Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2017/2018

GEOMETRIA SUPERIORE

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

2 *Lezione 1.* (2 ottobre, 2 ore)

Richiami sulle funzioni differenziabili tra aperti euclidei, differenziale e matrice jacobiana di una funzione, differenziale di funzioni composte (regola della catena). Diffeomorfismi, teorema della funzione inversa. Carte differenziabilmente compatibili, atlanti differenziabili e strutture differenziabili, esistenza e unicità della struttura generata da un atlante. Varietà differenziabili, esempi (R^m, S^m, T^m, P^m).

4 *Lezione 2.* (4 ottobre, 2 ore)

Varietà con bordo. Invarianza dell'interno e del bordo. Strutture differenziabili su varietà con bordo. Varietà differenziabili con bordo. Struttura differenziabile indotta sul bordo, S^m come bordo di B^{m+1}.

6 *Lezione 3.* (9 ottobre, 2 ore)

Prodotto di varietà differenziabili (con bordo), quozienti di varietà differenziabili mediante azioni differenziabili propriamente discontinue. Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra varietà. Confronto di diverse strutture differenziabili su R.

8 *Lezione 4.* (11 ottobre, 2 ore)

Atlanti orientati e orientazioni su varietà differenziabili (con bordo), varietà orientabili e varietà orientate. Orientazioni su una varietà orientabile connessa. Orientazione indotta sul bordo.

10 *Lezione 5.* (16 ottobre, 2 ore)

Applicazioni differenziabili tra varietà che conservano/invertono l'orientazione. Esempi di varietà oriantabili e non orientabili (orientazioni standard su R^m, S^m e T^m; P^m orientabile se e solo se m è dispari).

12 *Lezione 6.* (18 ottobre, 2 ore)

Sottovarietà differenziabili, carte locali adattate; equazioni locali regolari e parametrizzazioni locali regolari; curve e superfici in R^2 e R^3. Caratterizzazione delle sottovarietà differenziabili di R^n come grafici di funzioni differenziabili; esempi di curve differenziabili e non differenziabili in R^2.

14 *Lezione 7.* (23 ottobre, 2 ore)

Partizioni dell'unità differenziabili. Teorema di approssimazione differenziabile; immersioni differenziabili regolari di varietà differenziabili in R^n.

16 *Lezione 8.* (25 ottobre, 2 ore)

Richiami di calcolo differenziale in R^m, vettori tangenti e derivazioni, spazi tangenti e cotangenti, applicazioni tangenti e cotangenti, differenziali di funzioni. Vettori tangenti ad una varietà differenziabile come classi di curve e come derivazioni.

18 *Lezione 9.* (30 ottobre, 2 ore)

Spazi tangenti e applicazioni tangenti su varietà. Spazi e applicazioni cotangenti su varietà; differenziali di funzioni su varietà. Sottospazi tangenti a sottovarietà, equazioni e parametrizzazioni.

20 *Lezione 10.* (6 novembre, 2 ore)

Fibrati tangenti e cotangenti come varietà differenziabili orientate. Campi di vettori, forme differenziali lineari, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

22 *Lezione 11.* (8 novembre, 2 ore)

Parentesi di Lie e proprietà. Curve integrali per un campo di vettori, esistenza e unicità. Campi di riferimenti e campi di riferimenti coordinati. Caratterizzazione dei campi di riferimenti coordinati in termini di parentesi di Lie. Distribuzioni, criterio di integrabilità.

24 *Lezione 12.* (13 novembre, 2 ore)

Forme differenziali, prodotto esterno e algebra di Grassmann. Forme differenziali in coordinate, cambiamenti di coordinate, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

26 *Lezione 13.* (17 novembre, 2 ore)

Differenziale esterno, definizione in coordinate, esistenza e unicità.

28 *Lezione 14.* (20 novembre, 2 ore)

Forme chiuse e forme esatte, lemma di Poincarè (forma chiusa $\Leftrightarrow$ localmente esatta).

30 *Lezione 15.* (22 novembre, 2 ore)

Chiusi ammissibili in varietà differenziabili. Integrale di una funzione a supporto compatto su un chiuso ammissibili di R^m. Integrale di una m-forma a supporto compatto su un chiuso ammissibile in una m-varietà differenziabile orientata.

32 *Lezione 16.* (27 novembre, 2 ore)

Forme di volume e orientazioni, integrazione di funzioni in una varietà differenziabile con una forma di volume (caso speciale: R^m con la forma di volume euclidea).

34 *Lezione 17.* (29 novembre, 2 ore)

Integrazione di forme su sottovarietà differenziabili. Bordo di un chiuso ammissibile, orientazione indotta. Teorema di Stokes. Forme differenziali e calcolo vettoriale in R^3. Conseguenze del teorema di Stokes: formule di Green, teorema di Gauss, teorema di Stokes classico.

