Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2015/2016

GEOMETRIA 2

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (6 ottobre, 2 ore)
Introduzione al corso.

Lezione 2. (8 ottobre, 2 ore)
Spazi topologici, aperti e basi di aperti, confronto tra topologie. Spazi metrici, topologia indotta da una metrica. Esempi di topologie metrizzabili e non metrizzabili.

Lezione 3. (13 ottobre, 2 ore)
Sistemi di intorni e basi di intorni. Operatori topologici di interno, chiusura e frontiera di un sottoinsieme, punti di accumulazione e punti isolati di un sottoinsieme. Applicazioni continue, definizione globale e locale (continuità in un punto), continuità della composizione di funzioni continue.

Lezione 4. (15 ottobre, 2 ore)
Omeomorfismi e equivalenza topologica di spazi, immesioni topologiche. Sottospazi topologici, continuità delle restrizioni, teorema di incollamento delle funzioni continue.

Lezione 5. (20 ottobre, 2 ore)
Unioni topologiche, caratterizzazione in termini di sottospazi aperti, continuità delle applicazioni definite su un'unione topologica. Prodotti topologici, proiezioni canoniche (continue e aperte, ma non chiuse), continuità delle applicazioni a valori in un prodotto topologico.

Lezione 6. (22 ottobre, 2 ore)
Quozienti topologici, continuità di applicazioni definite su un quoziente, versione topologica del teorema di decomposizione canonica di un'applicazione.

Lezione 7. (27 ottobre, 2 ore)
Azioni topologiche e quozienti, esempi di quozienti indotti da azioni topologiche (tori, sfere e proiettivi).

Lezione 8. (29 ottobre, 2 ore)
Proprietà topologiche globali e locali. Assiomi di separazione e metrizzabilità, assioma di Hausdorff e unicità dei limiti, regolarità e basi di intorni chiusi. Lemma di Urysohn per gli spazi metrizzabili, metrizzabile implica normale, metrizzabilità delle unioni e dei prodotti topologici.

Lezione 9. (3 novembre, 2 ore)
Assiomi di numerabilità: basi numerabili, basi di intorni numerabili, separabilità. Chiusura e continuità per successioni, spazi metrizzabili separabili hanno basi numerabili, teorema di Lindelöf, partizioni dell'unità.

Lezione 10. (3 novembre, 2 ore)
Spazi topologici compatti, compattezza dell'intervallo $[0, 1]$, conservazione della compattezza, compattezza di unioni e prodotti, sottospazi compatti di R^m. Spazi di Hausdorff compatti, normalità, decomposizione canonica delle applicazioni continue.

Lezione 11. (10 novembre, 2 ore)

Compattificazioni, esempi ($\widetilde{R}^m \cong B^m$, $\overline{R}^m \cong P^m$, $\widehat{R}^m \cong S^m$), compattificazione di Alexander. Compattezza di spazi metrici, compattezza per successioni e proprietà di Bolzano-Weierstrasse.

Lezione 12. (12 novembre, 2 ore)

Completezza, proprietà metrica e non topologica, relazioni con la compattezza (locale), teorema di Baire, teorema del punto fisso per le contrazioni.

Lezione 13. (17 novembre, 2 ore)

Connessione e connessione per archi, connessione dell'intervallo $[0, 1]$, conservazione della connessione, connessione di unioni e prodotti, sottospazi connessi di R. Componenti connesse e connesse per archi.

Lezione 14. (19 novembre, 2 ore)

Omotopia tra applicazioni, equivalenza omotopica tra spazi, spazi contraibili. Omotopia relativa, deformazioni su sottospazi, spazi semplicemente connessi.

Lezione 15. (24 novembre, 2 ore)

Gruppo fondamentale, omomorfismi indotto dalle applicazioni continue. Indipendenza dal punto base e invarianza omotopica del gruppo fondamentale.

Lezione 16. (26 novembre, 2 ore)

Rivestimenti, rivestimenti regolari e azioni propriamente discontinue, proprietà di sollevamento unico dei cammini, delle omotopie e delle applicazioni, rivestimenti universali ($R \to S^1$, $R^m \to T^m$, $S^m \to P^m$ per $m > 1$).

Lezione 17. (1° dicembre, 2 ore)

Gruppo delle trasformazioni di un rivestimento, regolarità e unicità del rivestimento universale, calcolo del gruppo fondamentale mediante il rivestimento universale ($\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^m) \cong \mathbb{Z}^m$, $\pi_1(P^m) \cong \mathbb{Z}_2$ per $m > 1$).

Lezione 18. (3 dicembre, 2 ore)

Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto. Gruppi liberi e loro proprietà universale, presentazioni (finite) di gruppi, prodotto libero e prodotto diretto.

Lezione 19. (10 dicembre, 2 ore)

Teorema di Seifert-Van Kampen. Unione puntata di spazi topologici, gruppo fondamentale di un'unione puntata, $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1)$. Altre applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen: $\pi_1(R^2 - \{p_1, \ldots, p_k\})$, $\pi_1(S^m)$ con $m > 1$, $\pi_1(T^2)$, $\pi_1(P^2)$.

Lezione 20. (15 dicembre, 2 ore)

Classificazione omotopica delle sfere, invarianza topologica della dimensione. Teorema di non retrazione e teorema del punto fisso di Brower. Teorema di Jordan e teorema di Schönfließ, casi speciali convesso e poligonale.

Lezione 21. (17 dicembre, 2 ore)

Grado di un'applicazione $S^1 \to S^1$, indice di allacciamento di una curva piana orientata rispetto ad un punto, cenno alla dimostrazione del teorema di Jordan. Nodi nello spazio, gruppo di un nodo, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione. Gruppo del nodo banale e del nodo trifoglio.

Lezione 22. (12 gennaio, 2 ore)

Varietà topologiche, carte locali e atlanti, carte spaciali, proprietà locali delle varietà, invarianza della dimensione per le varietà. Immergibilità delle varietà in spazi euclidei, metrizzabilità delle varietà.

Lezione 23. (13 gennaio, 2 ore)

Curve topologiche, segmentazioni, classificazione delle curve connesse. Superfici topologiche, somma connessa, T_g (superficie orientabile di genere g) e P_g (superficie non orientabile di genere g), interpretazione topologica del genere.

Lezione 24. (20 gennaio, 2 ore)

Poligonazioni, superfici compatte connesse come quozienti di dischi e come somme connesse di tori e proiettivi. Classificazione delle superfici compatte connesse.

Lezione 25. (21 gennaio, 2 ore)

Gruppo fondamentale delle superfici compatte connesse, abelianizzazione. Caratteristica di Eulero-Poincaré, interpretazione topologica dell'orientabilità.