Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2015/2016

GEOMETRIA SUPERIORE

prof. Riccardo Piergallini

Programma del corso

Prima parte – Topologia differenziabile

Strutture differenziabili. Funzioni differenziabili tra aperti di R^n, funzioni di classe C^k e C^∞, differenziale e matrice jacobiana, funzioni regolari e diffeomorfismi, regola della catena, teoremi della funzione inversa e della funzione implicita. Carte differenziabili su una varietà, atlanti e strutture differenziabili su varietà, strutture orientate e orientabilità, orientazioni su varietà connesse. Applicazioni differenziabili, partizioni dell'unità differenziabili, approssimazioni differenziabili di funzioni continue. Diffeomorfismi tra varietà, diffeomorfismi locali e orientazioni, orientabilità degli spazi proiettivi. Sottovarietà differenziabili, equazioni e parametrizzazioni locali regolari, sottovarietà differenziabili di R^n, teorema di immersione differenziabile in R^n.

Calcolo su varietà. Vettori tangenti (germi di curve e derivazioni), spazi tangenti, applicazioni tangenti. Fibrato tangente, orientazione canonica, fibrato normale di una sottovarietà, intorni tubolari. Teorema di Sard, teorema di approssimazione trasversale. Campi di vettori, curve integrali, campi di riferimenti, campi di riferimenti adattati lungo sottovarietà. Curve integrali di campi di vettori, gruppi di trasformazioni locali a un parametro, derivate di Lie e parentesi di Lie, campi di riferimenti coordinati. Spazi cotangenti, applicazioni cotangenti. Fibrato cotangente, orientazione canonica. Esistenza di metriche Riemanniane sulle varietà, dualità Riemanniana tra fibrato tangente e cotangente, dualità tra campi di vettori e forme differenziali lineari. Forme differenziali lineari, differenziale di funzioni. Algebra esterna delle forme differenziali, differenziale esterno, forme chiuse e forme esatte, lemma di Poincaré. Forme di volume e orientazioni, forma duale di una sottovarietà, prodotto esterno di forme, intersezione di sottovarietà trasversali. Chiusi ammissibili e catene differenziabili, bordo di una catena, integrazione sulle catene differenziabili, teorema di Stokes generalizzato.

Topologia delle varietà. Varietà differenziabili con bordo, restrizione delle orientazioni al bordo. Teorema di immersione di Whitney per varietà con bordo, esistenza e unicità dei collari del bordo. Punti critici regolari, funzioni di Morse sulle varietà con bordo compatte, lemma di Morse. Indice di un punto critico, decomposizioni a manici, decomposizione duale. Grado di applicazioni tra varietà, applicazioni su sfere e teorema di Hopf, teorema del punto di fisso, teorema di invarianza del dominio, teorema di separazione per ipersuperfici di R^n. Campi di vettori con singolarità isolate, indice di una singolarità isolata, teorema di Poincaré-Hopf. Triangolazioni lisce, caratteristica di Eulero-Poincaré, esistenza di campi di vettori non singolari, parallelizzabilità delle 3-varietà orientabili. Coomologia di De Rham, invarianza omotopica, coomologia delle sfere, teorema del punto fisso di Brower, teorema di invarianza del dominio.

Seconda parte – Teoria dei nodi

Definizioni di base. Nodi, orientazioni, equivalenza topologica e isotopica. Nodi docili, intorni tubolari topologici, nodi lisci e poligonali. Deformazioni docili, estensione ad isotopie ambiente, defomazioni poligonali e deformazioni lisce. Classificazione di nodi lisci, nodi banali, caratterizzazione come bordi di dishi lisci. Nodi simmetrici e nodi invertibili. Diagrammi di nodi lisci e poligonali, esistenza a meno di perturbazioni, movimenti di Reidemeister. Banalizzazione di nodi mediante inversione di incroci, banalità dei nodi in R^n con $n > 3$. Gruppo $G(K)$ di un nodo K, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione e numero delle componenti. Classi speciali di nodi: tori torici, nodi Pretzel, nodi razionali. Somma connessa di nodi.

