Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2017/2018

TEORIA DEI NODI

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (3 ottobre, 2 ore)

Evoluzione storica della teoria dei nodi: le origini (Gauss, Kelvin e Tait), diagrammi e trecce (Alexander e Reidemeister), aritmetica dei nodi (Schubert), invarianti (Conway, Kauffman e Vassiliev). Definizioni di base: nodi e link, orientazioni, equivalenza topologica e isotopica (isotopia ambiente). Esempi di nodi selvaggi e deformazioni selvagge.

Lezione 2. (4 ottobre, 2 ore)

Nodi docili, intorni tubolari topologici, rappresentazione come nodi lisci e poligonali a meno di ε-isotopie. Deformazioni docili, estensione ad isotopie ambiente, deformazioni poligonali e deformazioni lisce.

Lezione 3. (10 ottobre, 2 ore)

Classificazione di nodi lisci, diffeomorfismi e orientazioni dello spazio, diffeomorfismi che conservano l'orientazione sono realizzabili mediante isotopie. Nodi simmetrici e nodi invertibili.

Lezione 4. (17 ottobre, 2 ore)

Diagrammi di nodi lisci e poligonali, esistenza a meno di ε-isotopie, determinazione del nodo a meno di isotopie verticali. Movimenti di Reidemeister. Banalizzazione di nodi e di diagrammi mediante inversione di incroci, banalità dei nodi in R^n con $n > 3$.

Lezione 5. (18 ottobre, 2 ore)

Nodi banali, K nodo connesso banale se e solo se bordo di un disco docile, K nodo banale se e solo se ogni componente è banale e separata.

Lezione 6. (24 ottobre, 2 ore)

Numero $c(K)$ di incroci necessari per rappresentare K, K banale se e solo se $c(K) = 0$ (teorema di Schönfließ), tabelle dei nodi primi basate su $c(K)$. Esempi di classi di nodi: tori torici, nodi Pretzel, nodi razionali. Somma connessa $K_1 \# K_2$ di nodi connessi K_1 e K_2.

Lezione 7. (25 ottobre, 2 ore)

Gruppo $G(K)$ di un nodo K, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione $H(K) = \mathrm{Ab}(G(K))$ e numero $n(K)$ delle componenti di K. K banale se e solo se $G(K)$ abeliano se e solo se $G(K) \cong \mathbb{Z}$ (lemma del cappio).

Lezione 8. (31 ottobre, 2 ore)

Superfici di Seifert, costruzione basata sui diagrammi. Genere $g(K)$ di un nodo K, K banale se e solo se $g(K) = 0$, $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$, decomposizione in nodi primi.

Lezione 9. (7 novembre, 2 ore)

Indice di allacciamento $\ell(K_1, K_2)$ tra nodi orientati K_1 e K_2, invarianza isotopica (link di Hopf non banale), simmetria, dipendenza dall'orientazione, K_1 e K_2 separati implica $\ell(K_1, K_2) = 0$ ma non viceversa (link di Whitehead, anelli di Borromeo). Calcolo dell'indice di allacciamento sui diagrammi.

Lezione 10. (8 novembre, 2 ore)

Invariante di Arf-Casson $a(K)$ di un nodo connesso (orientato) K, definizione ricorsiva sui diagrammi. Invarianza isotopica, simmetria, indipendenza dall'orientazione, additività rispetto alla somma connessa. Esempi $a(T) = 1$ e $a(E) = -1$ (quindi $T \not\cong E$).

Lezione 11. (14 novembre, 2 ore)

Nodi n-colorabili, invarianza isotopica della n-colorabilità, esempi di nodi non equivalenti.

Lezione 12. (15 novembre, 2 ore)

Risoluzione di incroci e stati di un diagramma. Parentesi di Kauffman, formula ricorsiva sulle risoluzioni, invarianza per isotopia regolare.

Lezione 13. (21 novembre, 1 ora)

Indice di arricciamento. Polinomio di Kauffman $P_K(t)$, dipendenza dall'orientazione, polinomi di Kauffman di nodi simmetrici e somma connessa.

Lezione 14. (22 novembre, 2 ore)

Equazione caratteristica del polinomio di Kauffman, parità delle potenze che vi compaiono. Polinomio di Jones $V_K(x)$, equazione caratteristica, esempi (non simmetria dei nodi trifoglio).

Lezione 15. (28 novembre, 2 ore)

Diagrammi alternanti, colorazioni a scacchiera, nodi alternanti e non-alternanti. Proprietà del polinomio di Jones di nodi alternanti, dimostrazione della congettura di Tait.

Lezione 16. (29 novembre, 2 ore)

Trecce e isotopia di trecce, gruppo $\mathcal{B}_n$ delle n-trecce. Spazio delle $\Gamma_n R^2$ delle n-configurazioni del piano, rivestimento delle n-uple ordinate (coefficienti e radici di polinomi complessi). $\mathcal{B}_n \cong \pi_1(\Gamma_n R^2)$, omomorfismo $\phi_n : \mathcal{B}_n \to \Sigma_n$, $\mathcal{B}_1 \cong 0$ e $\mathcal{B}_2 \cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{B}_n$ non commutativo per $n > 2$.

Lezione 17. (5 dicembre, 2 ore)

Trecce chiuse, teorema di Alexander, algoritmo di Vogel. Relazioni tra trecce e movimenti di Reidemeister, stabilizzazione di trecce, teorema di Markov.

Lezione 18. (6 dicembre, 2 ore)

Rappresentazioni del gruppo delle trecce, rappresentazione simmetrica e sua deformazione di Burau, somma degli esponenti. Algebre di Hecke, teorema di struttura (forma normale).

Lezione 19. (12 dicembre, 2 ore)

Tracce sulle algebra di Hecke, generalizzazione del polinomio di Jones al polinomio in due variabili $P_K(x, y)$.

Lezione 20. (13 dicembre, 2 ore)

Equazione caratteristica di $P_K(x, y)$, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie a alla somma connessa.

Lezione 21. (19 dicembre, 2 ore)

Polinimio di Conway $\nabla_K(y)$, equazione caratteristica, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie a alla somma connessa.

Lezione 22. (20 dicembre, 2 ore)

Forme e matrici di Seifert di un nodo orientato. Derivazione del polinomio di Conway dalle forme di Seifert, relazione tra polinomio di Conway e genere.