Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2021/2022

GEOMETRIA 2

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (27 settembre, 2 ore)
Introduzione al corso. Spazi topologici, aperti e basi di aperti, confronto tra topologie.

Lezione 2. (30 settembre, 2 ore)
Spazi metrici, topologia indotta da una metrica. Esempi di topologie metrizzabili e non metrizzabili. Sistemi di intorni e basi di intorni.

Lezione 3. (4 ottobre, 2 ore)
Operatori topologici di interno, chiusura e frontiera di un sottoinsieme. Punti di accumulazione e punti isolati di un sottoinsieme. Sottospazi topologici. Unioni topologiche, caratterizzazione in termini di sottospazi aperti.

Lezione 4. (7 ottobre, 2 ore)
Prodotti topologici. Quozienti topologici. Applicazioni continue, definizione globale e locale, continuità della composizione di funzioni continue. Omeomorfismi e equivalenza topologica di spazi, immersioni topologiche.

Lezione 5. (11 ottobre, 2 ore)
Omeomorfismi e equivalenza topologica di spazi, immersioni topologiche. Continuità delle restrizioni, teorema di incollamento delle funzioni continue. Continuità delle applicazioni definite su un'unione topologica. Continuità delle applicazioni a valori in un prodotto topologico.

Lezione 6. (14 ottobre, 2 ore)
Continuità di applicazioni definite su un quoziente, versione topologica del teorema di decomposizione canonica di un'applicazione. Azioni topologiche e quozienti, esempi di quozienti indotti da azioni topologiche (tori, sfere e proiettivi).

Lezione 7. (18 ottobre, 2 ore)
Proprietà topologiche globali e locali. Assiomi di separazione e metrizzabilità, assioma di Hausdorff e unicità dei limiti, regolarità e basi di intorni chiusi. Lemma di Urysohn per gli spazi metrizzabili, metrizzabile implica normale, metrizzabilità delle unioni e dei prodotti topologici.

Lezione 8. (21 ottobre, 2 ore)
Assiomi di numerabilità: basi numerabili, basi di intorni numerabili, separabilità. Chiusura e continuità per successioni, spazi metrizzabili separabili hanno basi numerabili, teorema di Lindelöf, partizioni dell'unità.

Lezione 9. (25 ottobre, 2 ore)
Spazi topologici compatti, compattezza dell'intervallo $[0,1]$, conservazione della compattezza, compattezza di unioni e prodotti, sottospazi compatti di R^m.

Lezione 10. (28 ottobre, 2 ore)
Spazi di Hausdorff compatti, normalità, decomposizione canonica delle applicazioni continue. Compattificazioni, esempi ($\widetilde{R}^m \cong B^m$, $\overline{R}^m \cong P^m$, $\widehat{R}^m \cong S^m$), compattificazione di Alexandroff.

Lezione 11. (4 novembre, 2 ore)

Compattezza di spazi metrici, compattezza per successioni e proprietà di Bolzano-Weierstrass, continuità uniforme.

Lezione 12. (8 novembre, 2 ore)

Completezza, proprietà metrica e non topologica, relazioni con la compattezza (locale). Teorema di Baire, teorema del punto fisso per le contrazioni.

Lezione 13. (11 novembre, 2 ore)

Connessione e connessione per archi, connessione dell'intervallo $[0,1]$, conservazione della connessione, connessione di unioni e prodotti, sottospazi connessi di R. Componenti connesse e connesse per archi.

Lezione 14. (15 novembre, 2 ore)

Omotopia tra applicazioni, equivalenza omotopica tra spazi, spazi contraibili. Omotopia relativa, deformazioni su sottospazi. Spazi semplicemente connessi.

Lezione 15. (18 novembre, 2 ore)

Spazi puntati, spazi di cappi. Gruppo fondamentale, omomorfismi indotti dalle applicazioni continue, invarianza topologica.

Lezione 16. (22 novembre, 2 ore)

Indipendenza dal punto base e invarianza omotopica del gruppo fondamentale.

Lezione 17. (25 novembre, 2 ore)

Rivestimenti, rivestimenti regolari e azioni propriamente discontinue, proprietà di sollevamento unico dei cammini, delle omotopie e delle applicazioni, rivestimenti universali ($R \to S^1$, $R^m \to T^m$, $S^m \to P^m$ per $m > 1$).

Lezione 18. (29 novembre, 2 ore)

Gruppo delle trasformazioni di un rivestimento, regolarità e unicità del rivestimento universale, calcolo del gruppo fondamentale mediante il rivestimento universale ($\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^m) \cong \mathbb{Z}^m$, $\pi_1(P^m) \cong \mathbb{Z}_2$ per $m > 1$). Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto.

Lezione 19. (2 dicembre, 2 ore)

Gruppi liberi e loro proprietà universale, presentazioni (finite) di gruppi, prodotto libero e prodotto diretto. Teorema di Seifert-Van Kampen. Unione puntata di spazi topologici, gruppo fondamentale di un'unione puntata, $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1)$. Altre applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen: $\pi_1(R^2 - \{p_1, \ldots, p_k\})$, $\pi_1(S^m)$ con $m > 1$, $\pi_1(T^2)$, $\pi_1(P^2)$.

Lezione 20. (6 dicembre, 2 ore)

Classificazione omotopica delle sfere, invarianza topologica della dimensione. Teorema di non retrazione e teorema del punto fisso di Brouwer. Teorema di Jordan e teorema di Schönfließ, casi speciali convesso e poligonale.

