Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2013/2014

GEOMETRIA SUPERIORE

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (3 ottobre, 2 ore)

Richiami sulle funzioni differenziabili tra aperti euclidei, funzioni di classe C^k, funzioni differenziabili, diffeomorfismi, differenziale e matrice jacobiana di una funzione, differenziale di funzioni composte (regola della catena). Teorema della funzione inversa.

Lezione 2. (4 ottobre, 2 ore)

Carte differenziabilmente compatibili, atlanti differenziabili e strutture differenziabili, esistenza e unicità della struttura generata da un atlante. Varietà differenziabili, esempi (R^m, S^m, T^m, P^m).

Lezione 3. (10 ottobre, 2 ore)

Varietà con bordo. Invarianza dell'interno e del bordo. Strutture differenziabili su varietà con bordo. Varietà differenziabili con bordo. Struttura differenziabile indotta sul bordo, S^m come bordo di B^{m+1}.

Lezione 4. (11 ottobre, 2 ore)

Prodotto di varietà differenziabili (con bordo), quozienti di varietà differenziabili mediante azioni differenziabili propriamente discontinue. Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra varietà. Confronto di diverse strutture differenziabili su R.

Lezione 5. (17 ottobre, 2 ore)

Atlanti orientati e orientazioni su varietà differenziabili (con bordo), varietà orientabili e varietà orientate. Orientazioni su una varietà orientabile connessa. Orientazione indotta sul bordo.

Lezione 6. (18 ottobre, 2 ore)

Applicazioni differenziabili tra varietà che conservano/invertono l'orientazione. Esempi di varietà oriantabili e non orientabili (orientazioni standard su R^m, S^m e T^m; P^m orientabile se e solo se m è dispari).

Lezione 7. (24 ottobre, 2 ore)

Sottovarietà differenziabili, carte locali adattate; equazioni locali regolari e parametrizzazioni locali regolari; curve e superfici in R^2 e R^3.

Lezione 8. (25 ottobre, 2 ore)

Caratterizzazione delle sottovarietà differenziabili di R^n come grafici di funzioni differenziabili; esempi di curve differenziabili e non differenziabili in R^2. Partizioni dell'unità differenziabili.

Lezione 9. (31 ottobre, 2 ore)

Teorema di approssimazione differenziabile; immersioni differenziabili regolari di varietà differenziabili in R^n.

Lezione 10. (7 novembre, 2 ore)

Richiami di calcolo differenziale in R^m, vettori tangenti e derivazioni, spazi tangenti e cotangenti, applicazioni tangenti e cotangenti, differenziali di funzioni. Vettori tangenti ad una varietà differenziabile come classi di curve e come derivazioni.

Lezione 11. (8 novembre, 2 ore)

Spazi tangenti e applicazioni tangenti su varietà. Spazi e applicazioni cotangenti su varietà; differenziali di funzioni su varietà. Sottospazi tangenti a sottovarietà, equazioni e parametrizzazioni.

Lezione 12. (14 novembre, 2 ore)

Fibrati tangenti e cotangenti come varietà differenziabili orientate. Esistenza di metriche riemanniane su varietà differenziabili, dualità riemanniana, innalzamento e abbassamento degli indici, diffeomorfismo tra i fibrati tangente e cotangente.

Lezione 13. (15 novembre, 2 ore)

Campi di vettori, parentesi di Lie e proprietà. Curve integrali per un campo di vettori, esistenza e unicità. Campi di riferimenti e campi di riferimenti coordinati. Caratterizzazione dei campi di riferimenti coordinati in termini di parentesi di Lie. Distribuzioni, criterio di integrabilità.

Lezione 14. (21 novembre, 2 ore)

Forme differenziali lineari, k-forme differenziali, prodotto esterno e algebra di Grassmann. Forme differenziali in coordinate, cambiamenti di coordinate, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

Lezione 15. (22 novembre, 2 ore)

Differenziale esterno, definizione in coordinate, esistenza e unicità in aperti euclidei. Differenziale esterno, esistenza e unicità in varietà differenziabili. Forme chiuse e forme esatte, lemma di Poincarè (forma chiusa $\Leftrightarrow$ localmente esatta).

