Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2015/2016

# GEOMETRIA SUPERIORE

*prof. Riccardo Piergallini*

## *Registro delle lezioni*

*Lezione 1.* (6 ottobre, 2 ore)
Introduzione al corso.

*Lezione 2.* (8 ottobre, 2 ore)
Richiami sulle funzioni differenziabili tra aperti euclidei, differenziale e matrice jacobiana di una funzione, differenziale di funzioni composte (regola della catena). Diffeomorfismi, teorema della funzione inversa. Carte differenziabilmente compatibili, atlanti differenziabili e strutture differenziabili, esistenza e unicità della struttura generata da un atlante. Varietà differenziabili, esempi ($R^m$, $S^m$, $T^m$, $P^m$).

*Lezione 3.* (13 ottobre, 2 ore)
Varietà con bordo. Invarianza dell'interno e del bordo. Strutture differenziabili su varietà con bordo. Varietà differenziabili con bordo. Struttura differenziabile indotta sul bordo, $S^m$ come bordo di $B^{m+1}$.

*Lezione 4.* (15 ottobre, 2 ore)
Prodotto di varietà differenziabili (con bordo), quozienti di varietà differenziabili mediante azioni differenziabili propriamente discontinue. Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra varietà. Confronto di diverse strutture differenziabili su $R$.

*Lezione 5.* (20 ottobre, 2 ore)
Atlanti orientati e orientazioni su varietà differenziabili (con bordo), varietà orientabili e varietà orientate. Orientazioni su una varietà orientabile connessa. Orientazione indotta sul bordo.

*Lezione 6.* (22 ottobre, 2 ore)
Applicazioni differenziabili tra varietà che conservano/invertono l'orientazione. Esempi di varietà oriantabili e non orientabili (orientazioni standard su $R^m$, $S^m$ e $T^m$; $P^m$ orientabile se e solo se $m$ è dispari).

*Lezione 7.* (27 ottobre, 2 ore)
Sottovarietà differenziabili, carte locali adattate; equazioni locali regolari e parametrizzazioni locali regolari; curve e superfici in $R^2$ e $R^3$.

*Lezione 8.* (29 ottobre, 2 ore)
Caratterizzazione delle sottovarietà differenziabili di $R^n$ come grafici di funzioni differenziabili; esempi di curve differenziabili e non differenziabili in $R^2$. Partizioni dell'unità differenziabili.

*Lezione 9.* (3 novembre, 2 ore)
Teorema di approssimazione differenziabile; immersioni differenziabili regolari di varietà differenziabili in $R^n$.

*Lezione 10.* (5 novembre, 2 ore)
Richiami di calcolo differenziale in $R^m$, vettori tangenti e derivazioni, spazi tangenti e cotangenti, applicazioni tangenti e cotangenti, differenziali di funzioni. Vettori tangenti ad una varietà differenziabile come classi di curve e come derivazioni.

*Lezione 11.* (10 novembre, 2 ore)

Spazi tangenti e applicazioni tangenti su varietà. Spazi e applicazioni cotangenti su varietà; differenziali di funzioni su varietà. Sottospazi tangenti a sottovarietà, equazioni e parametrizzazioni.

*Lezione 12.* (12 novembre, 2 ore)

Fibrati tangenti e cotangenti come varietà differenziabili orientate. Esistenza di metriche riemanniane su varietà differenziabili, dualità riemanniana, innalzamento e abbassamento degli indici, diffeomorfismo tra i fibrati tangente e cotangente.

*Lezione 13.* (17 novembre, 2 ore)

Campi di vettori, parentesi di Lie e proprietà. Curve integrali per un campo di vettori, esistenza e unicità. Campi di riferimenti e campi di riferimenti coordinati. Caratterizzazione dei campi di riferimenti coordinati in termini di parentesi di Lie. Distribuzioni, criterio di integrabilità.

*Lezione 14.* (19 novembre, 2 ore)

Forme differenziali lineari, $k$-forme differenziali, prodotto esterno e algebra di Grassmann. Forme differenziali in coordinate, cambiamenti di coordinate, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

*Lezione 15.* (24 novembre, 2 ore)

Differenziale esterno, definizione in coordinate, esistenza e unicità. Forme chiuse e forme esatte, lemma di Poincarè (forma chiusa $\Leftrightarrow$ localmente esatta). Coomologia di De Rahm, coomologia in dimensione 0.

*Lezione 16.* (26 novembre, 2 ore)

Chiusi ammissibili in varietà differenziabili. Integrale di una funzione a supporto compatto su un chiuso ammissibili di $R^m$. Integrale di una $m$-forma a supporto compatto su un chiuso ammissibile in una $m$-varietà differenziabile orientata.

*Lezione 17.* (1° dicembre, 2 ore)

Forme di volume e orientazioni, integrazione di funzioni in una varietà differenziabile con una forma di volume (caso speciale: $R^m$ con la forma di volume euclidea).

*Lezione 18.* (3 dicembre, 2 ore)

Integrazione di forme su sottovarietà differenziabili. Bordo di un chiuso ammissibile, orientazione indotta. Teorema di Stokes. Forme differenziali e calcolo vettoriale in $R^3$. Conseguenze del teorema di Stokes: formule di Green, teorema di Gauss, teorema di Stokes classico.

*Lezione 19.* (10 dicembre, 2 ore)

Teorema di Sard, teorema di immersione di Whitney, fibrato normale e intorni tubolari.

*Lezione 20.* (15 dicembre, 2 ore)

Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni continue, invarianza omotopica. Successione esatta di Mayer-Vietoris.

*Lezione 21.* (17 dicembre, 2 ore)

Finitezza della coomologia delle varietà compatte. Coomologia in dimensione $m$ e orientabilità. Coomologia delle sfere.

*Lezione 22.* (22 dicembre, 2 ore)

Teorema del punto fisso di Brouwer, invarianza del dominio e della dimensione. Teorema di separazione di Jordan.