Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2017/2018

GEOMETRIA 2

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (2 ottobre, 2 ore)
Introduzione al corso.

Lezione 2. (3 ottobre, 2 ore)
Spazi topologici, aperti e basi di aperti, confronto tra topologie. Spazi metrici, topologia indotta da una metrica. Esempi di topologie metrizzabili e non metrizzabili.

Lezione 3. (9 ottobre, 2 ore)
Sistemi di intorni e basi di intorni. Operatori topologici di interno, chiusura e frontiera di un sottoinsieme. Punti di accumulazione e punti isolati di un sottoinsieme.

Lezione 4. (11 ottobre, 2 ore)
Sottospazi topologici. Unioni topologiche, caratterizzazione in termini di sottospazi aperti. Prodotti topologici. Quozienti topologici.

Lezione 5. (16 ottobre, 2 ore)
Applicazioni continue, definizione globale e locale, continuità della composizione di funzioni continue. Omeomorfismi e equivalenza topologica di spazi, immersioni topologiche. Continuità delle restrizioni, teorema di incollamento delle funzioni continue.

Lezione 6. (18 ottobre, 2 ore)
Continuità delle applicazioni definite su un'unione topologica. Continuità delle applicazioni a valori in un prodotto topologico. Continuità di applicazioni definite su un quoziente, versione topologica del teorema di decomposizione canonica di un'applicazione.

Lezione 7. (23 ottobre, 2 ore)
Azioni topologiche e quozienti, esempi di quozienti indotti da azioni topologiche (tori, sfere e proiettivi).

Lezione 8. (25 ottobre, 2 ore)
Proprietà topologiche globali e locali. Assiomi di separazione e metrizzabilità, assioma di Hausdorff e unicità dei limiti, regolarità e basi di intorni chiusi. Lemma di Urysohn per gli spazi metrizzabili, metrizzabile implica normale, metrizzabilità delle unioni e dei prodotti topologici.

Lezione 9. (30 ottobre, 2 ore)
Assiomi di numerabilità: basi numerabili, basi di intorni numerabili, separabilità. Chiusura e continuità per successioni, spazi metrizzabili separabili hanno basi numerabili, teorema di Lindelöf, partizioni dell'unità.

Lezione 10. (6 novembre, 2 ore)
Spazi topologici compatti, compattezza dell'intervallo $[0,1]$, conservazione della compattezza, compattezza di unioni e prodotti, sottospazi compatti di R^m. Spazi di Hausdorff compatti, normalità, decomposizione canonica delle applicazioni continue.

Lezione 11. (8 novembre, 2 ore)
Compattificazioni, esempi ($\widetilde{R}^m \cong B^m$, $\overline{R}^m \cong P^m$, $\widehat{R}^m \cong S^m$), compattificazione di Alexander.

Lezione 12. (13 novembre, 2 ore)
Compattezza di spazi metrici, compattezza per successioni e proprietà di Bolzano-Weierstrass.

Lezione 13. (15 novembre, 2 ore)
Completezza, proprietà metrica e non topologica, relazioni con la compattezza (locale). Teorema di Baire, teorema del punto fisso per le contrazioni.

Lezione 14. (20 novembre, 2 ore)
Connessione e connessione per archi, connessione dell'intervallo $[0,1]$, conservazione della connessione, connessione di unioni e prodotti, sottospazi connessi di R. Componenti connesse e connesse per archi.

Lezione 15. (22 novembre, 2 ore)
Omotopia tra applicazioni, equivalenza omotopica tra spazi, spazi contraibili.

Lezione 16. (27 novembre, 2 ore)
Omotopia relativa, deformazioni su sottospazi, spazi semplicemente connessi. Gruppo fondamentale.

Lezione 17. (29 novembre, 2 ore)
Omomorfismi indotti dalle applicazioni continue sui gruppi fondamentali. Indipendenza dal punto base e invarianza omotopica del gruppo fondamentale.

Lezione 18. (4 dicembre, 2 ore)
Rivestimenti, rivestimenti regolari e azioni propriamente discontinue, proprietà di sollevamento unico dei cammini, delle omotopie e delle applicazioni, rivestimenti universali ($R \to S^1$, $R^m \to T^m$, $S^m \to P^m$ per $m > 1$).

Lezione 19. (6 dicembre, 2 ore)
Gruppo delle trasformazioni di un rivestimento, regolarità e unicità del rivestimento universale, calcolo del gruppo fondamentale mediante il rivestimento universale ($\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^m) \cong \mathbb{Z}^m$, $\pi_1(P^m) \cong \mathbb{Z}_2$ per $m > 1$). Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto.

Lezione 20. (11 dicembre, 2 ore)
Gruppi liberi e loro proprietà universale, presentazioni (finite) di gruppi, prodotto libero e prodotto diretto. Teorema di Seifert-Van Kampen. Unione puntata di spazi topologici, gruppo fondamentale di un'unione puntata, $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1)$. Altre applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen: $\pi_1(R^2 - \{p_1, \ldots, p_k\})$, $\pi_1(S^m)$ con $m > 1$, $\pi_1(T^2)$, $\pi_1(P^2)$.

Lezione 21. (13 dicembre, 2 ore)
Classificazione omotopica delle sfere, invarianza topologica della dimensione. Teorema di non retrazione e teorema del punto fisso di Brouwer. Teorema di Jordan e teorema di Schönfließ, casi speciali convesso e poligonale.

