Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2022/2023

GEOMETRIA SUPERIORE

prof. Riccardo Piergallini

Programma del corso

Prima parte – Topologia differenziabile

Strutture differenziabili. Funzioni differenziabili tra aperti di R^n, funzioni di classe C^k e C^∞, differenziale e matrice jacobiana, funzioni regolari e diffeomorfismi, regola della catena, teoremi della funzione inversa e della funzione implicita. Carte differenziabili su una varietà, atlanti e strutture differenziabili su varietà, strutture orientate e orientabilità, orientazioni su varietà connesse. Applicazioni differenziabili, partizioni dell'unità differenziabili, approssimazioni differenziabili di funzioni continue. Diffeomorfismi tra varietà, diffeomorfismi locali e orientazioni, orientabilità degli spazi proiettivi. Sottovarietà differenziabili, equazioni e parametrizzazioni locali regolari, sottovarietà differenziabili di R^n, teorema di immersione differenziabile in R^n.

Calcolo sulle varietà. Vettori tangenti (germi di curve e derivazioni), spazi tangenti, applicazioni tangenti. Fibrato tangente, orientazione canonica, fibrato normale di una sottovarietà, intorni tubolari. Teorema di Sard, teorema di approssimazione trasversale. Campi di vettori, curve integrali, campi di riferimenti, campi di riferimenti adattati lungo sottovarietà. Curve integrali di campi di vettori, gruppi di trasformazioni locali a un parametro, derivate di Lie e parentesi di Lie, campi di riferimenti coordinati. Spazi cotangenti, applicazioni cotangenti. Fibrato cotangente, orientazione canonica. Forme differenziali lineari, differenziale di funzioni. Algebra esterna delle forme differenziali, differenziale esterno, forme chiuse e forme esatte, lemma di Poincaré. Forme di volume e orientazioni, forma duale di una sottovarietà, prodotto esterno di forme, intersezione di sottovarietà trasversali. Chiusi ammissibili e catene differenziabili, bordo di una catena, integrazione sulle catene differenziabili, teorema di Stokes generalizzato.

Topologia delle varietà. Varietà differenziabili con bordo, restrizione delle orientazioni al bordo. Teorema di immersione di Whitney per varietà con bordo, esistenza e unicità dei collari del bordo. Punti critici regolari, funzioni di Morse sulle varietà con bordo compatte, lemma di Morse. Indice di un punto critico, decomposizioni a manici, decomposizione duale. Grado di applicazioni tra varietà, applicazioni su sfere e teorema di Hopf, teorema di separazione per ipersuperfici di R^n. Campi di vettori con singolarità isolate, indice di una singolarità isolata, teorema di Poincaré-Hopf. Triangolazioni lisce, caratteristica di Eulero-Poincaré, esistenza di campi di vettori non singolari, parallelizzabilità delle 3-varietà orientabili. Coomologia di De Rham, invarianza omotopica, successione di Mayer-Vietoris, coomologia delle sfere, teorema del punto fisso di Brouwer, teorema di invarianza del dominio.

Seconda parte – Geometria differenziale

Metriche riemanniane. Metriche riemanniane ed elementi di lunghezza, spazi modello (metriche euclidee, sferiche e iperboliche). Esistenza di metriche riemanniane sulle varietà, metriche riemanniane indotte su sottovarietà. Campi di riferimenti ortogonali, esistenza locale, campi di riferimenti coordinati ortogonali e caratterizzazione delle metriche euclidee. Applicazioni isometriche e conformi, isometrie e conformità, similitudini. Dualità riemanniana tra campi di vettori e forme differenziali lineari, formule di innalzamento e abbassamento degli indici, gradiente di funzioni, dualità tra fibrato tangente e cotangente. Elementi di volume riemanniani, misura di angoli, lunghezze, volumi. Distanza geodetica, compatibilità con la topologia.

Connessioni e geodetiche. Connessioni affini, connessione di Levi-Civita, esistenza e unicità, simboli di Christoffel. Trasporto parallelo, campi di vettori paralleli, campi di riferimenti paralleli e caratterizzazione delle metriche euclidee. Geodetiche, applicazione esponenziale, intorni convessi e coordinate normali, rigidità delle isometrie. Minimalità locale della lunghezza, equazioni di Eulero-Lagrange. Completezza geodetica, teorema di Hopf-Rinow. Derivata covariante in sottovarietà riemanniane, sottovarietà invarianti per isometrie, sottovarietà totalmente geodetiche, geodetiche e isometrie degli spazi modello.

Curvatura. Curvatura di Riemann, invarianza per isometrie, simmetrie e identità di Bianchi, proprietà tensoriale, curvature sezionali. Curvatura di Ricci e curvatura scalare. Curvatura delle sottovarietà riemanniane, seconda forma fondamentale, equazioni di Gauss, Codazzi e Ricci. Varietà a curvatura costante, omogeneità e isotropia locale, classificazione locale e globale.

Testi di riferimento

E. Sernesi, *Geometria 2*, Boringhieri

V. Guillemin e A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall

M. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser

Testi consigliati

B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko e S.P. Novikov, *Geometria contemporanea*, Ed. Riuniti

W.M. Boothby, *Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Acad. Press

I. Madsen e J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology*, Cambridge Univ. Press

J.W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Univ. Press of Virginia

M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin Inc.

W.P.A. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Walter de Gruyter

P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Springer