Lezione 16. (28 novembre, 2 ore)

Chiusi ammissibili in varietà differenziabili. Integrale di una funzione a supporto compatto su un chiuso ammissibili di R^m. Integrale di una m-forma a supporto compatto su un chiuso ammissibile in una m-varietà differenziabile orientata.

Lezione 17. (29 novembre, 2 ore)

Forme di volume e orientazioni, integrazione di funzioni in una varietà differenziabile con una forma di volume (caso speciale: R^m con la forma di volume euclidea).

Lezione 18. (5 dicembre, 2 ore)

Integrazione di forme su sottovarietà differenziabili. Bordo di un chiuso ammissibile, orientazione indotta. Teorema di Stokes. Forme differenziali e calcolo vettoriale in R^3. Conseguenze del teorema di Stokes: formule di Green, teorema di Gauss, teorema di Stokes classico.

Lezione 19. (6 dicembre, 2 ore)

Coomologia di De Rahm, omomorfismi indotti da applciazioni continue, invarianza omotopica. Successione esatta di Mayer-Vietoris.

Lezione 20. (12 dicembre, 2 ore)

Coomologia in dimensione 0 e i dimensione m. Coomologia delle sfere. Teorema del punto fisso di Brouwer, invarianza del dominio e della dimensione.

Lezione 21. (13 dicembre, 2 ore)

Grado di un'applicazione tra varietà orientate, invarianza omotopica. Teorema di Sard, determinazione del grado sui valori regolari.

Lezione 22. (19 dicembre, 2 ore)

Teorema di immersione di Whitney, teorema di separazione di Jordan, Teorema di Hopf.

Lezione 23. (4 marzo, 2 ore)

Evoluzione storica della teoria dei nodi: le origini (Gauss, Kelvin e Tait), diagrammi e trecce (Alexander e Reidemeister), aritmetica dei nodi (Schubert), invarianti (Conway, Kauffman e Vassiliev). Definizioni di base: nodi e link, orientazioni, equivalenza topologica e isotopica (isotopia ambiente). Esempi di nodi selvaggi e deformazioni selvagge.

Lezione 24. (7 marzo, 2 ore)

Nodi docili, intorni tubolari topologici, rappresentazione come nodi lisci e poligonali a meno di ε-isotopie. Deformazioni docili, estensione ad isotopie ambiente, deformazioni poligonali e deformazioni lisce. Classificazione di nodi lisci, diffeomorfismi e orientazioni dello spazio, diffeomorfismi che conservano l'orientazione sono realizzabili mediante isotopie.

Lezione 25. (12 marzo, 2 ore)

Nodi banali, K banale se e solo se bordo di un disco docile. Nodi simmetrici e nodi invertibili. Diagrammi di nodi lisci e poligonali, esistenza a meno di ε-isotopie, determinazione del nodo a meno di isotopie verticali.

Lezione 26. (14 marzo, 2 ore)

Numero $c(K)$ di incroci necessari per rappresentare K, K banale se e solo se $c(K) = 0$ (teorema di Schönfließ), tabelle dei nodi primi basate su $c(K)$. Esempi di classi di nodi: tori torici, nodi Pretzel, nodi razionali. Somma connessa $K_1 \# K_2$ di nodi connessi K_1 e K_2.

Lezione 27. (19 marzo, 2 ore)

Gruppo $G(K)$ di un nodo K, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione $H(K) = \mathrm{Ab}(G(K))$ e numero $n(K)$ delle componenti di K. K banale se e solo se $G(K)$ abeliano se e solo se $G(K) \cong \mathbb{Z}$ (lemma del cappio).

Lezione 28. (21 marzo, 2 ore)

Superfici di Seifert, costruzione basata sui diagrammi. Genere $g(K)$ di un nodo K, K banale se e solo se $g(K) = 0$, $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$, decomposizione in nodi primi.

