Università di Camerino – Facoltà di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea in Matematica e applicazioni
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2020/2021

GEOMETRIA 1

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (29 settembre, 2 ore)
Considerazioni sugli "assiomi" di Euclide, spezio euclideo come modello dello spazio fisico, carattere costruttivo. Definizione di punti, linee e superfici (nozione intuitiva di dimensione, cf. Poincaré), definizione di rette e piani, rette parallele. Postulati come criteri di costruzione (di segmenti, rette, circonferenze, "movimenti rigidi"), postulato delle parallele come criterio per la costruzione dell'intersezione tra due rette (formulazioni equivalenti); nozioni comuni riferite al processo di "misura" (uso dei "movimenti rigidi", finitezza della misura).

Lezione 2. (1° ottobre, 2 ore)
Considerazioni sugli assiomi di Hilbert. Assiomi di appartenenza, interpretazione insiemistica. Assiomi di ordinamento lineare, semirette e segmenti, orientazioni delle rette. Assioma di Pash, semipiani, semispazi, angoli e triangoli, orientazioni dei piani e dello spazio.

Lezione 3. (6 ottobre, 2 ore)
Poligonali e poligoni, teorema di separazione per le poligonali chiuse semplici. Assioma delle parallele, vettori applicati e vettori liberi, somma vettoriale e moltiplicazione per scalari. Assiomi di completezza, ascisse sulla retta.

Lezione 4. (8 ottobre, 2 ore)
Struttura vettoriale reale sull'insieme dei vettori liberi. Gruppo delle traslazioni, relazione con la struttura vettoriale additiva. Gruppo delle dilatazioni, dilatazioni con centro. Gruppo delle affinità.

Lezione 5. (13 ottobre, 2 ore)
Coordinate affini nel piano e nello spazio. Componenti dei vettori liberi e operazioni in termini di componenti. Equazioni/parametrizzazioni di rette/piani, equazioni delle traslazioni/dilatazioni/affinità. Azione delle affinità su triangoli/tetraedri.

Lezione 6. (15 ottobre, 2 ore)
Assiomi di congruenza, misura di segmenti e angoli, distanza euclidea, isometrie e similitudini, congruenza come relazione indotta dal gruppo delle isometrie. Angoli orientati, operazioni con gli angoli orientati e loro misura nel piano euclideo.

Lezione 7. (20 ottobre, 2 ore)
Prodotto scalare (bilinearità, simmetria e positività), norma di un vettore, angolo tra vettori, condizione di ortogonalità e teorema di Pitagora. Prodotto vettoriale e prodotto misto, aree e volumi generati da vettori, condizioni di allineamento e complanarità. Coordinate cartesiane ortogonali, componenti di vettori e operazioni in componenti. Modello "reale" dello spazio euclideo (costruzione dei numeri reali). Cenno ai modelli di geometrie non euclidee.

Lezione 8. (22 ottobbre, 2 ore)
Equazioni parametrica e cartesiana della retta nel piano, condizioni di parallelismo e ortogonalità, angolo tra due rette, distanza di un punto da una retta. Punto medio e asse di un segmento.

Circonferenze nel piano euclideo, intersezioni con rette e condizione di tangenza. Trasformazioni geometriche del piano in coordinate, cambiamenti di coordinate, coordinate polari.

Lezione 9. (27 ottobre, 2 ore)

Curve del secondo ordine nel piano euclideo, coniche non degeneri (ellissi, iperboli e parabole) come luoghi geometrici e loro equazioni canoniche, realizzazione delle coniche come sezioni piane di un cono circolare, eccentricità di una conica.

Lezione 10. (29 ottobre, 2 ore)

Equazioni parametriche e cartesiane di rette e piani nello spazio euclideo, condizioni di parallelismo e ortogonalità, complanarità di rette nello spazio. Sfere nello spazio euclideo, intersezioni con piani e rette, condizione di tangenza. Trasformazioni geometriche dello spazio in coordinate, cambiamenti di coordinate, coordinate cilindriche e sferiche.

Lezione 11. (3 novembre, 2 ore)

Quadriche nello spazio euclideo, coni e cilindri, ellissoidi/iperboloidi ottenuti come superfici di rotazione da ellissi/iperboli (e successive riscalature), paraboloidi ottenuti come superfici di traslazione da parabole. Intersezione di quadriche con rette e piani, quadriche ellittiche ed iperboliche (rigate).

Lezione 12. (5 novembre, 2 ore)

Campi, definizione e proprietà elementari. Campi dei numeri razionali, reali e complessi. Spazi vettoriali, definizione, proprietà elementari ed esempi (lo spazio dei vettori liberi, spazi vettoriali numerici). Sottospazi vettoriali.

Lezione 13. (10 novembre, 2 ore)

Sottospazio generato da un sottoinsieme, combinazioni lineari. Insiemi di generatori, indipendenza lineare, basi. Esistenza delle basi, dimensione di uno spazio vettoriale, dimensione di sottospazi.

Lezione 14. (12 novembre, 2 ore)

Applicazioni lineari e isomorfismi. Immagine e nucleo di un'applicazione lineare, estensione lineare di un'applicazione definita su una base. Basi e coordinate lineari su uno spazio vettoriale. Intersezione e somma di sottospazi, relazione di Grassmann.

Lezione 15. (17 novembre, 2 ore)

Sottospazi trasversali e complementari, somma diretta. Prodotto di spazi vettoriali, isomorfismo tra prodotto e somma diretta.

Lezione 16. (19 novembre, 2 ore)

Quozienti di spazi vettoriali, teorema dell'omomorfismo, relazione tra la dimensione dell'immagine e quella del nucleo di un'applicazione lineare.

Lezione 17. (24 novembre, 2 ore)

Spazio duale, basi duali, isomorfismo con il duale nel caso finito dimensionale, applicazione trasposta. Annullatore di un sottospazio, equazioni di sottospazi in coordinate lineari, dualità lineare.

Lezione 18. (26 novembre, 2 ore)

Spazi di applicazioni lineari, espressione di un'applicazione lineare in coordinare lineari, endomorfismi e autormorfismi, gruppo lineare generale. Forme bilineari su uno spazio vettoriale, forme bilineari simmetriche e antisimmetriche, forme quadratiche associate, forma polare.

Lezione 19. (1 dicembre, 2 ore)

Matrici e applicazioni lineari, spazio delle matrici $m \times n$. Prodotto righe per colonne e composizione di applicazioni lineari, proprietà del prodotto righe per colonne. Matrici invertibili, gruppo generale lineare.

Lezione 20. (3 dicembre, 2 ore)

Matrice trasposta e applicazione trasposta, proprietà delle trasposte rispetto alla moltiplicazione, matrici simmetriche e antisimmetriche. Rango per righe e per colonne, minori quadrati invertibili, metodo degli orlati.

Lezione 21. (10 dicembre, 2 ore)

Operazioni elementari sulle righe, matrici a gradini, metodo di eliminazione di Gauss, determinazione del rango e dell'inversa. Determinanti, proprietà elementari.

Lezione 22. (15 dicembre, 2 ore)

Criterio di invertibilità, teorema di Binet, teorema di Laplace, formula per l'inversa.

Lezione 23. (17 dicembre, 2 ore)

Sistemi lineari, rango e dimensione dello spazio delle soluzioni, teorema di Rouché-Capelli. Risoluzione dei sistemi lineari col metodo di Gauss, risoluzione dei sistemi lineari con l'utilizzo dei determinanti, regola di Cramer.

Lezione 24. (12 gennaio, 2 ore)

Forme bilineari in coordinate, rappresentazione matriciale delle forme bilineari, matrici congruenti. Rango di una forma bilineare, diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche, riduzione a forma diagonale con il metodo di eliminazione simultanea.

Lezione 25. (14 gennaio, 2 ore)

Forme bilineari reali, teorema di Sylvester, positività. Forme bilineari complesse.

Lezione 26. (19 gennaio, 2 ore)

Operatori lineari in coordinate, rappresentazione matriciale, matrici coniugate. Determinante di un operatore lineare, orientazioni di spazi vettoriali reali. Sottospazi invarianti, autovalori e autovettori, autospazi.

Lezione 27. (21 gennaio, 2 ore)

Equazione caratteristica di un operatore lineare. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore, criteri di triangolarizzazione e diagonalizzazione di endomorfismi, cenno alla forma normale di Jordan.

Lezione 28. (2 marzo, 2 ore)

Spazi affini, vettori applicati e vettori liberi, traslazioni e dilatazioni, dimensione di uno spazio affine. Spazi affini numerici. Sottospazi affini, giacitura di un sottospazio, sottospazio passante per un punto con giacitura data.

Lezione 29. (4 marzo, 2 ore)

Sottospazi paralleli, incidenti, sghembi. Sottospazio affine generato da un sottoinsieme, relazione di Grassmann affine. Teorema di Talete.

Lezione 30. (9 marzo, 2 ore)

Teorema di Desargues. Semispazi, segmenti e convessi in spazi affini reali, involucro convesso. Applicazioni e isomorfismi affini, conservazione del parallelismo.

Lezione 31. (11 marzo, 2 ore)

Classificazione degli spazi affini in base alla dimensione. Gruppo delle affinità, sottogruppi delle traslazioni e delle dilatazioni, sottogruppi di isotropia dei punti.

Lezione 32. (16 marzo, 2 ore)

Indipendenza affine, riferimenti affini, coordinate affini, cambiamenti di coordinate affini.

Lezione 33. (18 marzo, 2 ore)

Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi affini, condizioni di parallelismo. Applicazioni affini in coordinate affini, trasformazioni affini e affinità negli spazi affini numerici.