Invarianti numerici. Indice di allacciamento, invarianza isotopica, dipendenza dall'orientazione. Superfici di Seifert, costruzione basata sui diagrammi, simmetria dell'indice di allacciamento. K banale se e solo se $G(K)$ abeliano se e solo se $G(K) \cong \mathbb{Z}$. Genere $g(K)$ di un nodo K, K banale se e solo se $g(K) = 0$, additività del genere, decomposizione in nodi primi. Numero minimo di incroci $c(K)$, K banale se e solo se $c(K) = 0$, tabelle dei nodi primi basate su $c(K)$. Calcolo dell'indice di allacciamento sui diagrammi. Indice di contorcimento di un diagramma, invarianza per isotopia regolare. Nodi n-colorabili, invarianza isotopica della n-colorabilità. Nodi geometrici, numero di incroci medio e indice di contorcimento medio, indice di allacciamento e integrale di Gauss, teorema di White.

Polinomi di Kauffman e Jones. Parentesi di Kauffman, risoluzione di incroci e stati di un diagramma, formula ricorsiva sulle risoluzioni, invarianza per isotopia regolare. Polinomio di Kauffman $P_K(t)$, dipendenza dall'orientazione, polinomi di Kauffman di nodi simmetrici e somma connessa. Equazione caratteristica del polinomio di Kauffman. Polinomio di Jones $V_K(x)$, equazione caratteristica. Diagrammi alternanti, colorazioni a scacchiera, nodi alternanti e non-alternanti, polinomio di Jones di nodi alternanti, dimostrazione della congettura di Tait.

Trecce e polinomio di Jones in due variabili. Trecce e isotopia di trecce, gruppo $\mathcal{B}_n$ delle n-trecce. Spazio $\Gamma_n R^2$ delle n-configurazioni del piano, $\mathcal{B}_n$ come gruppo fondamentale di $\Gamma_n R^2$. Trecce chiuse, teorema di Alexander, algoritmo di Vogel. Relazioni tra trecce e movimenti di Reidemeister, stabilizzazione di trecce, teorema di Markov. Rappresentazione simmetrica e sua deformazione di Burau, somma degli esponenti. Algebre di Hecke, teorema di struttura. Tracce sulle algebre di Hecke, polinomio di Jones in due variabili $V_K(x, y)$, equazione caratteristica, dipendenza dall'orientazione, polinomi $V_K(x, y)$ di nodi simmetrici e somma connessa.

Polinomio di Conway e forme di Seifert. Polinimio di Conway $\nabla_K(y)$, equazione caratteristica, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie e alla somma connessa. Polinomio di Alexander $\Delta_K(t)$, calcolo basato sui diagrammi. Forme e matrici di Seifert di un nodo orientato. Derivazione del polinomio di Conway dalle forme di Seifert, relazione tra polinomio di Conway e genere, polinomio di Conway e segnatura di nodi "slice".

Invarianti di Vassiliev. Nodi singolari, movimenti di isotopia liscia, inversione di incroci e singolarità doppie trasversali. Invarianti di Vassiliev, equazione caratteristica, invarianti di ordine finito, simboli. Diagrammi di Gauss, relazioni tra diagrammi e diagrammi base, calcolo degli invarianti di ordine finito. Teorema di Vassiliev-Kontsevich, polinomio di Conway e invarianti di Vassiliev. Grafi topologici nello spazio, movimenti di isotopia, grafi intrinsecamente annodati.

Testi di riferimento

E. Sernesi, *Geometria 2*, Boringhieri

V. Guillemin e A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall

W.B. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, GTM 175, Springer

A. Sossinsky, *Knots. Mathematics with a twist*, Harward University Press

Testi consigliati

B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko e S.P. Novikov, *Geometria contemporanea*, Ed. Riuniti

I. Madsen e J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology*, Cambridge Univ. Press

J.W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Univ. Press of Virginia

M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin Inc.

V.V. Prasolov e A.B. Sossinsky, *Knots, link, braids and 3-manifolds*, Math. Monogr. 154, AMS

D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing

J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer