbitraria, omogeneità e isotropia.

Lezione 38. (27 aprile, 2 ore)

Operatore forma di sottovarietà riemanniane, seconda forma fondamentale. Caratterizzazione delle sottovarietà geodetiche. Curvature sezionali di sottovarietà riemanniane.

Lezione 39. (2 maggio, 2 ore)

Forme di connessione e di curvatura, equazioni strutturali. Curvatura sezionale isotropa implica costante. Spazi modello (a curvatura costante), isotropia e omogeneità globali.

Lezione 40. (4 maggio, 2 ore)

Teorema di Cartan locale, isotropia e omogeneità locale delle varietà a curvatura costante.

Lezione 41. (9 maggio, 2 ore)

Gruppi di isometrie degli spazi modello. Teorema di Cartan globale, classificazione globale delle varietà a curvatura costante.