Lezione 34. (23 marzo, 2 ore)

Equivalenza affine di sottoinsiemi di uno spazio affine, invarianti affini. Classificazione affine dei sottospazi affini. Quadriche affini, riduzione al caso delle ipersuperfici quadriche.

Lezione 35. (25 marzo, 2 ore)

Rango di una ipersuperficie una quadrica e della quadrica all'infinito associata. Equazioni canoniche, riduzione a forma canonica con il metodo di eliminazione simultanea di Gauss.

Lezione 36. (30 marzo, 2 ore)

Quadriche reali, segnatura di una ipersuperficie quadrica reale e della quadrica all'infinito associata. Classificazione affine delle quadriche reali e complesse. Coniche e quadriche nel piano/spazio euclideo.

Lezione 37. (8 aprile, 2 ore)

Spazi proiettivi, dimensione, spazi proiettivi numerici. Sottospazi proiettivi, relazione di Grassmann proiettiva, sottospazi incidenti e sghembi.

Lezione 38. (13 aprile, 2 ore)

Applicazioni proiettive e isomorfismi proiettivi, classificazione degli spazi proiettivi in base alla dimensione. Trasformazioni proiettive ed equivalenza proiettiva.

Lezione 39. (15 aprile, 2 ore)

Dualità proiettiva, sistemi lineari e fasci di iperpiani. Complemento affine di un iperpiano proiettivo.

Lezione 40. (20 aprile, 2 ore)

Spazi proiettivi e spazi affini, completamento proiettivo di uno spazio affine, completamento proiettivo di spazi affini numerici. Sottospazi affini e loro completamenti proiettivi, affinità e proiettività. Teorema di Desargues proiettivo.

Lezione 41. (22 aprile, 2 ore)

Insiemi proiettivamente indipendenti e in posizione generale. Riferimenti proiettivi, punti base e punto unità, coordinate omogenee, cambiamenti di coordinate omogenee. Riferimenti proiettivi e riferimenti affini. Equazioni parametriche e omogenee di sottospazi proiettivi, omogeneizzazione di un'equazione affine.

Lezione 42. (27 aprile, 2 ore)

Trasformazioni proiettive ed equivalenza proiettiva. Gruppo delle proiettività. Proiettività negli spazi proiettivi numerici. Quadriche proiettive, riduzione al caso delle ipersuperfici quadriche. Parte affine di una ipersuperficie quadrica proiettiva, completamento proiettivo di una ipersuperficie quadrica affine. Sistemi lineari e fasci di ipersuperfici quadriche proiettive, coniche degeneri in un fascio di coniche.

Lezione 43. (29 aprile, 2 ore)

Quadriche non singolari, singolari, e degeneri. Sottospazio delle singolarità di una quadrica, coniche degeneri. Polarità indotta da una ipersuperficie quadrica, sottospazio delle singolarità, iperpiani tangenti. Riduzione di una quadrica a forma canonica, classificazione proiettiva delle quadriche reali e complesse, relazione con la classificazione affine.

Lezione 44. (4 maggio, 2 ore)

Spazi vettoriali euclidei, prodotti scalari, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, norma associata a un prodotto scalare, misura degli angoli. Ortogonalità, sottospazi ortogonali, proiezioni ortogonali, riflessioni, dualità euclidea.

Lezione 45. (6 maggio, 2 ore)

Basi ortonormali, metodo di ortonormalizzazione di Gramm-Schmidt.

Lezione 46. (11 maggio, 2 ore)

Applicazioni lineari isometriche, isometrie, classificazione degli spazi vettoriali euclidei, coordinate ortogonali, volume euclideo. Automorfismi isometrici, gruppi ortogonali, gruppi ortogonali speciali.

Lezione 47. (13 maggio, 2 ore)

Forma canonica di un automorfismo isometrico, rotazioni e riflessioni. Similitudini lineari. Operatori simmetrici, teorema spettrale, diagonalizzazione ortogonale di forme bilineari simmetriche.

Lezione 48. (20 maggio, 2 ore)

Estensione agli spazi vettoriali euclidei complessi dei risultati visti nel caso reale. Automorfismi unitari, operatori hermitiani, teorema spettrale complesso.

Lezione 49. (25 maggio, 2 ore)

Spazi euclidei, misura di segmenti e angoli, metrica euclidea. Sottospazi euclidei, ortogonalità, proiezioni ortogonali, riflessioni. Trasformazioni euclidee, isometrie e similitudini. Riferimenti ortogonali, coordinate ortogonali.

Lezione 50. (28 maggio, 2 ore)

Equazioni di sottospazi, condizioni di ortogonalità, isometrie in coordinate. Equivalenza euclidea, proprietà metriche e proprietà simili.

Lezione 51. (1° giugno, 2 ore)

Quadriche euclidee, riduzione a forma canonica, invarianti metrici, classificazione euclidea delle quadriche.