Lezione 21. (9 dicembre, 2 ore)

Grado di un'applicazione $S^1 \to S^1$, indice di allacciamento di una curva piana orientata rispetto ad un punto, cenno alla dimostrazione del teorema di Jordan.

Lezione 22. (13 dicembre, 2 ore)

Nodi nello spazio, gruppo di un nodo, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione. Gruppo del nodo banale e del nodo trifoglio. Varietà topologiche, carte locali e atlanti, carte speciali, proprietà locali delle varietà, invarianza della dimensione per le varietà.

Lezione 23. (14 dicembre, 2 ore)

Immergibilità delle varietà in spazi euclidei, metrizzabilità delle varietà. Curve topologiche, segmentazioni, classificazione delle curve connesse. Superfici topologiche, somma connessa, T_g (superficie orientabile di genere g) e P_g (superficie non orientabile di genere g), interpretazione topologica del genere e dell'orientabilità.

Lezione 24. (16 dicembre, 2 ore)

Poligonazioni, superfici compatte connesse come quozienti di dischi e come somme connesse di tori e proiettivi. Classificazione delle superfici compatte connesse. Gruppo fondamentale delle superfici compatte connesse, abelianizzazione. Caratteristica di Eulero-Poincaré.

Lezione 25. (10 marzo, 2 ore)

Curve differenziabili regolari nel piano, retta tangente, parametrizzazioni regolari e naturali, ascissa curvilinea, equazioni cartesiane regolari.

Lezione 26. (14 marzo, 2 ore)

Riferimento di Frenet, curvatura. Formule di Frenet. Esempi: rette e circonferenze.

Lezione 27. (17 marzo, 2 ore)

Cerchio osculatore, forma canonica. Teorema fondamentale per le curve regolari nel piano, curve a curvatura costante.

Lezione 28. (21 marzo, 2 ore)

Rotazione e curvatura totale, rotazione totale di una curva di Jordan regolare, teorema di Fenchel, curve di Jordan convesse.

Lezione 29. (24 marzo, 2 ore)

Curve differenziabili regolari nello spazio, retta tangente, parametrizzazioni regolari e naturali, ascissa curvilinea, equazioni cartesiane regolari. Riferimenti di Frenet, curvatura e torsione, formule di Frenet.

Lezione 30. (28 marzo, 2 ore)

Esempi: rette, circonferenze e eliche circolari. Cerchio osculatore, forma canonica. Teorema fondamentale per le curve regolari nello spazio, curve a curvatura e torsione costante, condizione di planarità.

Lezione 31. (31 marzo, 2 ore)

Superfici regolari nello spazio, piano tangente, parametrizzazioni locali regolari, equazioni cartesiane regolari, orientazioni e campi di versori normali.

Lezione 32. (4 aprile, 2 ore)

Operatore forma, curvatura di Gauss e curvatura media. Simmetria dell'operatore forma, curvature e direzioni principali. Forme fondamentali, invarianza per isometrie dello spazio.

Lezione 33. (7 aprile, 2 ore)

Forma canonica locale (punti ellittici, iperbolici e parabolici, punti ombelicali e planari), direzioni asintotiche, linee asintotiche e linee di curvatura.

Lezione 34. (11 aprile, 2 ore)

Curve regolari in superfici, curvatura normale e curvatura geodetica, curvature normali e sezioni piane normali, teorema di Meusnier, formula di Eulero. Derivata covariante di vettori tangenti a una superficie nello spazio, simboli di Christoffel.

Lezione 35. (14 aprile, 2 ore)

Trasporto parallelo su una superficie nello spazio. Curve geodetiche e parametrizzazioni geodetiche, equazione delle geodetiche di una superficie nello spazio, esistenza e unicità della geodetica uscente da un punto con una velocità data.

Lezione 36. (21 aprile, 2 ore)
Isometrie intrinseche, carattere intrinseco della derivata covariante, invarianza delle geodetiche per isometrie intrinseche, teorema “egregium ” di Gauss.

Lezione 37. (2 maggio, 2 ore)
Teorema fondamentale delle superfici nello spazio. Superfici di rotazione, equazione di Claireaut, superfici di rotazione a curvatura di Gauss costante.

Lezione 38. (5 maggio, 2 ore)
Superfici rigate, rigate sviluppabili, condizione di sviluppabilità.

Lezione 39. (9 maggio, 2 ore)
Struttura delle superfici sviluppabili. Teoremi di Massey-Liebmann-Hilbert sulle superfici a curvatura costante in R^3.

Lezione 40. (12 maggio, 2 ore)
Superfici minime, variazione prima dell’area e curvatura media, elicoide e catenoide.

Lezione 41. (16 maggio, 2 ore)
Strutture riemanniane su superfici astratte, espressione in coordinate locali. Isometrie, conformità e similitudini (locali).

Lezione 42. (19 maggio, 2 ore)
Derivata covariante, simboli di Christoffel, invarianza per isometrie e similitudini (locali). Trasporto parallelo.

Lezione 43. (23 maggio, 2 ore)
Geodetiche, invarianza per isometrie e similitudini (locali). Applicazione esponenziale e coordinate normali.

Lezione 44. (26 maggio, 2 ore)
Operatore di curvatura, proprietà di simmetria, curvatura di Riemann.

Lezione 45. (27 maggio, 2 ore)
Superfici a curvatura costante, teorema di Minding.

Lezione 46. (30 maggio, 2 ore)
Curve in superfici riemanniane, curvatura geodetica, teorema fondamentale nelle superfici a curvatura costante.

Lezione 47. (31 maggio, 2 ore)
Teorema di Gauss-Bonnet, poligoni geodetici. Modelli metrici delle geometrie non euclidee.