Lezione 29. (26 marzo, 2 ore)

Indice di allacciamento $\mathrm{lk}(K_1, K_2)$ tra nodi orientati K_1 e K_2, invarianza isotopica (link di Hopf non banale), simmetria, dipendenza dall'orientazione, K_1 e K_2 separati implica $\mathrm{lk}(K_1, K_2) = 0$ ma non viceversa (link di Whitehead, anelli di Borromeo).

Lezione 30. (28 marzo, 2 ore)

Movimenti di Reidemeister, calcolo dell'indice di allacciamento sui diagrammi. Indice di contorcimento $\mathrm{wr}(K)$ di un (diagramma di un) nodo K, invarianza per isotopia regolare.

Lezione 31. (2 aprile, 2 ore)

Nodi n-colorabili, invarianza isotopica della n-colorabilità, esempi di nodi non equivalenti.

Lezione 32. (4 aprile, 2 ore)

Banalizzazione di nodi e di diagrammi mediante inversione di incroci, banalità dei nodi in R^n con $n > 3$. Risoluzione di incroci e stati di un diagramma. Parentesi di Kauffman, formula ricorsiva sulle risoluzioni, invarianza per isotopia regolare.

Lezione 33. (8 aprile, 1 ora)

Polinomio di Kauffman $P_K(t)$, dipendenza dall'orientazione, polinomi di Kauffman di nodi simmetrici e somma connessa.

Lezione 34. (11 aprile, 2 ore)

Equazione caratteristica del polinomio di Kauffman, parità delle potenze che vi compaiono.

Lezione 35. (16 aprile, 2 ore)

Polinomio di Jones $V_K(x)$, equazione caratteristica, esempi (non simmetria dei nodi trifoglio).

Lezione 36. (23 aprile, 2 ore)

Diagrammi alternanti, colorazioni a scacchiera, nodi alternanti e non-alternanti. Proprietà del polinomio di Jones di nodi alternanti, dimostrazione della congettura di Tait.

Lezione 37. (30 aprile, 2 ore)

Trecce e isotopia di trecce, gruppo $\mathcal{B}_n$ delle n-trecce. Spazio delle $\Gamma_n R^2$ delle n-configurazioni del piano, rivestimento delle n-uple ordinate (coefficienti e radici di polinomi complessi). $\mathcal{B}_n \cong \pi_1(\Gamma_n R^2)$, omomorfismo $\phi_n : \mathcal{B}_n \to \Sigma_n$, $\mathcal{B}_1 \cong 0$ e $\mathcal{B}_2 \cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{B}_n$ non commutativo per $n > 2$.

Lezione 38. (7 maggio, 2 ore)

Trecce chiuse, teorema di Alexander, algoritmo di Vogel. Relazioni tra trecce e movimenti di Reidemeister, stabilizzazione di trecce, teorema di Markov.

Lezione 39. (9 maggio, 2 ore)

Rappresentazioni del gruppo delle trecce, rappresentazione simmetrica e sua deformazione di Burau, somma degli esponenti. Algebre di Hecke, teorema di struttura (forma normale).

Lezione 40. (14 maggio, 2 ore)

Tracce sulle algebra di Hecke, generalizzazione del polinomio di Jones al polinomio in due variabili $P_K(x, y)$.

Lezione 41. (15 maggio, 2 ore)

Equazione caratteristica di $P_K(x, y)$, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie a alla somma connessa. Polinimio di Conway $\nabla_K(y)$, equazione caratteristica, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie a alla somma connessa.

Lezione 42. (21 maggio, 2 ore)

Polinimio di Conway $\nabla_K(y)$, equazione caratteristica, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie a alla somma connessa.

Lezione 43. (23 maggio, 2 ore)

Forme e matrici di Seifert di un nodo orientato. Derivazione del polinomio di Conway dalle forme di Seifert, relazione tra polinomio di Conway e genere.