Lezione 22. (18 dicembre, 2 ore)
Grado di un'applicazione $S^1 \to S^1$, indice di allacciamento di una curva piana orientata rispetto ad un punto, cenno alla dimostrazione del teorema di Jordan.

Lezione 23. (20 dicembre, 2 ore)
Nodi nello spazio, gruppo di un nodo, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione. Gruppo del nodo banale e del nodo trifoglio.

Lezione 24. (5 marzo, 2 ore)
Varietà topologiche, carte locali e atlanti, carte spaciali, proprietà locali delle varietà, invarianza della dimensione per le varietà. Immergibilità delle varietà in spazi euclidei, metrizzabilità delle varietà.

Lezione 25. (6 marzo, 2 ore)

Curve topologiche, segmentazioni, classificazione delle curve connesse. Superfici topologiche, somma connessa, T_g (superficie orientabile di genere g) e P_g (superficie non orientabile di genere g), interpretazione topologica del genere.

Lezione 26. (12 marzo, 2 ore)

Poligonazioni, superfici compatte connesse come quozienti di dischi e come somme connesse di tori e proiettivi. Classificazione delle superfici compatte connesse.

Lezione 27. (13 marzo, 2 ore)

Gruppo fondamentale delle superfici compatte connesse, abelianizzazione. Caratteristica di Eulero-Poincaré, interpretazione topologica dell'orientabilità.

Lezione 28. (19 marzo, 2 ore)

Curve differenziabili regolari nel piano, retta tangente, parametrizzazioni regolari e naturali, ascissa curvilinea, equazioni cartesiane regolari. Riferimento di Frenet, curvatura.

Lezione 29. (20 marzo, 2 ore)

Formule di Frenet. Esempi: rette e circonferenze. Cerchio osculatore, forma canonica. Teorema fondamentale per le curve regolari nel piano, curve a curvatura costante.

Lezione 30. (26 marzo, 2 ore)

Rotazione e curvatura totale, rotazione totale di una curva di Jordan regolare, teorema di Fenchel, curve di Jordan convesse.

Lezione 31. (27 marzo, 2 ore)

Curve differenziabili regolari nello spazio, retta tangente, parametrizzazioni regolari e naturali, ascissa curvilinea, equazioni cartesiane regolari. Riferimenti di Frenet, curvatura e torsione, formule di Frenet. Esempi: rette, circonferenze e eliche circolari.

Lezione 32. (9 aprile, 2 ore)

Cerchio osculatore, forma canonica. Teorema fondamentale per le curve regolari nello spazio, curve a curvatura e torsione costante, condizione di planarità.

Lezione 33. (10 aprile, 2 ore)

Superfici regolari nello spazio, piano tangente, parametrizzazioni locali regolari, equazioni cartesiane regolari, orientazioni e campi di versori normali. Operatore forma, curvatura di Gauss e curvatura media.

Lezione 34. (16 aprile, 2 ore)

Simmetria dell'operatore forma, curvature e direzioni principali. Forme fondamentali, invarianza per isometrie dello spazio.

Lezione 35. (17 aprile, 2 ore)

Forma canonica locale (punti ellittici, iperbolici e parabolici, punti ombelicali e planari), direzioni asintotiche, linee asintotiche e linee di curvatura. Curve regolari in superfici, curvatura normale e curvatura geodetica, curvature normali e sezioni piane normali, teorema di Meusnier, formula di Eulero.

Lezione 36. (23 aprile, 2 ore)

Curve geodetiche e parametrizzazioni geodetiche, equazione delle geodetiche di una superficie nello spazio, esistenza e unicità della geodetica uscente da un punto con una velocità data.

Lezione 37. (24 aprile, 2 ore)

Trasporto parallelo su una superficie nello spazio, derivata covariante di vettori tangenti, simboli di Christoffel, carattere intrinseco della derivata covariante. Equazione delle geodetiche, invarianza delle geodetiche per isometrie intrinseche.

Lezione 38. (7 maggio, 2 ore)
Isometrie intrinseche, teorema "egregium " di Gauss.

Lezione 39. (8 maggio, 2 ore)
Teorema fondamentale delle superfici nello spazio.

Lezione 40. (14 maggio, 2 ore)
Superfici di rotazione, equazione di Claireaut, superfici di rotazione a curvatura di Gauss costante.

Lezione 41. (15 maggio, 2 ore)
Superfici rigate, rigate sviluppabili, condizione di sviluppabilità.

Lezione 42. (21 maggio, 2 ore)
Teoremi di Massey-Liebmann-Hilbert sulle superfici a curvatura costante in R^3. Struttura delle superfici sviluppabili.

Lezione 43. (22 maggio, 2 ore)
Superfici minime, variazione prima dell'area e curvatura media, elicoide e catenoide.

Lezione 44. (28 maggio, 1 ora)
Strutture riemanniane su superfici astratte, espressione in coordinate locali, isometrie, conformità e similitudini.

Lezione 45. (29 maggio, 1 ora)
Piano iperbolico, modelli del semipiano e del disco, e loro equivalenza.

Lezione 46. (4 giugno, 2 ore)
Strutture riemanniane su superfici astratte, isomerie, derivata covariante e trasporto parallelo, curvatura di Gauss.

Lezione 47. (5 giugno, 2 ore)
Modelli metrici delle geometrie non euclidee. Sfera e piano proiettivo, triangoli sferici. Piano iperbolico, disco e semipiano di Poincaré, curvatura di Gauss, geodetiche e isometrie iperboliche, triangoli iperbolici.