36 *Lezione 18.* (4 dicembre, 2 ore)

Teorema di Sard, teorema di immersione di Whitney, fibrato normale e intorni tubolari.

38 *Lezione 19.* (6 dicembre, 2 ore)

Coomologia di De Rham, struttura moltiplicativa, coomologia in dimensione 0 e m. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni differenziabili.

40 *Lezione 20.* (11 dicembre, 2 ore)

Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni continue, invarianza omotopica. Successione esatta di Mayer-Vietoris.

42 *Lezione 21.* (13 dicembre, 2 ore)

Coomologia delle sfere. Teorema del punto fisso di Brouwer, invarianza del dominio e della dimensione. Teorema di separazione di Jordan in R^m.

44 *Lezione 22.* (18 dicembre, 2 ore)

Finitezza della coomologia delle varietà compatte. Coomologia in dimensione m e orientabilità.

46 *Lezione 23.* (20 dicembre, 2 ore)

Grado di applicazioni in termini di coomologia e fibre regolari (integrità), invarianza omotopica, grado della composizione di applicazioni.

48 *Lezione 24.* (7 marzo, 2 ore)

Teorema di separazione per ipersuperfici lisce in R^m, non esistenza di ipersuperfici chiuse non orientabili in R^m. Teorema di Hopf.

50 *Lezione 25.* (13 marzo, 2 ore)

Metriche riemanniane, elementi di lunghezza. Spazi modello (metriche euclidee, sferiche e iperboliche). Esistenza di metriche riemanniane sulle varietà, metriche riemanniane indotte su sottovarietà.

52 *Lezione 26.* (14 marzo, 2 ore)

Campi di riferimenti ortogonali, esistenza locale, campi di riferimenti coordinati ortogonali e caratterizzazione delle metriche euclidee. Applicazioni isometriche e conformi, isometrie e conformità, similitudini.

54 *Lezione 27.* (20 marzo, 2 ore)

Dualità riemanniana tra campi di vettori e forme differenziali lineari, formule di innalzamento e abbassamento degli indici, gradiente di funzioni, dualità tra fibrato tangente e cotangente.

56 *Lezione 28.* (21 marzo, 2 ore)

Elementi di volume riemanniani, misura di angoli, lunghezze, volumi. Distanza geodetica, compatibilità con la topologia.

58 *Lezione 29.* (27 marzo, 2 ore)

Connessioni affini, connessione di Levi-Civita, esistenza e unicità, simboli di Christoffell. Trasporto parallelo, campi di vettori paralleli, campi di riferimenti paralleli e caratterizzazione delle metriche euclidee.

60 *Lezione 30.* (28 marzo, 2 ore)

Geodetiche, applicazione esponenziale, intorni convessi e coordinate normali.

62 *Lezione 31.* (4 aprile, 2 ore)

Minimalità locale della lunghezza, equazioni di Eulero-Lagrange. Isometrie riemanniane come isometrie rispetto alla distanza geodetica.

64 *Lezione 32.* (10 aprile, 2 ore)

Completezza geodetica, teorema di Hopf-Rinow.

66 *Lezione 33.* (11 aprile, 2 ore)

Derivata covariante in sottovarietà riemanniane, sottovarietà totalmente geodetiche.

68 *Lezione 34.* (17 aprile, 2 ore)

Rigidità delle isometrie, sottovarietà luogo di punti fissi di isometrie sono totalmente geodetiche. Geodetiche delle sfere e degli spazi iperbolici.

70 *Lezione 35.* (18 aprile, 2 ore)

Operatore di curvatura sui campi di vettori, proprietà tensoriale, identità di Bianchi.

72 *Lezione 36.* (24 aprile, 2 ore)

Curvature sezionali. Curvatura di Ricci e curvatura scalare.

74 *Lezione 37.* (2 maggio, 2 ore)

Curvatura di sottovarietà riemanniane. Varietà a curvatura costante, omogeneità e isotropia locale.

76 *Lezione 38.* (8 maggio, 2 ore)

Forme di connessione e di curvatura, equazioni strutturali.

78 *Lezione 39.* (9 maggio, 2 ore)

Curvature sezionali come curvature di superfici. Isotropia implica curvatura costante.

80 *Lezione 40.* (15 maggio, 2 ore)
Rivestimenti riemanniani. Spazi a curvatura costante, spazi modello e loro gruppi di isometrie.

82 *Lezione 41.* (16 maggio, 2 ore)
Teorema di Cartan locale, isotropia e omogeneità locale degli spazi a curvatura costante.